A. I. NEKRASOV

CURS DE MECANICĂ TEORETICĂ

1

EDITURA TEHNICĂ

A. I. NEKRASOV

CURS DE MECANICĂ TEORETICĂ

vol. I

Statica şi cinematica

Traducere din limba rusă



EDITURA TEHNICĂ
1955

TABLA DE MATERII

STATICA

CAPITOLUL I

Forța ca vector

CAPITOLUL II

Momentul unei forțe și produsul vectorial

CAPITOLUL III

Legături și reacțiuni. Produs scalar

CAPITOLUL IV
Forțe concurente

CAPITOLUL V
Reducerea forțelor paralele

CAPITOLUL VI
Centre de greutate

CAPITOLUL VII
Echilibrul forțelor paralele

CAPITOLUL VIII
Teoria cuplurilor

CAPITOLUL IX
Sistem de forțe în plan

CAPITOLUL X
Frecarea

CAPITOLUL XI
Sistem arbitrar de forțe

CAPITOLUL XII
Cazuri particulare

STATICA GRAFICĂ

CAPITOLUL XIII
Poligon funicular

CAPITOLUL XIV
Aplicații ale metodelor grafice în statică

CAPITOLUL XV
Grinzi cu zăbrele

CINEMATICA

CAPITOLUL XVI
Viteza unui punct

CAPITOLUL XVII
Accelerația unui punct

CAPITOLUL XVIII
Mișcarea de translație a unui solid și mișcarea lui de rotație în jurul unei axe fixe

CAPITOLUL XIX
Mișcarea plan paralelă a solidului

CAPITOLUL XX
Mişcarea de rotaţie a solidului în jurul unui punct fix

CAPITOLUL XXI
Cumpunerea vitezelor unghiulare. Reducerea vitezelor unghiulare şi de translaţie, la cel mai simplu sistem

CAPITOLUL XXII
Cazul general de mişcare a solidului liber

CAPITOLUL XXIII
Viteza şi acceleraţia unui punct în mişcare relativă Axe mobile de coordonate

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A PATRA

Ediția a patra a „Cursului de mecanică teoretică" reprezintă reproducerea cu mari modificări a ediției a treia. Astfel, în ediția a patra s-au corectat erorile care s-au strecurat în ediția precedentă, s-au introdus numeroase precizări, clarificări, completări și s-a mărit numărul exemplelor. Exemplele au fost culese cu litere mai mici și s-a introdus pentru ele o numerotație generală. Cursul este precedat de o introducere scrisă special pentru noua ediție. La pregătirea noii ediții au fost consultate în special lucrările sovietice de mecanică teoretică.

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A CINCEA

Ediția a cincea a fost retipărită după ediția a patra fără modificări, cu excepția corectării erorilor și a precizării unor formulări.

INTRODUCERE

Mecanica este știința despre mișcări și forțe. Ambele noțiuni — atît mișcarea cît și forța — impun lămuriri care vor fi date aici, la începutul studiului mecanicii, în măsura în care aceasta este necesar.

Printre diferitele forme ale mișcării materiei, mecanica se ocupă cu forma cea mai simplă a mișcării, care constă din schimbarea poziției reciproce a corpurilor sau a unor părți din corp, una față de alta, în decursul timpului. Asemenea mișcare se numește mișcare mecanică.

Deși noțiunea de forță pare ceva obișnuit și cuvîntul „forță" îl folosim frecvent în vorbirea curentă, totuși, stabilirea sensului precis al acestei noțiuni, nu este un lucru simplu. Observațiile și experiența dovedesc că corpurile acționează mecanic unul asupra celuilalt; se modifică sau mișcarea corpurilor, sau se produc deformații ale acestor corpuri. De multe ori nu știm care este, din punct de vedere fizic, esența acestei acțiuni reciproce a corpurilor, dar, fără să ne atingem de esența fizică a acestei acțiuni mecanice, îi atribuim numele de forță. Noțiunea de forță este foarte folositoare pentru mecanică, deoarece învățînd să măsurăm forțele, sîntem în stare să determinăm cauza acțiunii exterioare și mărimea ei.

Chiar din definiția mișcării mecanice rezultă că se poate vorbi de mișcarea corpului pe care îl studiem, numai în raport cu un alt corp. Studiind mișcarea corpurilor materiale, noi raportăm poziția lor la un corp oarecare dat, de exemplu în raport cu pămîntul sau în raport cu obiecte direct legate de el. Corpul în raport cu care se examinează mișcarea studiată se numește sistem de referință. De obicei, pentru ușurința determinării poziției obiectului material în mișcare, unui asemenea corp i se atașează un anumit sistem de coordonate, invariabil, pe care de asemenea îl numim sistem de referință.

Newton (1642—1727), formulînd pentru întîia oară așa-numitele legi fundamentale sau axiome ale mecanicii, presupunea

existența spațiului absolut imobil, deci a unui sistem de referință absolut imobil și a timpului absolut, cu ajutorul cărora este posibilă stabilirea mișcării absolute, și, cu ajutorul cărora Newton a stabilit legile sale despre mișcare.

Știința modernă nu recunoaște spațiul absolut imobil. Vorbind despre mișcare, de fiecare dată trebuie să se indice acel sistem de referință în raport cu care este determinată mișcarea, fără de care noțiunea de „mișcare" și, în particular, de „repaus" este lipsită de conținut. Totuși, dintre toate sistemele de referință posibile, putem alege pe acelea pentru care sînt valabile, cel puțin cu aproximație, legile fundamentale ale lui Newton. Cum se aleg aceste sisteme, numite „inerțiale", se va indica în partea a doua a prezentului „Curs de mecanică teoretică". Tot acolo se va arăta că pentru studiul multor fenomene mecanice se poate lua fără erori sensibile, ca sistem inerțial, orice sistem de axe de coordonate, legat direct de suprafața pămîntului.

Legile fundamentale ale mecanicii stabilite de Newton, au fost considerate valabile timp de un secol și jumătate, pînă cînd s-a descoperit, la mijlocul secolului trecut, că interacțiunile polilor magnetici cu curenții electrici duc la forțe care nu se supun legilor lui Newton. Atunci, pentru studiul acestui fel de interacțiune, a fost creată o știință nouă, anume „electrodinamica".

După aceasta, pînă la sfîrșitul secolului trecut, nu a fost nici o îndoială că mecanica lui Newton sau „mecanica clasică" este aplicabilă la mișcarea mecanică a oricărui corp material, deși se știe că mărimea deplasării periheliului orbitei planetei Mercur, egală aproximativ cu trei sferturi de minut la un secol, este inexplicabilă. Pe la începutul acestui secol, s-au observat și alte fenomene care nu se puteau explica folosind mecanica clasică.

Aceste nepotriviri între teorie și observații au dus la crearea „mecanicii relativiste restrînse" care s-a dovedit a fi în stare de a explica mai multe fenomene decît mecanica clasică. Totuși, gravitația universală continua să rămînă tot așa de enigmatică cum era și pentru savanții care trăiseră cu două secole în urmă. Ce e drept, în decursul timpului s-a obișnuit ca prin cuvintele „acțiunea la distanță", să se înlocuiască explicarea esenței fizice a acestei forțe. Pentru explicarea gravitației universale, a fost generalizată mecanica relativistă restrînsă și creată „mecanica relativistă generalizată", cu ajutorul căreia s-a reușit să se explice esența gravitației și în același timp și deplasarea indicată

mai sus a periheliului planetei Mercur. Mecanica relativistă renunţă la noţiunile lui Newton despre spaţiu şi timp şi le înlocuieşte cu altele depărtate mult de sensul cu care sîntem obişnuiţi. Totuşi, această înlocuire se face observată pentru viteze foarte mari ale corpurilor; pentru vitezele obişnuite ale corpurilor, care sînt o fracţiune mică din viteza luminii, diferenţa dintre rezultatele folosirii noţiunilor lui Newton despre spaţiu şi timp şi a noţiunilor relativiste despre spaţiu şi timp, este practic neglijabilă.

Studiul fenomenelor de radioactivitate a dus la descoperirea că atomii au o structură complicată, iar încercările de a folosi mecanica clasică la studiul mişcării particulelor din care sînt compuşi atomii, de exemplu la studiul mişcării electronilor, s-au soldat cu insuccese. Pentru explicarea acestei mişcări a fost creată în jurul anului 1930 o ştiinţă nouă „mecanica cuantică" şi „mecanica ondulatorie", care a făcut posibilă studierea mişcărilor din interiorul atomului. Legile mecanicii cuantice diferă mult de legile mecanicii clasice.

Vedem că în locul mecanicii clasice unice, despre care se credea în secolul al XVIII-lea că este în stare să explice toate fenomenele, avem deja în mijlocul secolului al XX-lea, patru mecanici: clasică, relativistă restrînsă, relativistă generalizată şi cuantică. Dar, deoarece rezultatele mecanicii clasice sînt în general aplicabile, iar în condiţiile practice de pe pămînt sînt totdeauna aplicabile la toate cazurile mişcării mecanice a corpurilor microscopice (inclusiv cele pînă la dimensiunile moleculelor) cu viteze mici în comparaţie cu viteza luminii, rezultă că studiul mecanicii clasice teoretice este necesar.

Totuşi, nu se poate afirma că în prezent s-a ajuns la limită în domeniul mecanicii şi că în viitor nu se va cere o lărgire ulterioară şi stabilirea de noi puncte de vedere. În cartea sa „Materialism şi empiriocriticism" (Opere, ed. 4, vol. 14 pag. 248) V. I. Lenin scria:

„Materialismul dialectic insistă însă asupra caracterului aproximativ, relativ, al oricărei teze ştiinţifice asupra structurii materiei şi a însuşirilor ei, asupra inexistenţei unor hotare absolute în natură, asupra transformării materiei în mişcare dintr-o stare în alta, incompatibilă pe cît se pare, din punctul nostru de vedere, cu cea dintîi etc. oricît de ciudată ar fi, din punctul de vedere al „bunului simţ", transformarea eterului imponderabil în materie ponderabilă şi, invers, oricît de „stranie" ar părea absenţa la electron a oricărei alte mase în afară de cea

electromagnetică, oricît de neobişnuită ar părea limitarea legilor mecanice ale mişcării numai la domeniul fenomenelor naturii şi subordonarea lor unor legi mai profunde ale fenomenelor electromagnetice etc., — toate acestea nu fac decît să aducă încă o confirmare a materialismului dialectic".[1]

Prezentul „Curs de mecanică teoretică" este exclusiv un curs de mecanică clasică.

Mecanica se poate împărţi în trei părţi: cinematica, dinamica şi statica.

Cinematica studiază mişcarea corpurilor materiale din punct de vedere geometric, independent de cauzele care o provoacă şi o modifică. Fără a apela la noţiunile de forţă şi de masă şi considerînd mişcarea corpurilor ca fiind dată, cinematica examinează dependenţa de timp a coordonatelor punctelor unui corp, a vitezelor şi a acceleraţiilor lor, de asemenea şi problema transformării acestor mărimi prin trecerea de la un sistem de referinţă la altul.

Dinamica studiază mişcările mecanice ale corpurilor în funcţie de forţele care acţionează asupra lor.

Statica se ocupă de cazul particular al dinamicii: cazul echilibrului corpurilor, adică acel caz cînd acţiunile forţelor se anulează reciproc.

Menţionăm că această împărţire a mecanicii este convenţională, deoarece nu se poate stabili o limită clară între fenomenele care se referă la fiecare dintre aceste părţi. Vom menţine totuşi această împărţire, deoarece ea înlesneşte înţelegerea mecanicii. Prezentul „Curs de mecanică teoretică" este împărţit în trei părţi: statica, cinematica şi dinamica; această ordine a părţilor este comodă din două motive.

În primul rînd, datorită acestei succesiuni este înlesnită începerea studiului mecanicii, deoarece pentru înţelegerea staticii se cere, afară de matematica elementară numai cîteva noţiuni de geometrie analitică. Începînd studiul cinematicii, studentul trebuie să cunoască elemente de calcul diferenţial şi numai pentru aprofundarea dinamicii se cer cunoştinţe de calcul integral şi de integrarea ecuaţiilor diferenţiale.

Al doilea motiv care ne obligă să începem cursul de mecanică în şcolile tehnice superioare cu statica, constă în faptul că o astfel de ordine de expunere ne dă posibilitatea de a trece mai

---

[1] v. *V. I. Lenin,* Opere, vol. 14, Ed. de Stat pentru literatură politică, Bucureşti, 1954, p. 255.

devreme la studiul științelor aplicate, care se bazează în mare măsură pe statică.

Din punct de vedere principial, ar fi mai just să se înceapă studiul mecanicii cu cinematica, deoarece expunerea ar cîștiga astfel din punct de vedere al înlănțuirii logice. Astfel, de exemplu, în această ordine ar fi trebuit împărțită statica în două părți interpunînd între ele cinematica, avînd în vedere că partea a doua a staticii impune cunoașterea cinematicii. Totuși, considerentele practice expuse mai înainte ne obligă să începem „Cursul de mecanică teoretică" cu statica, în dauna rigurozității expunerii și a logicii în desfășurarea materiei acestui curs.

Toate corpurile din natură ne sînt cunoscute, sub trei stări de agregare: solidă, lichidă și gazoasă; în conformitate cu aceasta și mecanica se împarte în mecanica solidelor, mecanica lichidelor sau hidromecanica și mecanica gazelor, în special a aerului sau aeromecanica. Mecanica teoretică, în scopul construirii unei teorii care să aproximeze mișcarea corpurilor reale, utilizează o serie de modele abstracte care reflectă acele proprietăți ale corpurilor reale care joacă un rol hotărîtor în fenomenele studiate. Deoarece deformările solidelor sub acțiunea forțelor sînt în multe cazuri mici, este natural să se examineze în mecanică *solidele perfect rigide* adică astfel de corpuri la care acțiunea forțelor nu provoacă nici un fel de deformări. De multe ori și dimensiunile geometrice ale corpului considerat pot fi neglijate într-o problemă oarecare în comparație cu alte dimensiuni care intervin în problemă. De aceea este natural să se studieze în mecanică, *punctele materiale*, adică corpurile a căror poziție este determinată printr-un punct geometric și care au proprietatea de a avea în același timp o anumită masă. În hidromecanică se consideră de multe ori lichidul ca fiind lipsit de coeziune și fără frecări interioare, adică fără viscozitate. De astfel de modele abstracte se servește mecanica teoretică. Mecanica teoretică stă în fruntea celorlalte discipline mecanice, pentru că în ea se cunosc și se cercetează în modul cel mai general și pur, regulile mișcării mecanice; de aceea științele mecanice aplicate, ca: rezistența materialelor, teoria mecanismelor și a mașinilor etc., se bazează continuu pe rezultatele și metodele mecanicii teoretice.

Mecanica pornește de la o serie de axiome și principii, adică adevăruri care au fost obținute ca rezultat al generalizării experienței întregii omeniri în decursul existenței sale. Justețea acestor axiome și principii se constată continuu în practică în domeniile corespunzătoare fenomenelor reale. La aceasta este necesar

să se mai adauge rezultatele care se obțin pe cale experimentală pentru probleme izolate. Ultimele rezultate sînt totdeauna necesare pentru disciplinele mecanicii aplicate. Pe baza axiomelor și principiilor, conținutul mecanicii teoretice se dezvoltă pe cale matematică. Dar, deși mecanica teoretică folosește în mare măsură metodele matematice de cercetare, este necesar totuși a înțelege clar că mecanica teoretică este una dintre științele despre natură, că ea apare ca o știință a naturii, deși este cea mai abstractă dintre toate științele naturii.

Deducțiile mecanicii teoretice depind de justețea ipotezelor pe care ele se sprijină, pentru că numai dacă ipotezele sînt reale, deducțiile matematice nu pot introduce greșeli. În cazul cînd se observă nepotriviri între rezultatele calculelor și rezultatele experimentale, trebuie analizate ipotezele admise.

În ceea ce privește metoda matematică de expunere a mecanicii teoretice, la baza prezentului „Curs de mecanică teoretică" se folosește metoda vectorială deoarece o întreagă serie de noțiuni introduse în mecanică: forța, momentul unei forțe, momentul unui cuplu, viteza liniară, viteza unghiulară etc., sînt vectori. De fapt calculul vectorial a apărut ca rezultat al studiului proprietăților matematice ale mărimilor mecanice menționate mai sus. Domeniul reprezentărilor mărimilor mecanice prin vectori a fost lărgit prin adăugarea unei întregi serii de mărimi din studiul electricității. Toate operațiile fundamentale cu vectorii au apărut ca rezultat al analizei și al generalizării operațiilor cu mărimile respective mecanice și electrice. De aceea expunerea vectorială în mecanica teoretică apare ca normală și totodată ea permite să se descopere mai ușor unitatea matematică în diferite date mecano-matematice din diferitele secțiuni ale mecanicii teoretice. Astfel, de exemplu, este suficient ca cineva să știe ce este un produs vectorial și să știe că unele mărimi din mecanica teoretică sînt produse vectoriale, ca el singur să deducă aproape direct proprietățile fundamentale ale acestor mărimi mecanice și să obțină teoremele fundamentale referitoare la ele. În acest fel, introducerea vectorilor în mecanica teoretică ușurează memorarea proprietăților noțiunilor mecanice introduse și fixează în memorie aspectul lor geometric, permite să se înțeleagă ușor unitatea matematică în diferitele secțiuni ale mecanicii teoretice, ușurează și simplifică concluziile; simplifică expresiile literare ale formulelor; înlesnește memorarea formulelor și exprimarea lor; face ca deducțiile să fie independente de axele de coordonate adoptate

Monumentele istorice rămase pînă în vremurile noastre, arată că izvoarele cunoștințelor mecanice trebuie căutate în antichitate. Acumularea cunoștințelor mecanice izolate în procesul activității economice și industriale a omului a început cu mult înaintea apariției oricărei teorii.

Dar, încă în antichitate, afară de acumularea de observații, se tindea la explicarea acestor observații pe baze teoretice; astfel, lui Arhimede îi aparține demonstrația, care nu a pierdut din interes nici în prezent, a regulii pîrghiei. Statica apărută în acest fel se consideră ca o parte a fizicii. Apariția dinamicii corespunde deja cu începuturile timpurilor moderne, cînd soluționarea problemelor dinamice s-a dovedit a fi necesară pentru practică, și, în același timp, s-a înțeles că la cercetarea naturii nu ne putem mulțumi numai cu raționamente abstracte, cum se făcea de obicei în antichitate, ci se impune a păși la observații sistematice și la experiențe. Fondatorii dinamicii au fost Galileu (1564—1642) și mai ales Newton, care a trăit puțin mai tîrziu, creatorul mecanicii clasice moderne sau newtoniene (Principiile matematice ale filozofiei naturii, 1686). După Newton, succesul în dezvoltarea mecanicii teoretice depindea mai ales de aplicarea în mecanică a matematicii și în special a analizei.

În legătură cu aceasta trebuie amintit în primul rînd numele lui Euler (1707—1788) („Mecanica sau știința despre mișcare expusă analitic“, 1736), al lui Lagrange (1736—1818). Opera lui Lagrange denumită de el „Mecanica analitică“ (1788) și menținută într-un caracter pur analitic, a exercitat o influență puternică asupra întregii dezvoltări a mecanicii din secolul al XIX-lea. În urma lui au fost parcă uitate bazele fizice ale mecanicii teoretice și întreaga mecanică teoretică a fost considerată drept matematică aplicată; de altfel, pe această cale s-au obținut rezultate foarte importante. În Rusia, în universități, se folosea în locul denumirii de „mecanică teoretică“ chiar pe atunci denumirea de „matematică aplicată“. Dar, din primul pătrar al secolului al XX-lea, mecanica teoretică își reia din nou importanța ca știință despre natură; aceasta a devenit deosebit de clar, mai ales după crearea mecanicii relativiste și a mecanicii cuantice. În acest fel, statica a apărut în antichitate, dinamica a apărut în ultimul pătrar al secolului al XVII-lea, cinematica însă, ca o parte independentă a mecanicii teoretice, s-a creat de-abia în prima jumătate a secolului al XIX-lea, iar la aceasta a contribuit mult chiar cerința crescîndă de studiere a mișcării mecanismelor și mașinilor.

Uniunea Sovietică a adus contribuţii preţioase în crearea şi dezvoltarea diferitelor discipline mecanice. Contribuţiile U.R.S.S. sînt foarte mari mai ales în hidromecanică şi aeromecanică. Contribuţiile U.R.S.S. în mecanica teoretică generală sînt de asemenea mari. Primul creator al mecanicii teoretice, a fost în Rusia Euler, care a trăit la Petersburg unde a şi murit, timp de 31 de ani. Cartea lui, pomenită mai înainte, „Mecanica sau ştiinţa despre mişcare, expusă analitic", a fost scrisă şi editată la Petersburg. Ea a influenţat mult dezvoltarea mecanicii teoretice pe cale analitică; ea l-a influenţat şi pe Lagrange. O serie întreagă de rezultate esenţiale în dezvoltarea mecanicii teoretice pe cale analitică aparţin academicianului Mihail Vasilievici Ostrogradski (1801—1861); din şcoala lui Ostrogradski fac parte mulţi savanţi mecanicieni renumiţi din Rusia. Ostrogradski a elaborat principiul variaţional al dinamicii, care se mai numeşte şi principiul Ostrogradski-Hamilton, deoarece independent de Ostrogradski şi într-o formă mai puţin generală, el a fost elaborat simultan şi de către englezul Hamilton. Pentru dezvoltarea teoriei analitice a mecanismelor au avut o importanţă mare lucrările renumitului savant rus academicianul Pafnutie Lvovici Cebîşev (1821—1894). Dintre cele trei cazuri cunoscute, cînd mişcarea unui solid în jurul unui punct fix se poate studia analitic pînă la capăt, unul a fost elaborat în Rusia (1888) cazul Sofia Vasilievna Kovalevskaia (1850—1891). Lucrările lui Aleksandr Mihailovici Leapunov (1857—1918), privind studiul stabilităţii mişcării („Problema generală a stabilităţii mişcării", 1892), sînt pînă în prezent neîntrecute în ştiinţa universală. Nicolai Egorovici Jukovski (1847—1921), „părintele aviaţiei ruse", şi-a creat un renume universal prin lucrările în domeniul aerodinamicii care stau la baza calculului avionului. Numeroasele lucrări ale lui N. E. Jukovski, care fac parte din cele mai variate ramuri ale mecanicii, atît ale celei teoretice cît şi ale celei aplicate, au fost create de necesităţile practicii. Pentru Jukovski mecanica nu a fost un capitol al matematicii aplicate ci o ştiinţă despre natură, care deşi se folosea pe scară largă de toate mijloacele matematicii, se baza pe experienţă în toate stadiile dezvoltării sale. Academicianul Serghei Alexeevici Ceaplîghin (1869—1942) a lucrat mult şi cu succes în domeniul aerodinamicii şi hidromecanicii; în mecanica teoretică a dedus ecuaţiile dinamicii pentru sisteme cu legături aşa-numite neolonome. Prof. Ivan Vsevolodovici Meşcerski (1859—1935) a fost primul care a obţinut ecuaţia mişcării punctului cu masă

variabilă, care este în prezent de o mare importanță pentru teoria mișcării rachetelor.

Multe date prețioase și interesante despre dezvoltarea mecanicii în Uniunea Sovietică se pot găsi în cartea „Mecanica în U.R.S.S. în ultimii 30 ani“ [1] în care se arată și evenimente importante din istoria mecanicii în Rusia, înainte de 1917.

Inginerii și cercetătorii științifici sovietici, în vederea unei activități rodnice pentru construirea comunismului în U.R.S.S., trebuie să îndeplinească cu indici calitativi înalți sarcinile ce le stau în față și să traseze căi noi pentru studiul tehnicii și științei. Incontestabil că un mare ajutor în această activitate îl vor da cunoștințele fundamentale în domeniul mecanicii teoretice, deoarece mecanica teoretică stă la baza a foarte numeroase discipline tehnice și metodele ei sînt utilizabile direct la rezolvarea diferitelor probleme tehnice.

[1] Gostehizdat, M-L., 1950.

CAPITOLUL I

FORŢA CA VECTOR

§ 1. Solid rigid şi punct material. Denumirea de statică provine de la cuvîntul grecesc „stasis" care înseamnă a sta, nemişcare, repaus; prin urmare statica este ştiinţa care se ocupă cu starea de repaus a corpurilor materiale sub acţiunea unor forţe aplicate asupra lor. Raportînd poziţia corpurilor materiale la sistemul inerţial de axe de coordonate amintit în introducere, vom numi *echilibru absolut*, starea de repaus a unui corp material sub acţiunea forţelor care sînt aplicate asupra lui, în raport cu sistemul inerţial de axe de coordonate.

De aceea scriind mai jos: „punct de repaus", „axă de repaus" etc., se va înţelege mereu sub aceşti termeni punctul, legat invariabil de sistemul inerţial, axa, invariabil legată de sistemul inerţial etc.

Starea de repaus a unui corp material în raport cu orice alte axe de coordonate care nu sînt invariabile faţă de sistemul inerţial de axe ales, se numeşte *echilibru relativ*. În statică, vom avea de-a face numai cu echilibrul absolut al corpurilor materiale. Dar, să admitem deocamdată fără demonstraţie, că legile echilibrului absolut se pot extinde în general şi asupra echilibrului corpurilor materiale aflate pe suprafaţa pămîntului. Justificarea acestui fapt, ca şi întregul studiu al echilibrului relativ, se face numai în dinamică.

Orice corp sub acţiunea forţelor ce-i sînt aplicate, fie că va rămîne în repaus, fie că va intra într-o anumită stare de mişcare, îşi va schimba aspectul, sau, cum se spune, *se va deforma*. Deformaţiile pot fi mari şi atunci ele se vor observa imediat cu uşurinţă, spre exemplu întinderea unui şnur de cauciuc, întinderea arcului, încovoierea unei bare metalice subţiri etc. Dar, deformaţiile pot fi şi puţin vizibile, astfel că ele pot fi descoperite numai cu ajutorul instrumentelor de măsurat, speciale, ca în cazul lungirii unei şine prin forţe de întindere aplicate la extremităţile ei. Studiul deformaţiilor corpurilor sub acţiunea forţelor

care sînt aplicate se face în partea mecanicii denumită *teoria elasticității*, și, în partea ei aplicată — *rezistența materialelor*. În cursul general de mecanică teoretică, deformația corpurilor se neglijează de obicei introducîndu-se noțiunea de *solid rigid*, adică a unui asemenea corp, în care acțiunea forțelor nu produce nici un fel de deformații sau la care distanța dintre toate punctele rămîne neschimbată. Posibilitatea înlocuirii corpurilor reale cu solide perfect rigide se explică prin faptul că în multe cazuri deformația corpurilor poate fi neglijată fiind foarte mică. Acolo unde aceasta nu se poate face, rezultatele obținute în mecanica teoretică pot fi corectate în baza teoriei și a metodelor rezistenței materialelor și teoriei elasticității.

Afară de solidul rigid, se mai introduce în mecanica teoretică și o altă noțiune convențională, și anume în cazurile în care se pot neglija dimensiunile corpului fie în comparație cu distanțele la alte corpuri, fie în comparație cu dimensiunile celorlalte corpuri materiale care intră în studiul problemei. Așa este, de exemplu, cazul sistemului nostru solar, în care dimensiunile planetelor sînt neglijabile în comparație cu distanța lor de la soare și cu distanța dintre ele; în cazul unui bulgăre față de pămînt, în care dimensiunile bulgărelui sînt neglijabile în comparație cu dimensiunile pămîntului, sau cazul unei particule foarte mici a unui corp în comparație cu întregul corp. Atunci se presupune că întreaga masă a corpului a cărui mărime se poate neglija, se reduce la limită, la un singur punct, astfel că la limită există un punct cu o masă oarecare, finită sau infinit mică, care se numește *punct material*. În prezentul curs de mecanică teoretică se va demonstra că orice mișcare a solidului constă dintr-o mișcare de translație și o mișcare de rotație a acestui corp în jurul centrului său de greutate, iar mișcarea de translație se determină cu ajutorul mișcării centrului său de greutate, care se produce astfel ca și cînd toată masa corpului ar fi concentrată în centrul său de greutate și toate forțele care acționează asupra corpului ar fi transportate prin translație în centrul său de greutate; în acest fel, centrul de greutate al solidului poate fi privit ca un punct material cu masă egală cu masa corpului. Am folosit aici noțiunea de masă și de centru de greutate, presupunînd că aceste noțiuni ne sînt deja cunoscute din cursul de fizică elementară.

Aceste două noțiuni convenționale: *solidul rigid* și *punctul material*, înlocuiesc, în mecanica teoretică, corpurile materiale reale, ușurînd în mare măsură studiul ei. Rezultatele obținute pe

această cale, sînt în general de așa natură încît ne dau o imagine asupra stării de repaus sau de mișcare a corpurilor reale; la nevoie, aceste rezultate pot fi puse la punct prin studiul deformațiilor. Aceste precizări, completează fără să infirme rezultatele obținute în mecanica teoretică.

§ 2. Direcția, sensul și mărimea forțelor. Din experiența zilnică, omul a observat că forța are o direcție, deoarece, de

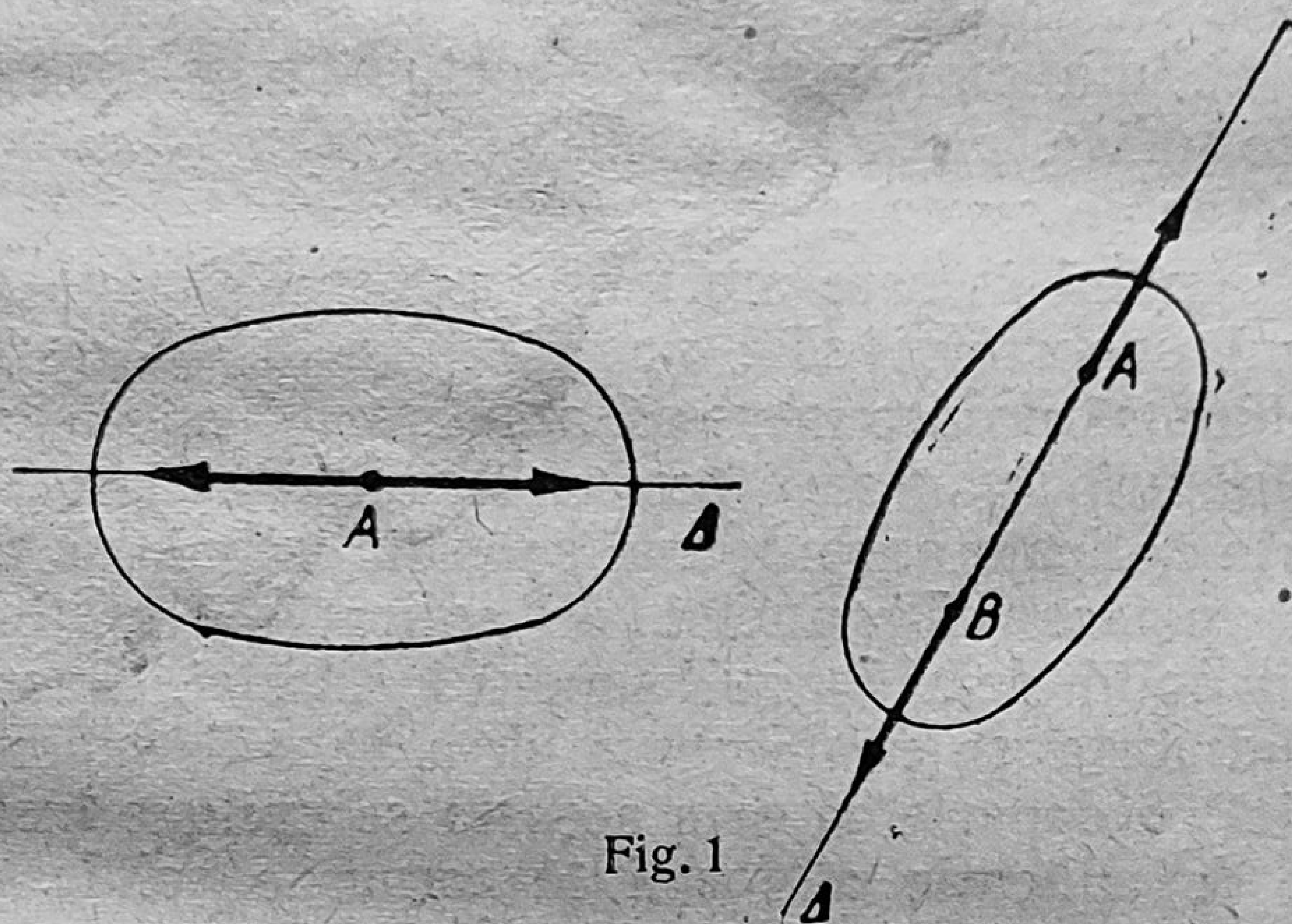


Fig. 1

exemplu, se poate trage un corp în direcția dorită, agățînd într-un punct al corpului, o sfoară de care se trage. Generalizînd și introducînd noțiuni abstracte, se poate emite ipoteza că forța este totdeauna aplicată de-a lungul unei drepte care trece printr-un anumit punct al corpului și acționează într-un anumit sens de-a lungul acestei drepte. Astfel s-au putut naște noțiunile de *suport (direcție de acțiune) al forței* și de *sens*.

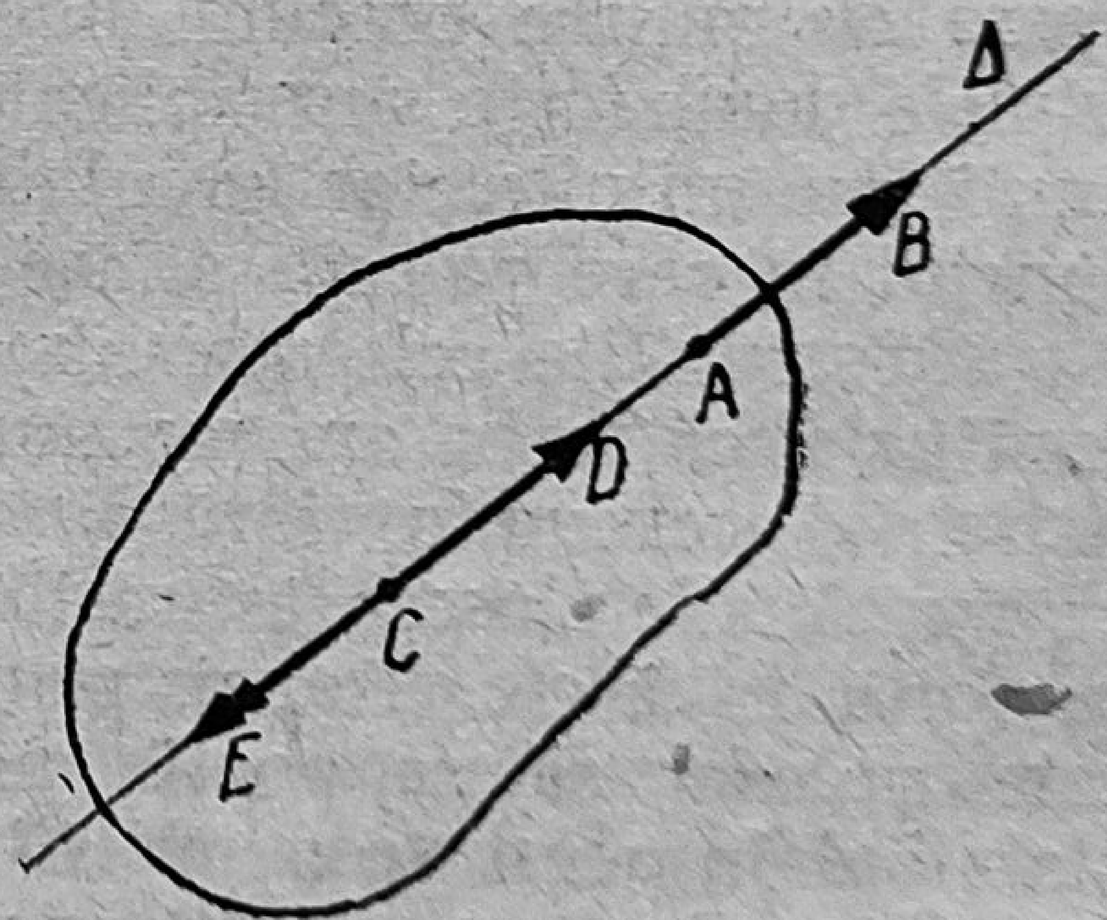


Fig. 2

Dacă două forțe acționînd de-a lungul unei drepte oarecare Δ în sens opus, asupra unuia sau mai multor puncte ale solidului (fig. 1), nu schimbă starea de repaus sau de mișcare a acestuia, atunci vom spune că acele forțe sînt în *echilibru* și forțele vor fi numite *egale ca mărime*. De aici rezultă posibilitatea de a compara forțele între ele, după mărime. Fie forța *AB* aplicată în

punctul A al solidului și fie dreapta Δ suportul acestei forțe (fig. 2). Într-un punct oarecare C al dreptei Δ să aplicăm de-a lungul dreptei două forțe opuse CD și CE, egale ca mărime cu forța AB; avem dreptul de a proceda astfel deoarece, după definiție, forțele CD și CE sînt în echilibru. Dar este evident că se poate considera după definiție că și forțele AB și CE sînt în echilibru și astfel rămîne numai o singură forță $CD=AB$, aplicată în punctul C al solidului, adică forța a fost mutată de-a lungul suportului ei, din punctul A în punctul C. De aici urmează că *în corpurile solide, punctul de aplicație al forței se poate muta în orice punct de pe suportul acestei forțe.*

Dacă punctul în care am mutat punctul de aplicație al forței de-a lungul suportului său, va fi situat în exteriorul solidului, atunci trebuie să presupunem că acest punct este legat cu solidul printr-o legătură imaginară perfect rigidă. De aceea, orice relație despre forțe aplicate asupra unui solid nu trebuie să fie în contradicție cu ipoteza că punctul de aplicație al forței, se poate deplasa în solid de-a lungul suportului forței. Dar din ipoteza că în solid forța se poate muta de-a lungul suportului ei, nu rezultă nici pe departe că prin aceasta se exclude însăși noțiunea de punct de aplicație al forței, în corpurile solide. Din contra, în fiecare caz în parte, forța are, în solide, un punct de aplicație precis. Astfel dacă ne imaginăm că doi oameni transportă o bară de care este atîrnată o găleată cu apă, atunci, în afară de greutatea proprie mai acționează asupra barei încă două forțe: de susținere cu mîinile precum și greutatea găleții cu apă; de altfel, primele două forțe sînt aplicate la capetele barei, unde bara este ținută cu mîinile, iar greutatea găleții cu apă este aplicată în punctul în care găleata atîrnă de bară.

Observațiile cele mai simple au determinat pe om să tragă concluzia că forța are nu numai direcție și sens ci și *mărime*. Astfel, de exemplu, fără a apela la mecanică, într-o discuție obișnuită se folosesc expresiile: a trage cu forță mare, a trage cu forță mică etc. Totuși, pentru cercetările științifice și tehnice, este necesar să se poată măsura cu precizie mărimea forței, stabilind în acest scop unități de măsură corespunzătoare.

Greutatea unui corp este o forță cu care venim mereu în contact. Să luăm un arc elicoidal vertical, îl fixăm la extremitatea de sus, iar la extremitatea de jos agățăm o sarcină și observăm alungirea arcului; dacă înlăturăm sarcina, arcul se contractă pînă la lungimea lui inițială. Dacă apoi, atîrnînd de arc o altă sarcină observăm că arcul s-a lungit tot atît cît s-a lungit și la

prima sarcină, înseamnă că greutățile ambelor sarcini sînt egale între ele, adică sînt egale între ele mărimile forțelor cu care acționează aceste sarcini asupra arcului. Atîrnarea concomitentă de arc a ambelor greutăți, va duce la o lungire dublă a arcului față de aceea rezultată din atîrnarea unei singure greutăți etc.

În acest fel se poate stabili în limite largi proporționalitatea dintre lungirea arcului și greutatea atîrnată. De aici rezultă posibilitatea construirii unui aparat cu ajutorul căruia să se poată măsura mărimea greutăților diferitelor sarcini, și, deci, și mărimea oricăror alte forțe care ar acționa asupra arcului aparatului. Un asemenea aparat este *dinamometrul cu arc.* Pentru ca măsurarea forțelor să se facă totdeauna și pretutindeni în același fel, trebuie să se aleagă pentru toate forțele, un același sistem de unități de măsură. Măsurătorile cu dinamometrul au dovedit că lungirea arcului sub acțiunea aceleiași greutăți se micșorează puțin cînd ne îndreptăm de la poli spre ecuatorul pămîntului, de asemenea, cînd ne înălțăm deasupra scoarței pămîntului. De aceea, ca unitate practică de forță este luată mărimea greutății unui decimetru cub de apă distilată la temperatura de 4° C, la nivelul mării și la latitudinea de 45°. Vom observa că modificarea greutății acestei cantități de apă în alte locuri de pe suprafața globului este atît de neînsemnată, încît în problemele tehnice obișnuite această diferență este neglijată. Unitatea de măsură indicată a forței este *unitatea tehnică* a forței și poartă numele de *kilogram forță.* Stabilind unitatea de forță putem construi dinamometrul gradat care ne va indica valoarea oricărei forțe în kilograme forță.

Întrucît procedeul indicat aici pentru măsurarea forței se bazează pe echilibrul dintre forța aplicată și forța care se dezvoltă în arcul întins al dinamometrului, acest mod de măsurare se numește *măsurare statică.* Să observăm că acest mod de măsurare a forțelor nu se bazează pe definiția noțiunii de forță ci numai pe unele proprietăți ale forței arătate mai sus; în adevăr, încă nu ne-am ocupat de definiția propriu-zisă a forței, limitîndu-ne numai la analiza cîtorva proprietăți ale forțelor, care se manifestă în starea de echilibru. Alt mod de măsurare a forțelor cît și legătura dintre mișcare și forță, vor fi tratate de-abia în partea a treia a acestui curs de mecanică teoretică.

§ 3. Paralelogramul și poligonul forțelor. Să presupunem că asupra unui punct material A al unui corp acționează două forțe AB și AC cum se arată în fig. 3. Se naște întrebarea: nu s-ar putea ca cele două forțe AB și AC să fie înlocuite printr-una

singură, a cărei acţiune asupra corpului să aibă un efect identic cu efectul acţiunii forţelor *AB* şi *AC*. Datorită lucrărilor lui Stevin (1548—1620) şi mai ales ale lui Varignon (1654—1722) şi Newton, a devenit clar că această problemă este totdeauna rezolvabilă şi anume unica forţă care înlocuieşte cele două forte *AB* şi *AC*, este forţa *AD* îndreptată după diagonala paralelogramului construit cu forţele *AB* şi *AC*. Această construcţie a primit denumirea de *paralelogramul forţelor*.

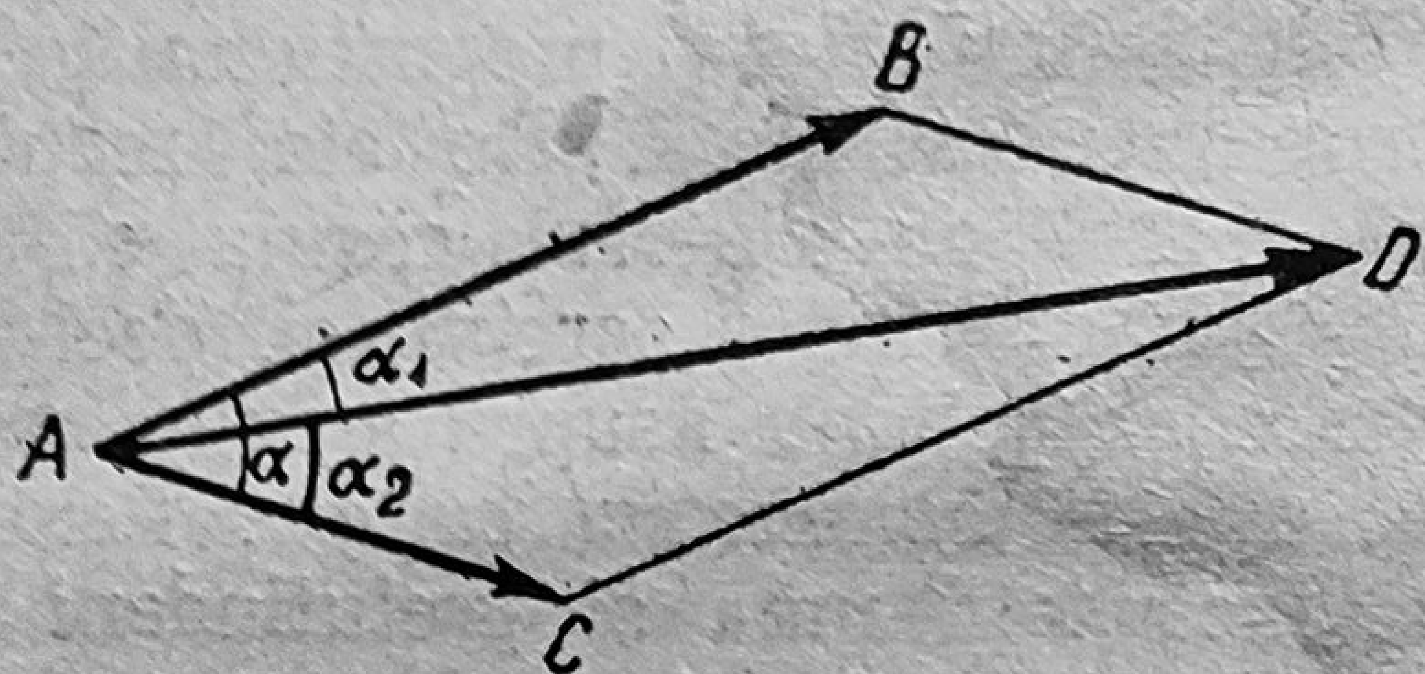


Fig. 3

Dacă unghiul dintre forţele *AB* şi *AC* este α atunci unghiul cu vîrful în punctul *B* va fi egal cu $\pi-\alpha$ şi deci vom avea:

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos(\pi-\alpha)=$$
$$=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cos\alpha. \tag{1.1}$$

Servindu-ne de formula (1.1) putem determina mărimea forţei *AD* cu ajutorul mărimilor forţelor date *AB*, *AC*, şi al unghiului α dintre ele. Din triunghiurile *ABD* şi *ACD* avem:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{BD}{AD},\quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{CD}{AD}$$

sau

$$\sin\alpha_1=\frac{AC}{AD}\sin\alpha,\quad \sin\alpha_2=\frac{AB}{AD}\sin\alpha. \tag{1.2}$$

Servindu-ne de formulele (1,2) şi cu ajutorul formulei (1.1) prin intermediul forţelor date *AB* şi *AC* şi unghiului α dintre ele, se pot determina unghiurile α_1 şi α_2 formate de forţa *AD* cu forţele *AB* şi *AC*. Este folositor a nota două cazuri frecvente:

1) dacă $\alpha=0$, atunci $AD^2=AB^2+AC^2+AB\cdot AC=(AB+AC)^2$ adică $AD=AB+AC$;

2) dacă $\alpha=\pi$, atunci $AD^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC=(AB-AC)^2$, adică $AD=|AB-AC|$, unde liniile verticale arată că trebuie să se ia valoarea absolută a diferenţei *AB*—*AC*.

De asemenea este obligatoriu ca totdeauna să avem:

$$AB+AC\geqslant AD\geqslant|AB-AC|. \tag{1.3}$$

Există multe demonstrații pur matematice a teoremei paralelogramului forțelor, dar în toate aceste demonstrații matematice, sînt totdeauna admise unele ipoteze echivalente cu regula paralelogramului. Vom accepta fără demonstrație matematică legea paralelogramului forțelor, privind-o nu ca o teoremă matematică ci ca un principiu al științelor naturii care rezultă din experiență.

În practică, verificarea aceasta se poate face în felul următor: peste scripeții *B* și *C* (fig. 4) este trecut un fir la ale cărui capete sînt atîrnate greutățile *P* și *Q*; în punctul *A* al firului este atîrnată

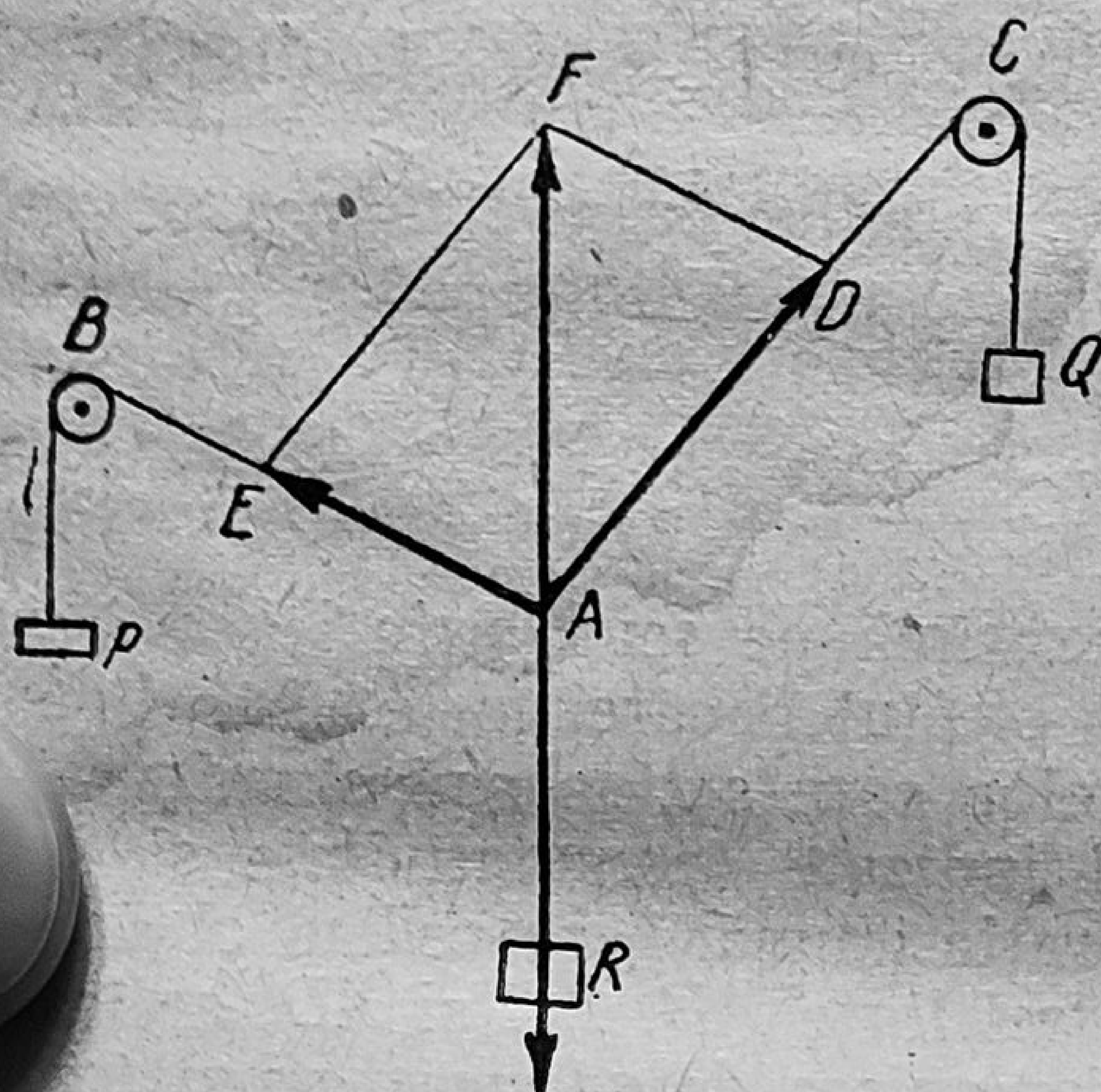


Fig. 4

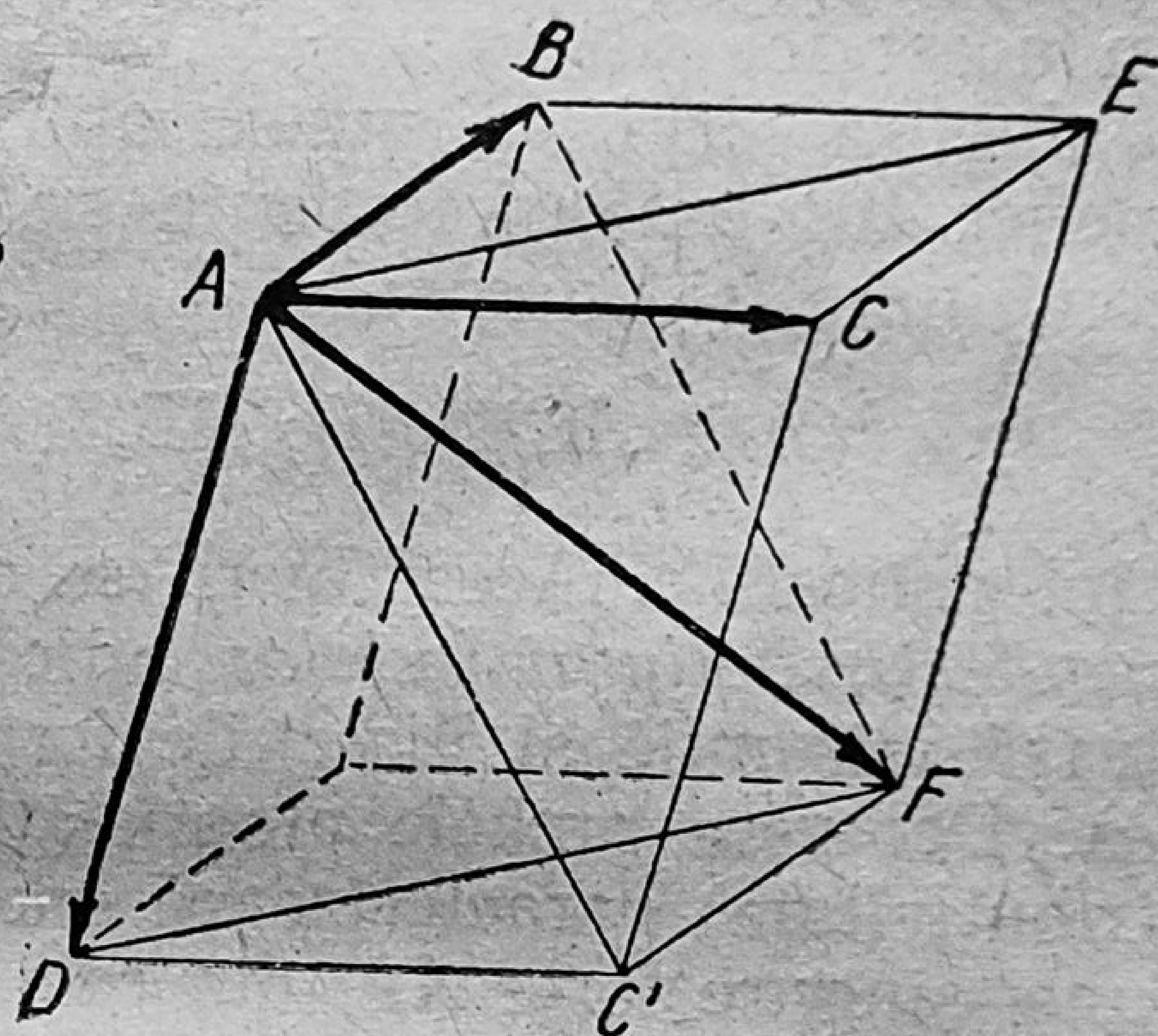


Fig. 5

o altă greutate oarecare *R*, astfel încît întregul sistem să fie în echilibru. Construind paralelogramul *ADFE*, ale cărui laturi reprezintă la o scară anumită greutățile *P* și *Q*, vom găsi că diagonala *AF* este îndreptată vertical în sus, în sens opus forței *R* și reprezintă, la scara adoptată, mărimea forței *R*. Așa și trebuie să fie; în adevăr, pentru ca punctul *A* să fie în echilibru, greutatea *R* trebuie să fie echilibrată de tensiunile din fire, egale cu greutățile *P* și *Q*, adică cele două forțe *P* și *Q* trebuie să se reducă la o singură forță egală și opusă forței *R*, această forță fiind forța *AF* avînd direcția diagonalei paralelogramului. Se neglijează greutatea firului.

Dacă asupra punctului *A* acționează de exemplu trei forțe *AB*, *AC* și *AD*, atunci ele pot fi înlocuite cu o singură forță *AF*, înlocuind inițial forțele *AB* și *AC* cu o singură forță *AE* și apoi înlocuind forțele *AE* și *AD* cu forța *AF* (fig. 5). Același rezultat se va obține compunînd forțele *AB*, *AC* și *AD* în altă ordine. De

exemplu, dacă vom lua inițial forțele AD și AC, diagonala paralelogramului construit pe ele va fi segmentul AC'; construind apoi paralelogramul cu forțele AC' și AB, vom obține aceeași forță AF. Diferitele ordine în care se pot compune aceste forțe sînt următoarele:

$$(AB, AC, AD); \quad (AB, AD, AC);$$
$$(AC, AB, AD); \quad (AC, AD, AB);$$
$$(AD, AB, AC); \quad (AD, AC, AB);$$

toate aceste șase combinații conduc la aceeași forță rezultantă AF. În acest fel cînd compunem trei forțe AB, AC, AD, și obținem o singură forță AF putem aplica regulile de permutare. De asemenea din cele precedente ne putem convinge că regulile de combinare, și anume:

$$(AB, AC), AD; \; AB, (AC, AD); \; AC, (AB, AD),$$

sînt aplicabile. Acest lucru se exprimă pe scurt prin legea *independenței acțiunii forțelor,* adică efectul fiecărei forțe, nu influențează mărimile și direcțiile forțelor care acționează simultan cu ea. Deoarece ambele proprietăți indicate (comutativitate și distributivitate) caracterizează operația adunării, procedeul obținerii unei singure forțe AF, din cele trei forțe AB, AC și AD, aplicate în punctul comun A, a primit denumirea de *adunare geometrică.*

Din fig. 5 se poate deduce ușor că forța AF este diagonala paralelipipedului construit pe cele trei forțe date AB, AC și AD; de aceea, acest procedeu de obținere a forței AF din trei forțe date se numește uneori *regula paralelipipedului.* Tot din fig. 5 se deduce că în loc de a construi întregul paralelipiped este suficient să se construiască, de exemplu, linia frîntă $ABEF$, ale cărei laturi sînt respectiv egale și paralele cu forțele date și să se închidă poligonul cu segmentul de dreaptă AF, care va reprezenta rezultatul adunării geometrice a celor trei forțe date, aplicate în punctul A. Acest procedeu de a construi forța AF se numește *regula poligonului forțelor.* Adunarea geometrică se bazează pe regula poligonului forțelor și se extinde natural asupra oricărui număr de forțe aplicate în același punct; ea se poate exprima în felul următor: *pentru a aduna geometric mai multe forțe aplicate în același punct, se va construi o linie frîntă ale cărei laturi vor fi egale și paralele cu forțele date; atunci segmentul care închide această linie frîntă va reprezenta suma geometrică a tuturor forțelor date sau forța rezultantă.* Regula

adunării geometrice al cărei caz particular este regula paralelogramului și pe baza căreia efectul rezultantei forțelor ce acționează simultan asupra unui corp material este echivalent cu efectul obținut prin aplicarea separată în același punct a forțelor componente, nu este o teoremă matematică, ci un principiu al științelor naturii care rezultă din experiență.

În mecanică trebuie rezolvată adeseori problema inversă și anume aceea a descompunerii unei forțe în mai multe forțe aplicate în același punct. Problema se rezolvă cel mai simplu prin utilizarea poligonului forțelor la care forța care trebuie descompusă va fi segmentul de închidere; dar fără condiții suplimentare orice problemă de acest fel va fi nedeterminată. De exemplu, se cere ca forța $\overline{F}$, aplicată în punctul A, să fie descompusă în două forțe. Pentru rezolvarea acestei probleme se construiește linia frîntă ABC formată din două laturi care se sprijină pe forța $\overline{F}$, după cum se arată în fig. 6; laturile AB și BC ale acestei linii frînte reprezintă cele două forțe căutate, $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$. Deoarece pe o latură dată $\overline{F}$ se pot construi o infinitate de triunghiuri ABC, problema propusă admite o infinitate de soluții. Pentru ca problema să fie determinată trebuie puse condiții suplimentare prin care se poate obține un triunghi ABC și numai unul singur. Pentru aceasta este suficient, de exemplu, de a da în afară de latura $\overline{AC}=\overline{F}$ și lungimile laturilor AB și BC. Un grad și mai mare de nedeterminare va avea problema descompunerii forței $\overline{F}$ în trei forțe aplicate în același punct, deoarece în acest caz va fi necesar să se construiască linia frîntă $ABCD$, care poate să nu fie plană (fig. 7). Problema descompunerii forței $\overline{F}$ în trei forțe devine determinată dacă, de exemplu, s-ar indica forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$

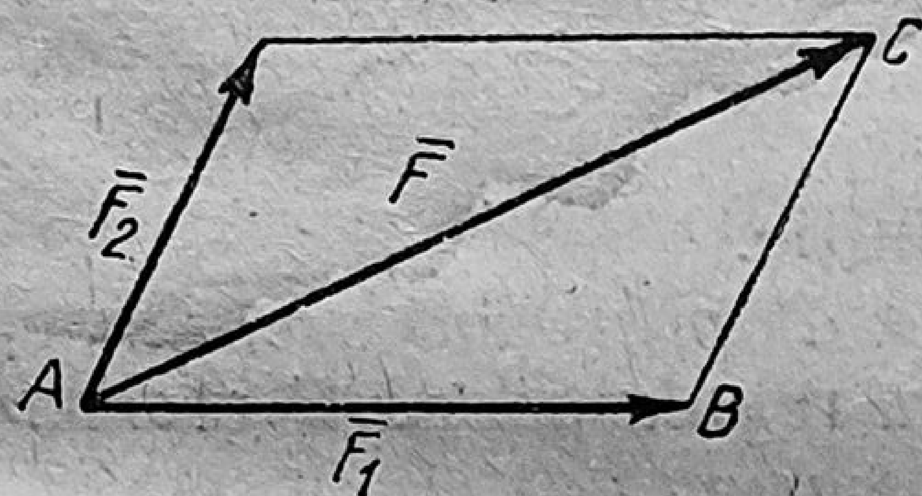


Fig. 6

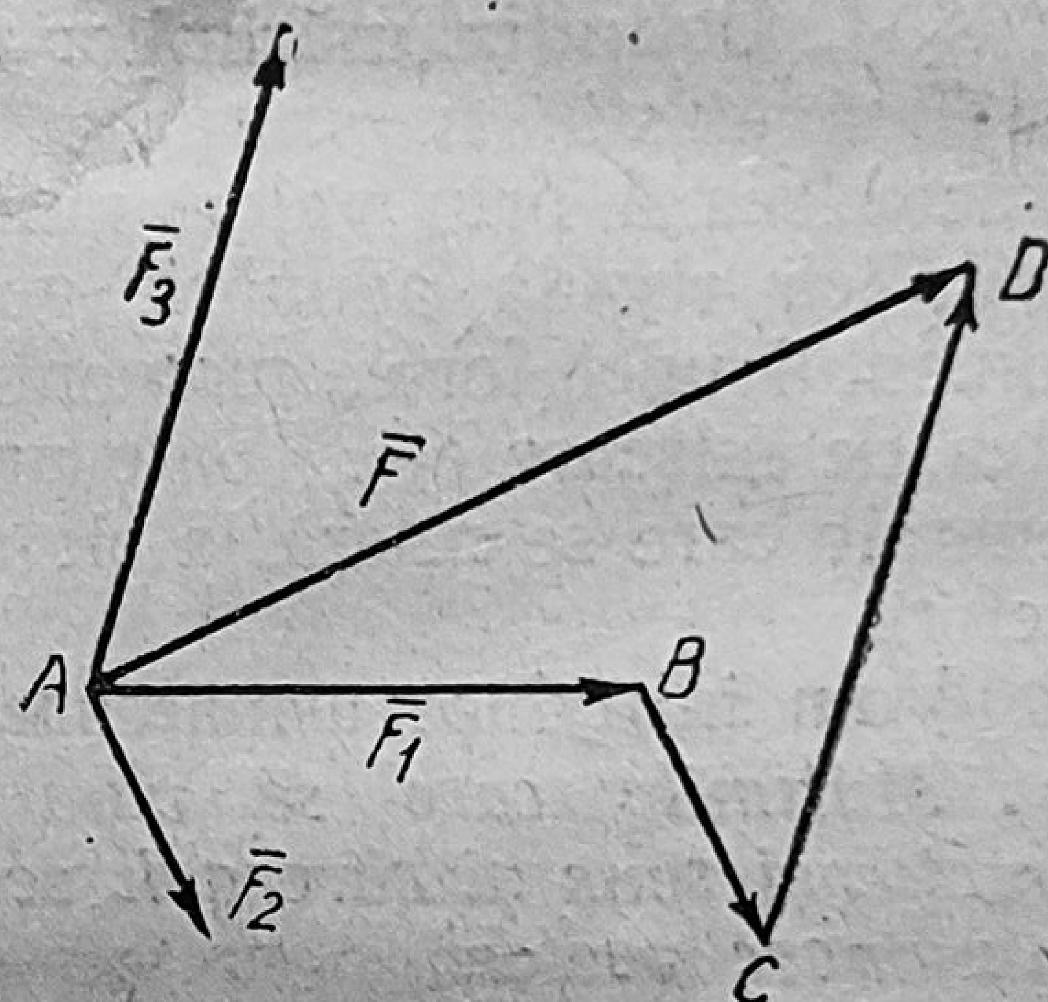


Fig. 7

ca mărime și direcție, adică laturile AB și BC ale liniei frînte $ABCD$; problema mai poate fi determinată dacă se indică direcțiile celor trei forțe $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ și $\overline{F_3}$, deoarece atunci problema revine la construirea paralelipipedului cu o diagonală dată, fiind cunoscute muchiile lui.

Din cele expuse, urmează că forțele sînt cantități caracterizate prin mărime, direcție și sens și cărora li se aplică regula adunării geometrice.

§ 4. Definiția mărimilor scalare și vectoriale. În mecanica teoretică există, în afară de forțe, multe alte mărimi care se caracterizează prin valori numerice, direcție și sens și cărora li se aplică regula adunării geometrice; astfel sînt, de exemplu, momentul unei forțe, momentul cuplului de forțe, viteza, cantitatea de mișcare etc. Toate proprietățile lor comune și teoremele generale care se referă la ele fac parte din teoria generală despre vectori.

Vom introduce următoarea definiție:

Mărimile care se caracterizează prin valoare numerică, direcție și sens și cărora li se aplică regula adunării geometrice, se numesc vectori.

Pentru ca o mărime să fie vector, ultima condție este obligatorie; astfel, de exemplu, mai departe la § 93, se va vedea că rotațiile finite pot fi reprezentate prin segmente care au lungime și direcție. Totuși, aceste segmente nu sînt vectori deoarece la adunarea rotațiilor finite, suma lor se schimbă dacă se modifică ordinea termenilor, adică adunarea lor nu este o adunare geometrică. Dimpotrivă forțele sînt vectori, deoarece s-a văzut în § 2 și 3, că forțele se caracterizează prin mărime, direcție și sens și lor li se aplică regula adunării geometrice. Mai jos se va demonstra că momentul forței, viteza liniară, accelerația liniară, viteza unghiulară etc. sînt de asemenea vectori. Vom reprezenta vectorii prin segmente de dreaptă cu săgeți la capete, săgeți care indică sensul vectorului (fig. 8). Vom observa din definiția vectorului dată mai sus că deplasarea vectorului, paralel cu el însuși, dintr-un punct din spațiu în alt punct, nu creează în general un nou vector; astfel segmentele din fig. 9 reprezintă, în general, unul și același vector. Totuși, există vectori a căror mutare este mai mult sau mai puțin limitată. Pentru a specifica că vectorul considerat poate fi transportat paralel cu el însuși, în orice punct din spațiu, acest fel de vector se numește *vector liber*. Cu vectorii se pot efectua operații algebrice, diferențiale și integrale; regulile

corespunzătoare lor se studiază în *calculul vectorial*. În cursul de față regulile operațiilor cu vectorii se vor expune acolo unde va fi necesar pentru înțelegerea anumitor paragrafe.

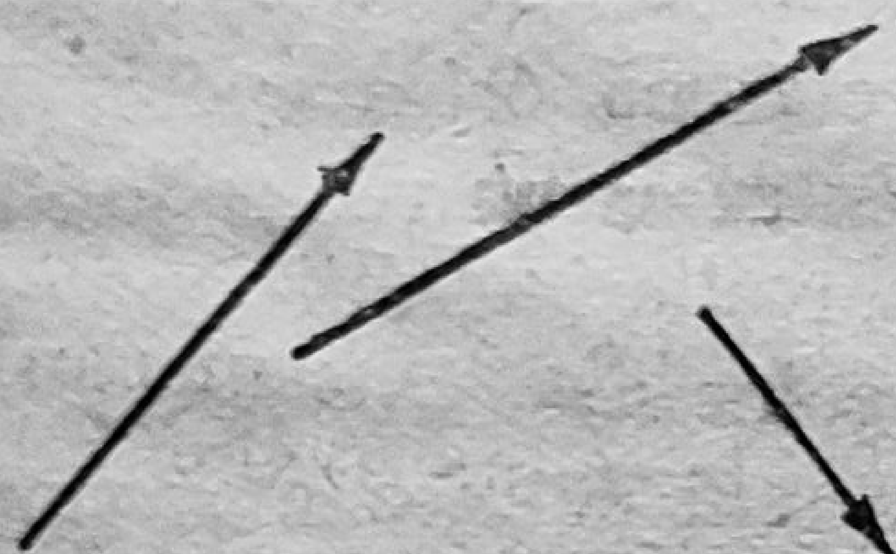


Fig. 8

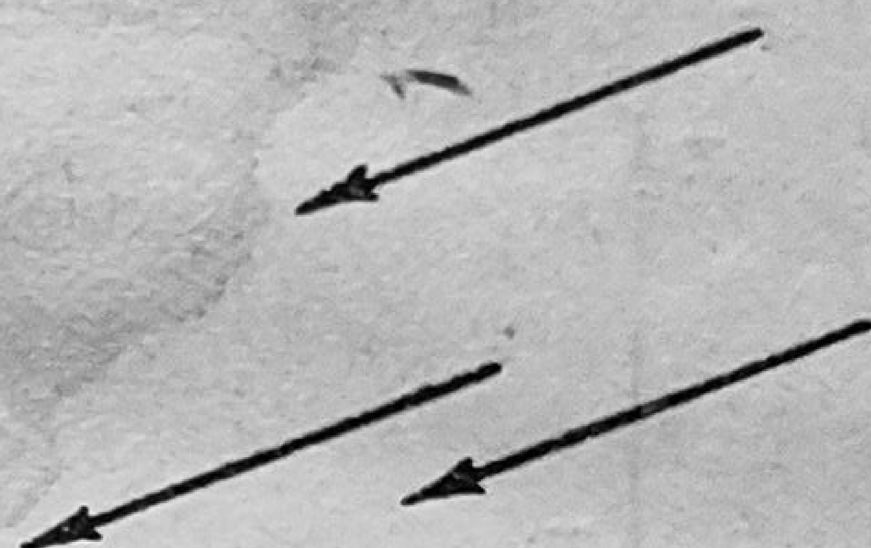


Fig. 9

Orice mărimi caracterizate numai prin valoarea lor numerică proprie se numesc *scalari*, sau *mărimi scalare*. De exemplu, temperatura și tensiunea electrică etc. sînt mărimi scalare.

Vom nota vectorii fie cu o literă $\overline{a}$, $\overline{F}$, $\overline{g}$ etc., fie cu două litere barate $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, . . . , prima literă A, C, . . . reprezentînd originea B, D, . . . iar a doua extremitatea vectorului.

Se poate lua în considerare numai mărimea vectorului fără a ține seamă de orientarea lui; exprimată într-o anumită unitate

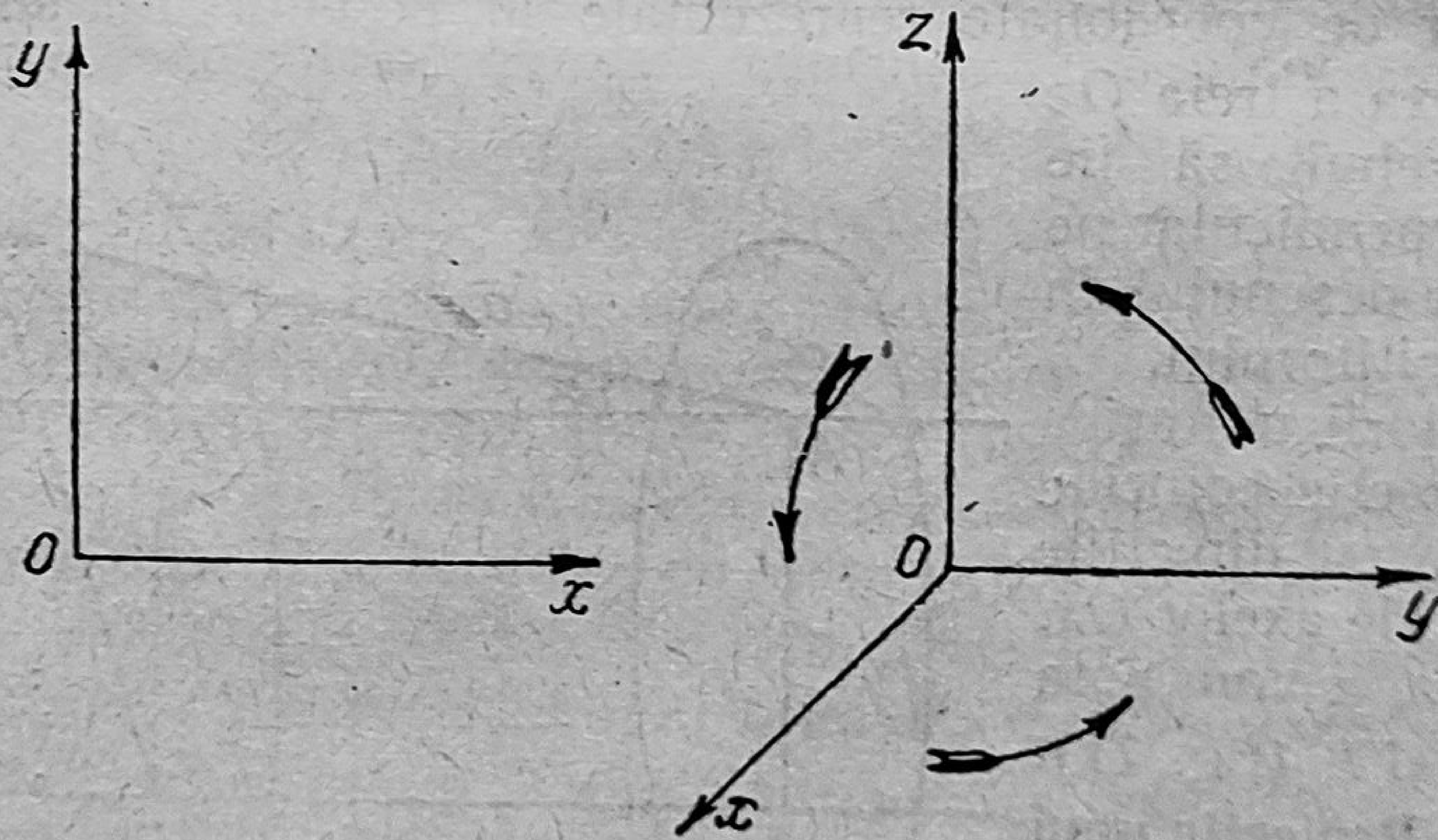


Fig. 10

de măsură, ea va fi reprezentată printr-un număr aritmetic și va fi o mărime scalară; vom numi *modul* mărimea vectorului și vom nota modulul vectorului cu aceeași literă ca și vectorul, dar încadrat cu linii verticale sau prin aceeași literă nebarată. În

acest fel vectorul $\overline{a}$ are modulul $|a|$ sau a. Vectorul a cărui mărime este egală cu unitatea va fi numit *vector unitar* sau *versor* și îl vom nota cu litere barate, cu un zero mic în dreapta literei, în partea de sus. De exemplu, vectorul unitar avînd direcția vectorului $\overline{a}$, se va nota cu $\overline{a}^0$. Este clar că orice vector poate fi reprezentat ca un vector unitar de aceeași direcție înmulțit cu modulul acestui vector $\overline{F}=\overline{F}^0F=F\overline{F}^0$.

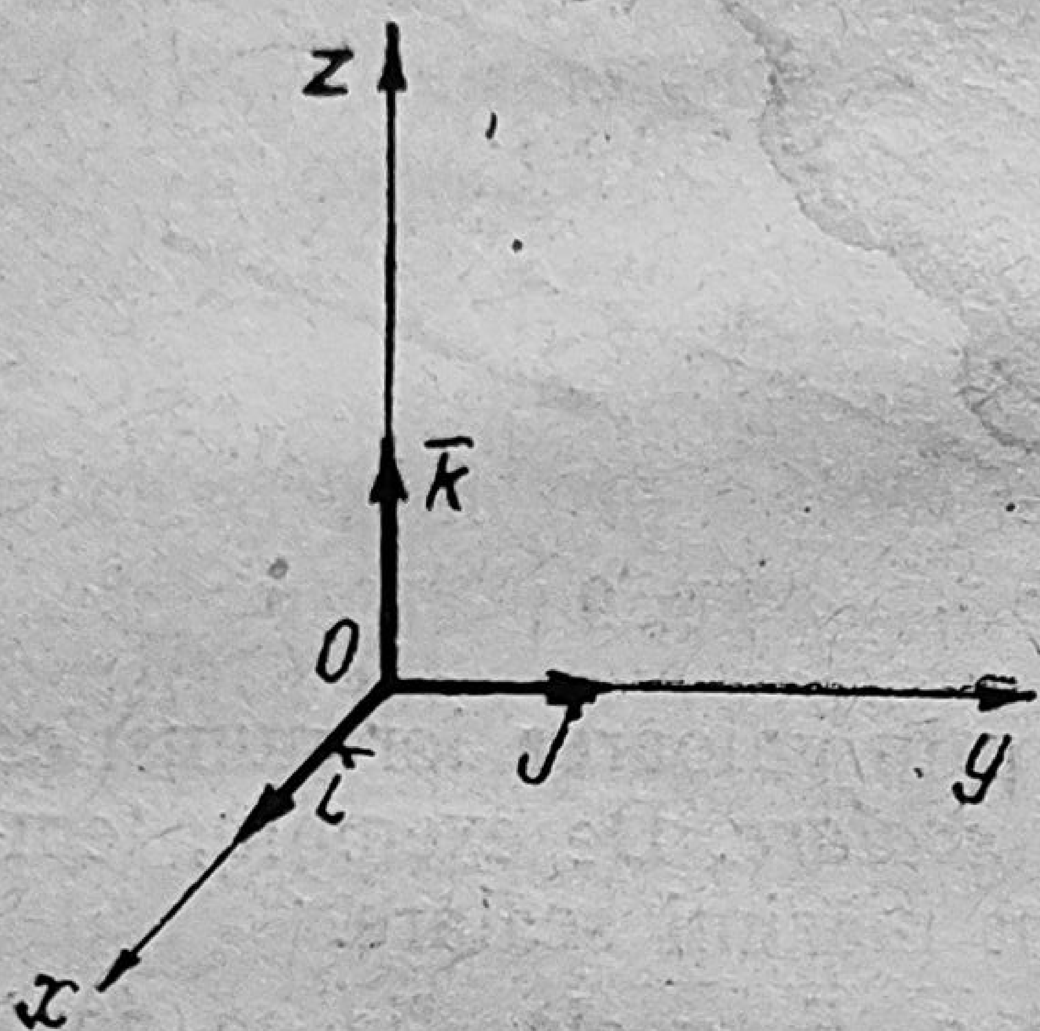


Fig. 11

În cursul de mecanică vom folosi continuu axele de coordonate. Acest sistem de axe de coordonate va fi în general un sistem de axe de coordonate ortogonale, dispuse așa cum se arată în fig. 10. Dacă vom conveni că sensul pozitiv de rotație în jurul direcției pozitive a axei este acela contrar acelor de ceasornic, atunci în al doilea desen din fig. 10, vedem că rotirea pozitivă în jurul axei Oz, mută axa Ox în axa Oy, așa cum se indică în desen prin săgeată, ș.a.m.d. prin permutări circulare; pentru sistemul plan al axelor de coordonate reprezentate în desenul din stînga al fig. 10, axa a treia Oz ar fi trebuit să fie trasă perpendicular pe suprafața desenului, în direcția cititorului.

Vectorii unitari a căror direcție coincide respectiv cu direcțiile pozitive ale axelor Ox, Oy și Oz, îi vom nota prin $\overline{i}$ $\overline{j}$ și $\overline{k}$ (fig. 11).

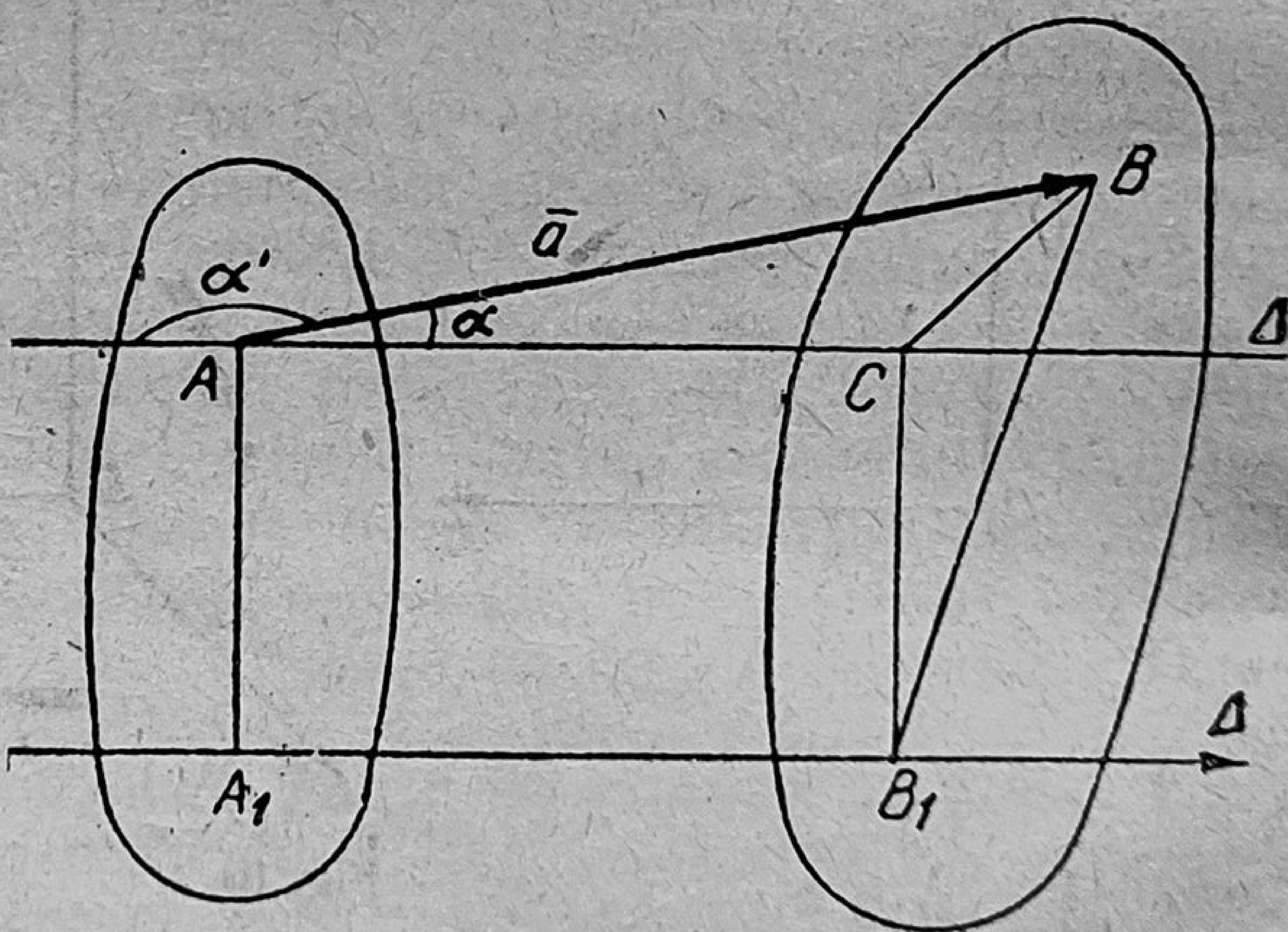


Fig. 12

§ 5. Proiecția unui vector pe o axă. Să considerăm un vector oarecare $\overline{a}$ și o dreaptă infinită Δ; vom lua unul din cele două sensuri ale acestei drepte ca pozitiv și vom lua dreapta Δ ca axă (fig. 12). Fie vectorul $\overline{a}=\overline{AB}$. Să ducem prin

originea A și prin extremitatea B a vectorului $\overline{AB}$ două plane perpendiculare pe axa Δ. Acesle plane vor tăia pe axa Δ segmentul A_1B_1. Dacă sensul de la A_1 spre B_1 coincide cu sensul pozitiv al axei Δ, atunci vom considera segmentul A_1B_1 ca pozitiv; dacă însă sensul de la A_1 spre B_1 este contrar sensului pozitiv al axei Δ atunci vom considera segmentul A_1B_1 ca negativ. Astfel, lungimea segmentului A_1B_1 în condițiile arătate mai sus, se poate reprezenta totdeauna printr-un *număr algebric*. Este clar că se mai poate obține segmentul A_1B_1, coborînd din originea A și extremitatea B a vectorului $\overline{AB}$, perpendicularele AA_1 și BB_1 pe axa Δ. Lungimea acestui segment A_1B_1 considerată ca număr algebric se numește *proiecția vectorului* $\overline{AB}$ pe axa Δ. Astfel vom ajunge la următoarea definiție:

Proiecția unui vector pe o axă oarecare este egală ca modul, cu lungimea segmentului de pe axă cuprins între perpendicularele coborîte din extremitățile vectorului pe acea axă; semnul proiecției este pozitiv dacă orientarea segmentului coincide cu aceea a axei și negativ în cazul contrar.

Nu este greu de arătat cum se calculează proiecția vectorului pe o axă. Ducem prin punctul A dreapta Δ' paralelă cu axa Δ (fig. 12); această dreaptă va întretăia planul ce trece prin punctul B și este perpendicular pe axa Δ, într-un punct C. După proprietățile segmentelor paralele cuprinse între plane paralele, avem:

$$AC = A_1B_1.$$

Observăm că nu este necesar ca vectorul $\overline{AB}$ și axa Δ să fie coplanare. Din triunghiul dreptunghi ACB, cu unghiul drept în punctul C avem $AC = AB \cos \alpha$, unde în cazul din fig. 12 unghiul α este ascuțit. În acest fel obținem proiecția $A_1B_1 = AB \cos \alpha$ semnul proiecției depinzînd de unghiul α. Dacă direcția pozitivă a axei Δ ar fi opusă, atunci unghiul dintre vectorul $\overline{AB}$ și direcția pozitivă a axei Δ ar fi egal cu α'; în acest caz proiecția vectorului $\overline{AB}$ pe axa Δ ar fi egală cu $-A_1B_1$, deoarece:

$$AB \cos \alpha' = -AB \cos \alpha = -AC = -A_1B_1.$$

Astfel se ajunge la următoarea regulă:

Pentru a obține proiecția unui vector pe o axă, se va înmulți modulul vectorului cu cosinusul unghiului format de direcția acelui vector cu direcția axei, după sensul pozitiv.

Aceeaşi regulă se mai poate exprima şi astfel:

Pentru a obține proiecția unui vector pe o axă, se va înmulți modulul acelui vector cu cosinusul unghiului ascuțit format de vector şi axă şi se va lua rezultatul cu semnul plus, dacă direcția vectorului formează un unghi ascuțit cu sensul pozitiv al axei; iar dacă direcția vectorului formează cu sensul pozitiv al axei un unghi obtuz, rezultatul se va lua cu semnul minus.

Deosebit de important este cazul proiecției vectorului pe axele ortogonale *Oxyz*. Vom nota proiecția vectorului $\overline{a}$ pe axele *Ox*, *Oy* şi *Oz* respectiv prin a_x, a_y, a_z. Fie un vector oarecare $\overline{AB}=\overline{a}$. Ducem din punctul *A* semidrepte paralele cu axele de coordonate în sensurile pozitive ale axelor şi notăm cu α, β, γ unghiurile vectorului $\overline{AB}$ formate cu aceste semidrepte; este clar că unghiurile α, β, γ sînt unghiuri formate de vectorul $\overline{AB}$ cu axele *Ox*, *Oy*, *Oz* (fig. 13). De asemenea este clar că, dacă vreunul din unghiurile α, β, γ va fi ascuțit sau obtuz, în toate cazurile muchiile paralelipipedului dreptunghi *ACKDBE* vor fi egale cu valoarea absolută a proiecției vectorului $\overline{a}$ pe axele de coordonate. Astfel vom obține:

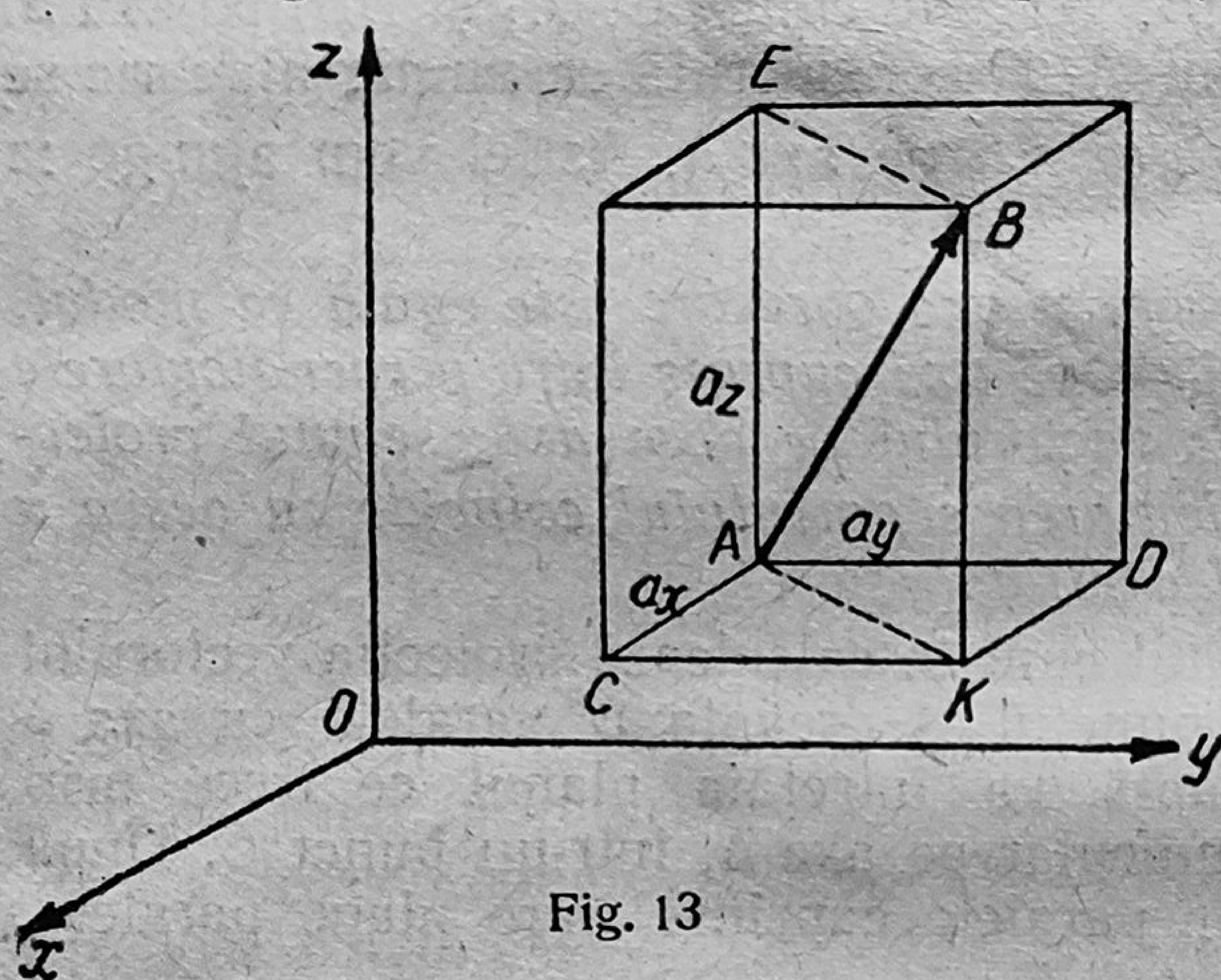


Fig. 13

$$\left.\begin{aligned} a_x&=a\cos\alpha,\\ a_y&=a\cos\beta,\\ a_z&=a\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

de unde:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{a_x}{a},\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{a},\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Deoarece modulul a este prin definiţie pozitiv şi proiecţiile a_x, a_y, a_z sînt mărimi algebrice, din formulele (1.5) se obţin cosinuşii unghiurilor vectorului cu axele coordonatelor, inclusiv semnul.

Dar pătratul diagonalei paralelipipedului dreptunghi este egal cu suma pătratelor muchiilor lui, şi deci, avem:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

sau

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{1.6}$$

unde radicalul urmează să fie luat cu semnul pozitiv. Astfel rezultă că:

Modulul unui vector este egal cu valoarea absolută a rădăcinii pătrate din suma pătratelor proiecţiilor vectorului pe axele ortogonale de coordonate.

Din relaţiile (1.5) şi ţinînd seama de egalităţile (1.6), vom avea:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{1.7}$$

adică: *suma pătratelor cosinuşilor unghiurilor formate de vector cu cele trei axe ortogonale este egală cu 1.*

§ 6. Adunarea şi scăderea vectorilor. Conform definiţiei vectorilor dată la § 4, pentru vectori trebuie să se folosească regula adunării geometrice, care s-a dat pentru forţe. De aceea definirea reciprocă a operaţiei adunării vectorilor din definirea aceleiaşi operaţii pentru forţe (§ 3) ne duce la următoarea definiţie:

Dacă vom duce o linie frîntă astfel ca prima ei latură să fie egală şi paralelă cu primul vector, a doua latură a ei să aibă originea la extremitatea primei laturi a liniei frînte şi să fie egală şi paralelă cu cel de-al doilea vector etc., atunci segmentul care îşi are originea în originea acestei linii frînte şi extremitatea la extremitatea ei, este suma geometrică a vectorilor daţi, iar operaţia obţinerii sumei geometrice se numeşte adunare geometrică.

Am văzut mai sus în § 3 al acestui capitol, că această operaţie se poate numi adunare deoarece i se aplică regulile adunării (de comutativitate şi asociativitate) şi deoarece ea are ca rezultat tot un vector, adică o mărime cu aceeaşi dimensiune.

Adunarea geometrică se notează în modul următor:

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \cdots = \sum_n \bar{a}_n. \tag{1.8}$$

Vectorii $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ $\bar{a}_3$, ... se numesc *termenii sumei geometrice sau vectorii componenți,* iar vectorul $\bar{a}$ este numit *sumă geome-*

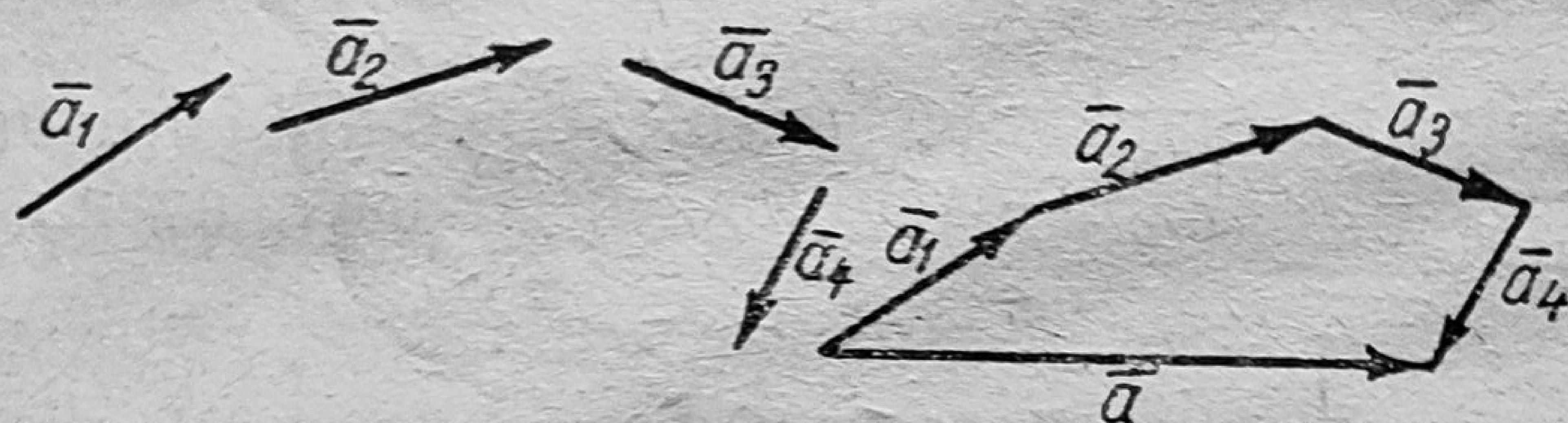


Fig. 14

trică sau vector rezultant. Fig. 14 reprezintă un caz de adunare geometrică a patru vectori $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$. Dacă originea și extremitatea liniei frînte coincid, atunci vom avea $\bar{a}=0$. Pentru trei vectori $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ egalitatea $\bar{a}=0$ este posibilă numai în cazul cînd cei trei vectori formează un triunghi (fig. 15). Deoarece triunghiul este o figură plană, se deduce că *suma a trei vectori poate fi egală cu zero numai în cazul cînd toți vectorii sînt sau în același plan sau pot fi mutați paralel cu ei înșiși într-un același plan.*

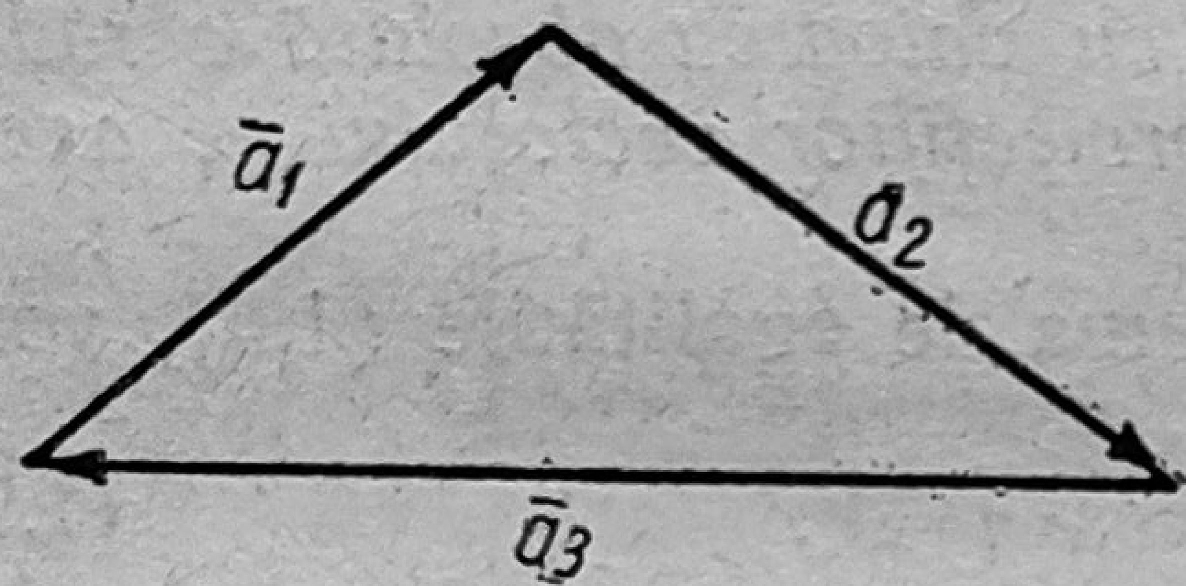


Fig. 15

Este evident că regula paralelogramului este un caz particular a regulii generale a adunării vectorilor.

Deoarece linia dreaptă este drumul cel mai scurt dintre două puncte, este evident că:

$$a \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

semnul egalității avînd loc numai în cazul cînd toți vectorii $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, ... vor fi paraleli între ei și îndreptați în același sens.

Următoarea reprezentare a vectorilor prin vectori unitari se va întîlni continuu în tot parcursul acestui curs de mecanică.

Să considerăm fig. 13. Găsim:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CK} + \overline{KB} = \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE}.$$

Deoarece $AC = a_x$, $AD = a_y$, $AE = a_z$, introducînd vectorii unitari $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ vom obține:

$$\overline{AC} = \bar{i}a_x, \quad \overline{AD} = \bar{j}a_y, \quad \overline{AE} = \bar{k}a_z,$$

adică

$$\bar{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z. \qquad (1.9)$$

Să calculăm, spre exemplu, suma geometrică sau vectorul rezultant $\overline{a}$, a patru vectori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ și $\overline{a}_4$ și s-o proiectăm pe o axă oarecare Δ (fig. 16). Deoarece proiecția vectorului $\overline{a}$ este egală cu A_1E_1, vom avea:

$$A_1E_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 - E_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1,$$

deci:

Proiecția vectorului rezultant pe o axă oarecare este egală cu suma algebrică a proiecțiilor vectorilor componenți pe aceeași axă.

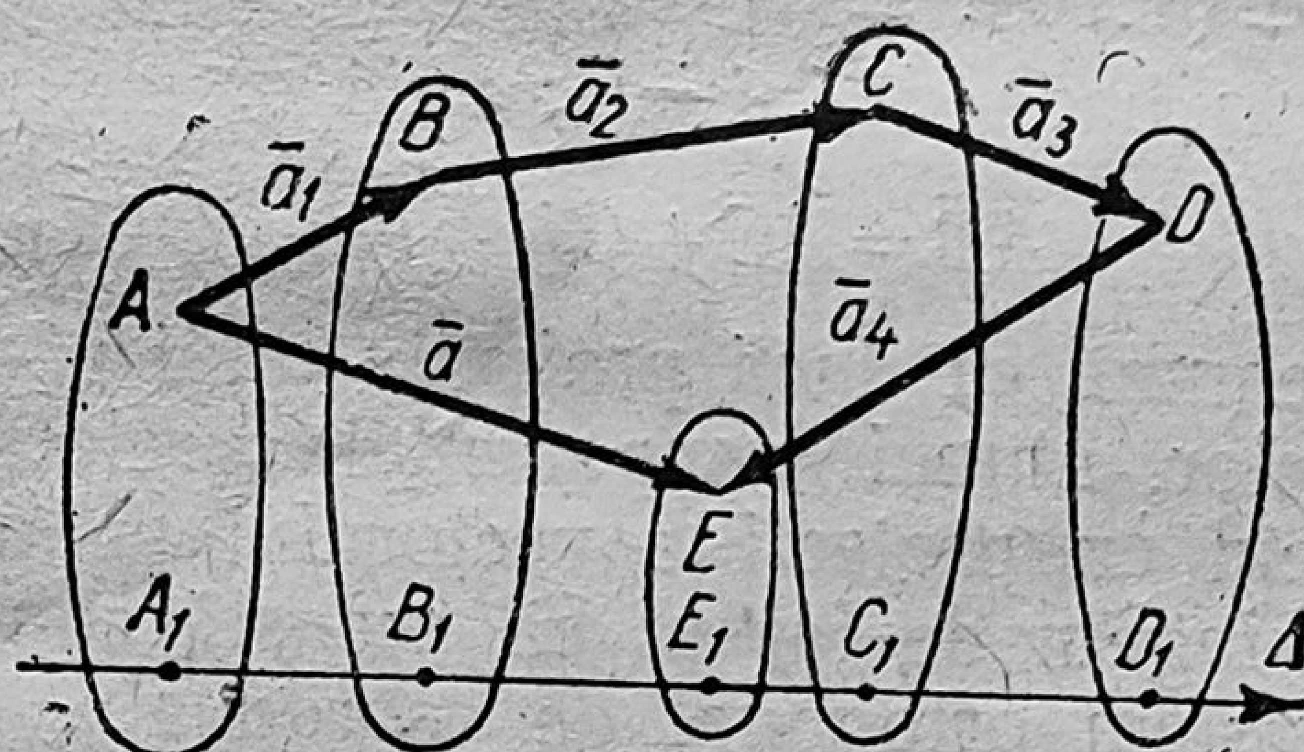


Fig. 16

Luăm ca axă Δ succesiv axele de coordonate Ox, Oy și Oz al sistemului de axe de coordonate ortogonale $Oxyz$; atunci din formulele (1.8) și ținînd seamă de regula precedentă vom obține:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + a_{4x} + \cdots = \sum_n a_{nx}, \\ a_y &= a_{1y} + a_{2y} + a_{3y} + a_{4y} + \cdots = \sum_n a_{ny}, \\ a_z &= a_{1z} + a_{2z} - a_{3z} + a_{4z} + \cdots = \sum_n a_{nz}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

Aplicînd formula (1.6) vom obține:

$$a = \sqrt{\left(\sum_n a_{nx}\right)^2 + \left(\sum_n a_{ny}\right)^2 + \left(\sum_n a_{nz}\right)^2}. \qquad (1.11)$$

Formulele (1.10) se mai pot obține și în modul următor. Avem

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \overline{i}a_x + \overline{j}a_y + \overline{k}a_z, \\ \overline{a}_1 &= \overline{i}a_{1x} + \overline{j}a_{1y} + \overline{k}a_{1z}, \\ \overline{a}_2 &= \overline{i}a_{2x} + \overline{j}a_{2y} + \overline{k}a_{2z}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

de unde

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \cdots = \overline{i}a_{1x} + \overline{j}a_{1y} + \overline{k}a_{1z} + \overline{i}a_{2x} + \overline{j}a_{2y} + \overline{k}a_{2z} + \cdots.$$

Deoarece vectorii $\bar{i}a_{1x}$, $\bar{i}a_{2x}$ . . . sînt paraleli între ei, fiind dispuși de-a lungul unei drepte și anume a axei Ox, putem aduna algebric proiecțiile a_{1x}, a_{2x} . . . prin urmare:

$$\bar{i}a_{1x}+\bar{i}a_{2x}+\cdots=\bar{i}(a_{1x}+a_{2x}+\cdots).$$

Deci, vom obține:

$$\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z=\bar{i}(a_{1x}+a_{2x}+\cdots)+\bar{j}(a_{1y}+a_{2y}+\cdots)+\bar{k}(a_{1z}+a_{2z}+\cdots).$$

De aici egalînd între ei vectorii cu aceleași direcții vom reveni la formulele (1.10).

Din fig. 13 în baza definiției sumei geometrice avem:

$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CK}+\overline{KB}.$$

Aceasta înseamnă că dacă proiecția unui vector pe o axă se consideră ca vector, atunci componentele vectorului pe trei axe ortogonale coincid cu proiecțiile vectorului pe aceste axe. Este ușor să ne convingem de faptul că această coincidență are loc numai într-un sistem ortogonal de coordonate, în general însă *proiecția unui vector pe o axă și componenta vectorului după această axă — sînt cantități diferite.*

În adevăr, fie, de exemplu, două forțe $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ aplicate în punctul O care formează între ele unghiul α și au rezultanta $\bar{F}$. Pentru a obține această rezultantă, forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ trebuie compuse după regula paralelogramului, a cărui diagonală va reprezenta rezultanta $\bar{F}$. Dacă unghiul α este ascuțit rezultă evident că proiecțiile rezultantei pe direcțiile componentelor vor fi mai mari decît aceste componente; dacă însă unghiul α este obtuz, aceste proiecții vor fi mai mici decît componentele respective, putînd surveni și cazul cînd una din proiecții, deși mai mare în valoare absolută decît componenta, va fi dirijată în sens opus acestei componente. Dacă însă unghiul α va fi drept, atunci proiecțiile rezultantei vor coincide atît ca mărime, cît și ca sens cu componentele, ceea ce și confirmă ipoteza emisă mai înainte.

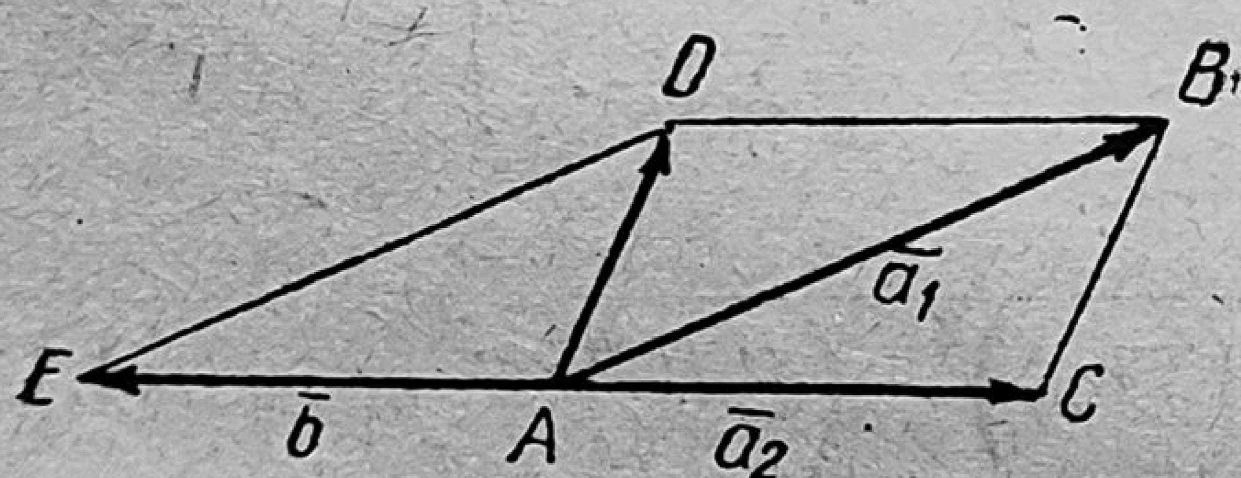


Fig. 17

Definind adunarea geometrică a vectorilor nu este greu de definit și scăderea geometrică a vectorilor ca operație inversă adunării. Să presupunem că se cere să se efectueze scăderea vec-

torilor $\overline{a}_1 - \overline{a}_2$. Construim vectorul $\overline{b}$, opus vectorului $\overline{a}_2$, adică vectorul care are același modul și aceeași direcție dar sens opus și anume, dacă $\overline{a}_2 = \overline{AC}$, atunci vom lua $\overline{b} = \overline{AE}$, unde $AE = AC$ (fig. 17). Vom dovedi că dacă $\overline{a}_1 = \overline{AB}$, atunci

$$\overline{AD} = \overline{a}_1 + \overline{b} = \overline{a}_1 - \overline{a}_2,$$

adică vectorul $\overline{AD}$ reprezintă diferența căutată a vectorilor $\overline{a}_1$ și $\overline{a}_2$. Ca să demonstrăm aceasta ne bazăm pe faptul că scăderea este operația inversă adunării adică suma dintre diferență și scăzător trebuie să ne dea pe descăzut; trebuie deci să avem:

$$\overline{AD} + \overline{AC} = \overline{AB};$$

din fig. 17 se deduce că ultima egalitate are în adevăr loc. Astfel definită, scăderea este corectă și noi obținem modul de reprezentare al unui vector opus unui vector dat cu ajutorul schimbării semnului vectorului dat. Prin urmare, dacă avem expresia

$$\overline{a}_1 - \overline{a}_2 + \overline{a}_3 - \overline{a}_4 - \overline{a}_5 + \ldots$$

ea poate fi reprezentată sub forma

$$\overline{a}_1 + (-\overline{a}_2) + \overline{a}_3 + (-\overline{a}_4) + (-\overline{a}_5) + \ldots,$$

adică se poate reduce operația de scădere la aceea de adunare a vectorilor înlocuind vectorii care se scad $\overline{a}_2$, $\overline{a}_4$, $\overline{a}_5$, prin vectorii de sens contrar $-\overline{a}_2$, $-\overline{a}_4$, $-\overline{a}_5$.

Este ușor de văzut că folosind reprezentarea vectorilor după formula (1.9) vom reduce ușor scăderea vectorilor la scăderea proiecțiilor lor.

§ 7. Reprezentarea vectorială și analitică a forțelor. În § 4 ne-am ocupat de vectorul liber, care se poate deplasa paralel cu el însuși, fixînd originea lui în orice punct din spațiu. În ceea ce privește forța, am văzut în § 2 că într-un solid absolut rigid, forța poate fi mutată dar numai în lungul suportului ei; vom afla în capitolele următoare ale cursului de statică (§ 39), că deplasarea forței paralel cu ea însăși (translația) este imposibilă fără a adăuga forțe suplimentare. Celelalte definiții și teoreme date, din teoria vectorilor, pot fi însă extinse direct și asupra forțelor. De aceea, o dată cu vectorii liberi, vom studia și acei vectori a căror deplasare paralelă cu ei înșiși este restrînsă și anume vom studia vectorii care pot să alunece numai de-a lungul suportului lor ca și forțele aplicate asupra unui solid. Acest fel

de vectori poartă denumirea de *vectori alunecători (vectori glisanți)*. Din această definiție rezultă că: *o forță aplicată unui solid rigid, este un vector alunecător.*

Deoarece într-un solid absolut rigid forța este un vector alunecător, iar exemplul cel mai simplu de vector este segmentul de dreaptă, vom reprezenta ca în § 2 fiecare forță, aplicată unui solid absolut rigid, cu un segment de dreaptă (cu săgeată) avînd aceeași direcție și același sens cu forța; lungimea acestui segment o vom lua la o anumită scară, egală cu modulul vectorului forță reprezentat. Acest segment cu săgeată poate fi deplasat în lungul dreptei care coincide cu direcția segmentului, în orice punct al acestei drepte.

Pretutindeni în această carte vom nota vectorul forță prin $\overline{F}$. Dacă însă vom avea nu o singură forță ci mai multe, atunci la notarea fiecărei forțe vom adăuga literei $\overline{F}$ un indice corespunzător forței studiate. Pentru reprezentarea rezultantei cîtorva forțe, ne vom folosi ca pentru o singură forță de litera $\overline{F}$, fără indice. Astfel, de exemplu, dacă în punctul A al corpului sînt aplicate cîteva forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ..., atunci rezultanta o vom nota prin $\overline{F}$, deci vom avea:

$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\cdots=\sum_n \overline{F}_n. \qquad (1.12)$$

Deoarece forța nu poate fi mutată în afara suportului ei, pentru determinarea completă a forței, este necesar să se indice o dată cu mărimea forței și suportul ei, și anume este suficient să se indice un punct oarecare al suportului. Vom introduce un nou tip de vector creat prin deplasarea rectilinie dintr-un punct în altul. Fie date două puncte A și B; este clar că deplasarea rectilinie $\overline{AB}$ din punctul A în punctul B are modul, direcție și sens. Nu este greu de văzut de asemenea că și deplasările se compun după legea adunării geometrice, deoarece vom avea $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, adică deplasarea în lungul liniei frînte ABC se poate înlocui prin deplasarea rectilinie $\overline{AC}$; este evident că toate proprietățile adunării geometrice expuse la § 3 sînt aplicabile și la adunarea deplasărilor rectilinii. Astfel, deplasarea rectilinie este în adevăr un vector. Să considerăm un punct oarecare O în spațiu și să notăm pozițiile celorlalte puncte din spațiu prin deplasările rectilinii care trebuie efectuate pentru a trece din punctul O în punctele considerate. Prin urmare ajungem la un nou tip de vectori cu originea dată; astfel de vectori se numesc

vectori legați. Originea vectorului legat nu se poate muta în alt punct al spațiului. In mecanica teoretică vom avea de-a face cu toate cele trei tipuri de vectori: vectori liberi, alunecători și legați. Pentru a putea indica suportul forței vom lua pe acest suport un punct oarecare A pe care îl vom uni cu un punct oarecare din spațiu O, prin vectorul $\overline{OA}=\overline{r}$. Cunoscînd vectorii $\overline{F}$ și $\overline{r}$, vom cunoaște precis forța. Pentru mai multe forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$, ... vom avea vectorii $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$, ...

Să examinăm acum sistemul fix de axe de coordonate ortogonale $Oxyz$ cu originea într-un punct oarecare din spațiu O. Vom nota proiecțiile vectorului forței $\overline{F}$ pe coordonatele $Oxyz$ prin X, Y, Z; deci după formula (1.9), vom avea:

$$\overline{F}=\overline{i}X+\overline{j}Y=\overline{k}Z. \tag{1.13}$$

In cazul mai multor forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... după aceeași formulă (1.9), obținem:

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}_1&=\overline{i}X_1+\overline{j}Y_1+\overline{k}Z_1,\\ \overline{F}_2&=\overline{i}X_2+\overline{j}Y_2+\overline{k}Z_2,\\ \overline{F}_3&=\overline{i}X_3+\overline{j}Y_3+\overline{k}Z_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Notînd coordonatele punctului A în raport cu axele $Oxyz$ prin x, y, z, avem:

$$\overline{r}=\overline{i}x+\overline{j}y+\overline{k}z, \tag{1.15}$$

și pentru vectorii $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$, ... prin analogie avem:

$$\left.\begin{aligned} \overline{r}_1&=\overline{i}x_1+\overline{j}y_1+\overline{k}z_1,\\ \overline{r}_2&=\overline{i}x_2+\overline{j}y_2+\overline{k}z_2,\\ \overline{r}_3&=\overline{i}x_3+\overline{j}y_3+\overline{k}z_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Din formulele (1.6) și (1.5) deducem:

$$F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \tag{1.17}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{X}{F},\\ \cos\beta&=\frac{Y}{F},\\ \cos\gamma&=\frac{Z}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

Aplicînd la formula (1.12) formulele (1.10) vom găsi pentru proiecțiile forței rezultante, expresiile ce urmează:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1+X_2+X_3+\cdots=\sum_n X_n, \\ Y &= Y_1+Y_2+Y_3+\cdots=\sum_n Y_n, \\ Z &= Z_1+Z_2+Z_3+\cdots=\sum_n Z_n. \end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

Inlocuind aceste expresii în formula (1.17) vom obține:

$$F=\left(\sum_n X_n\right)^2+\left(\sum_n Y_n\right)^2+\left(\sum_n Z_n\right)^2. \quad (1.20)$$

Este evident că cosinușii directori ai unghiurilor suportului forței $\overline{F}$, cu axele de coordonate, sînt determinați cu ajutorul formulei (1.18); de aceea, cunoscînd coordonatele (x, y, z) ale punctului prin care trece suportul forței și folosind geometria analitică se poate oricînd scrie ecuația suportului forței $\overline{F}$.

§ 8. Exemple. 1. Vectorul $\overline{a}$ formează cu cele trei axe ale sistemului ortogonal de coordonate unghiurile α egale între ele; să se determine acest unghi α.

Deoarece suma pătratelor cosinușilor unghiurilor vectorilor cu axele de coordonate este egală cu 1, trebuie ca:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=3\cos^2\alpha=1$$

adică $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. De aici găsim că; $\alpha=54°44'8''$ și $\alpha=125°15'52''$.

2. Trei vectori liberi $\overline{a}_1$ $(1, -2, 3)$; $\overline{a}_2$ $(-4, 5, 8)$; $\overline{a}_3$ $(-2, 1, 0)$ sînt dați prin proiecțiile lor pe axele ortogonale de coordonatele $Oxyz$. Să se determine un al patrulea vector $\overline{a}_4$, astfel încît rezultanta celor patru vectori să fie egală cu zero.

Deoarece avem $\overline{a}_1+\overline{a}_2+\overline{a}_3+\overline{a}_4=0$, rezultă:

$$1-4-2+a_{4x}=0, \quad -2+5+1+a_{4y}=0, \quad 3+8+0+a_{4z}=0;$$

deci, vom avea:

$$a_{4x}=5, \quad a_{4y}=-4, \quad a_{4z}=-11.$$

Astfel obținem:

$$a_4=\sqrt{5^2+4^2+11^2}=\sqrt{162},$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{162}}, \quad \cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{162}}, \quad \cos\gamma=\frac{-11}{\sqrt{162}}.$$

Efectuînd calculele, obținem:

$$a_4=12{,}728,$$

$$\alpha=66°52'08'', \quad \beta=108°19'00'', \quad \gamma=149°47'46''.$$

3. Pe o dreaptă orizontală sînt fixate două dispozitive de prindere A și B, la distanța l între ele. În dispozitivele de prindere sînt fixate capetele unui fir flexibil, a cărui lungime între punctele A și B este egală cu $2l$. Pe fir se poate rostogoli fără frecare un scripete mobil de care este atîrnat un corp; greutatea corpului și a scripetelui este egală cu P. Să se găsească poziția de echilibru a scripetelui și tensiunea firului în această poziție. Greutatea firului este atît de mică față de greutatea P încît poate fi neglijată.

În rezolvarea cu ajutorul mecanicii teoretice a problemelor care se referă la un sistem material oarecare, se introduce destul de frecvent condiția ca anumite părți ale acestui sistem să se considere fără greutate. Datorită acestei condiții se pot face simplificări apreciabile scoțînd în evidență partea esențială în rezolvarea problemelor. Astfel, de exemplu, în problema de mai sus, tensiunea firului depinde desigur și de greutatea, lui proprie, dar evaluarea părții de tensiune care depinde de greutatea firului este prea complicată și chiar inaccesibilă pentru cei cărora li se adresează cartea, deoarece studiul echilibrului firului nu este expus aici. Totuși, fără a efectua vreun calcul este clar că dacă greutatea P întrece cu mult greutatea firului, partea principală a tensiunii firului depinde de greutatea P și nu de greutatea firului. Astfel, neglijînd greutatea firului, nu introducem în calcule o eroare prea mare și simplificăm totodată în mare măsură problema. În § 3, la expunerea modului de verificare experimentală a regulii paralelogramului, am făcut deja o simplificare analogă; în paragrafele următoare vom recurge uneori la asemenea simplificări.

Să presupunem că dimensiunile scripetelui pot fi neglijate în comparație cu lungimea firului; atunci, dacă se notează cu C centrul roții scripetelui și vom deplasa scripetele lăsînd firul întins, locul geometric al punctului C va fi o elipsă cu focarele în punctele A și B. Este evident, că cea mai joasă poziție a punctului C se află la capătul axei verticale a elipsei cînd vom avea $CA=CB=l$. Sub influența greutății P, scripetele trebuie să ajungă în poziția cea mai joasă cînd vom avea $CA=CB$; în acest caz triunghiul ABC va deveni echilateral, deci cu unghiurile egale cu 60°. De aceea, asupra elementului de fir vor acționa în punctul C de-a lungul lui CA și CB, tensiuni egale, a căror mărime necunoscută încă o vom nota cu T. Este evident că se pot înlocui aceste tensiuni după regula paralelogramului, care în cazul de față devine romb, cu o singură rezultantă; această rezultantă va fi îndreptată de-a lungul diagonalei rombului, vertical în sus și pătratul ei va fi egal cu $T^2+T^2+2TT\cos 60°=3T^2$. Ca să existe echilibru, această rezultantă trebuie să fie egală cu P, adică trebuie să aibă loc egalitatea $T\sqrt{3}=P$, de unde $T=\frac{P}{\sqrt{3}}$. Observăm că dacă se proiectează rezultanta P pe direcția CA sau CB, obținem: $P\cos 30°=\frac{P\sqrt{3}}{2}$. În acest fel componentele forței P sînt egale cu $\frac{P}{\sqrt{3}}=\frac{P\sqrt{3}}{3}$, iar proiecțiile forței P pe direcțiile componentelor sînt egale cu $\frac{P\sqrt{3}}{2}$. Acest lucru confirmă încă o dată faptul că proiecțiile și componentele unui vector nu sînt în general egale între ele (v. § 6).

CAPITOLUL II

MOMENTUL UNEI FORȚE ȘI PRODUSUL VECTORIAL

§ 9. Bazele fizice ale introducerii momentului forței. Din fizica elementară ne este cunoscut că pentru cercetarea condițiilor de echilibru a pîrghiei, este necesar să se țină seamă nu numai de mărimea forțelor care acționează asupra pîrghiei ci și de distanța de la punctul de sprijin al pîrghiei la suporturile acestor forțe. În adevăr, să studiem de exemplu pîrghia de ordinul întîi AOB formată dintr-o bară perfect rigidă AOB, cu punctul de sprijin O, la ale cărei capete A și B sînt aplicate perpendicular pe bara AB forțele $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ (fig. 18). Fie Δ_1 și Δ_2 suporturile forțelor $\overline{P}$ și $\overline{Q}$. În punctul O pîrghia are un punct de sprijin, adică pîrghia se poate roti în jurul punctului O, fără să poată aluneca în lungul ei. Să amintim că perpendicularele OA și OB coborîte din punctul de sprijin O pe suporturile Δ_1 și Δ_2 ale forțelor $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ se numesc brațele pîrghiei. Din fizica elementară se cunoaște că, condiția de echilibru a pîrghiei de ordinul întîi considerate se poate exprima în felul următor:

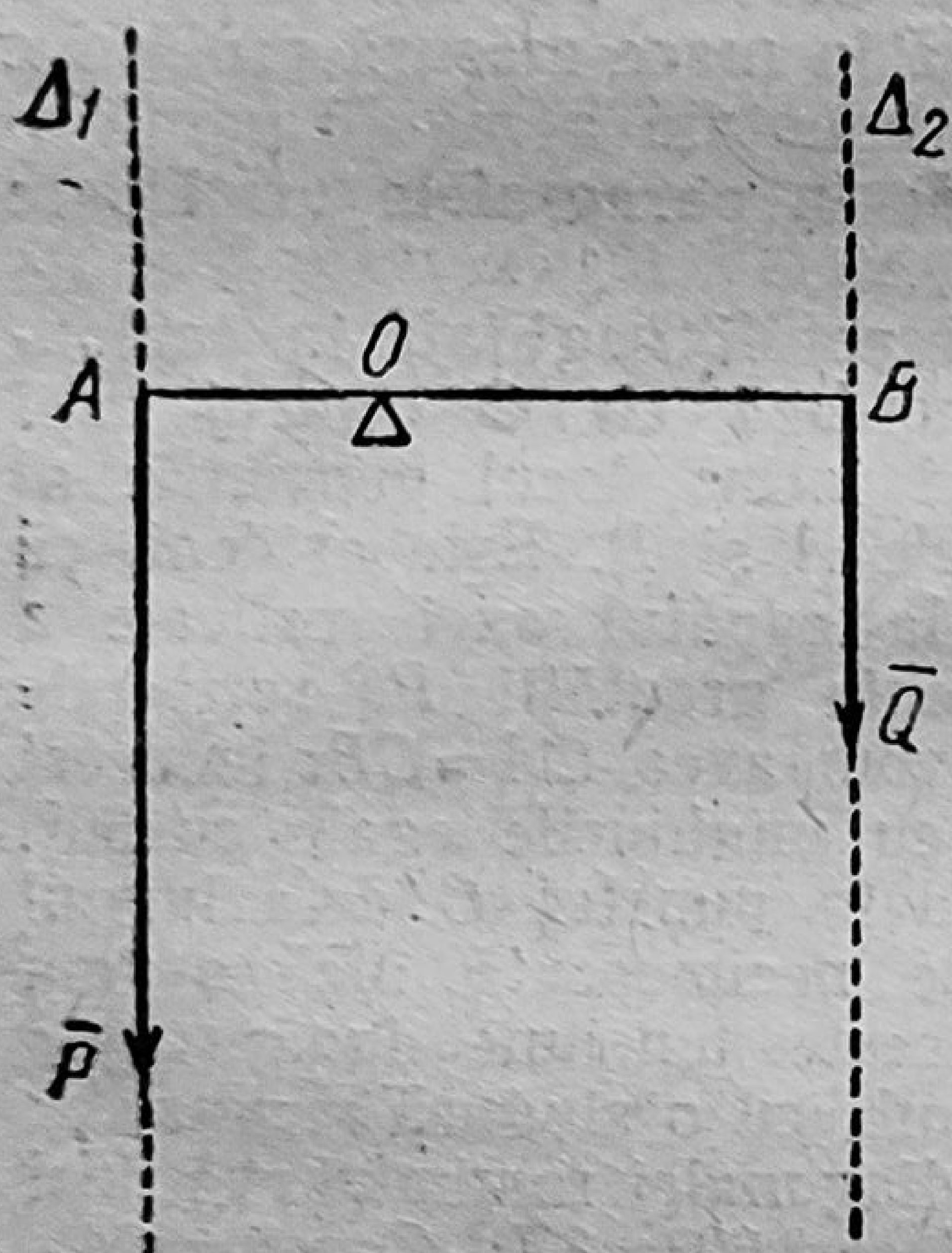


Fig. 18

Pentru ca pîrghia de ordinul întîi să fie în echilibru, punctul său de sprijin trebuie să împartă distanța dintre punctele de aplicație a forțelor în părți invers proporționale cu mărimea acestora.

Astfel, trebuie să avem:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{Q}{P},$$

sau

$$P\cdot OA=Q\cdot OB.$$

Dacă suportul Δ_1 al forței $\overline{P}$ nu este perpendicular pe dreapta OA, cum este reprezentat, de exemplu, în fig. 19, atunci putem descompune forța P în componenta $\overline{P}'$, perpendiculară pe dreapta OA și componenta $\overline{P}''$, îndreptată de-a lungul dreptei OA. Deoarece pîrghia nu poate luneca în lungul ei, componenta $\overline{P}''$ nu poate avea vreo influență asupra echilibrului pîrghiei, acțiunea ei fiind anulată de reacțiunea orizontală născută în punctul de sprijin O, și din forța $\overline{P}$ rămîne a fi luată în calcul numai o singură componentă $\overline{P}'$, aplicată în punctul A și perpendiculară

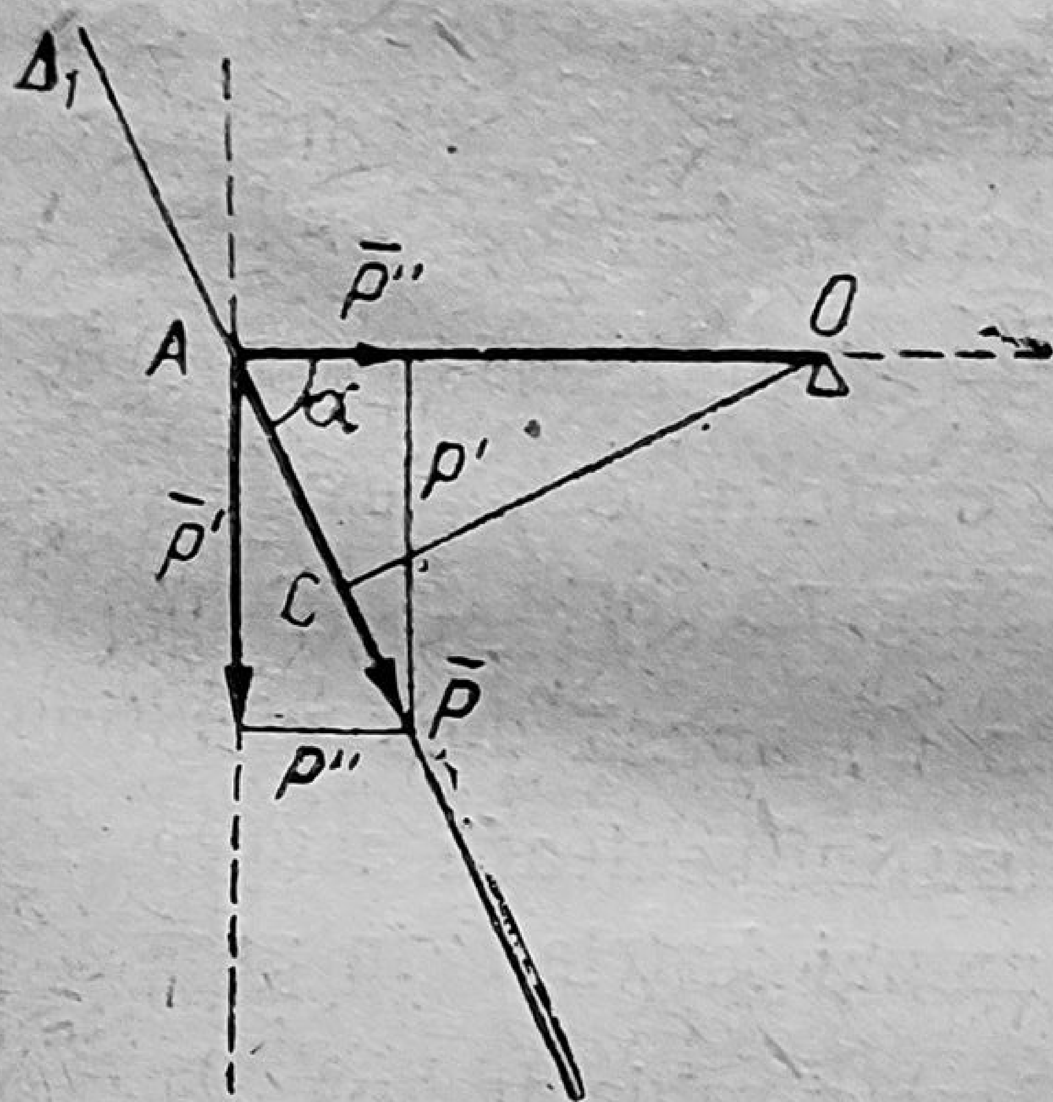


Fig. 19

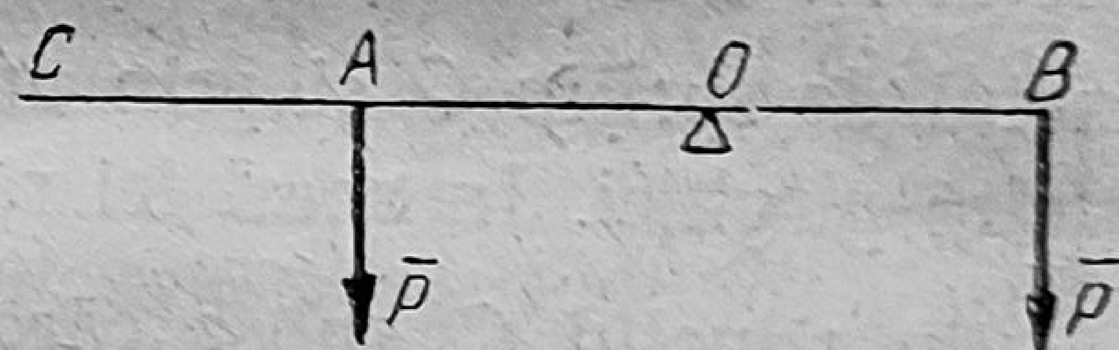


Fig. 20

pe dreapta OA. Astfel, în acest caz, în locul produsului $P\cdot OA$ trebuie pus în partea stîngă a ultimei relații produsul $P'\cdot OA$. Notînd cu α unghiul dintre dreapta OA și forța $\overline{P}$, este ușor de dedus că $P'=P\sin\alpha$ și partea stîngă a ultimei egalități se poate înlocui cu produsul $P\cdot OA\sin\alpha$. Deoarece $OA\sin\alpha=OC$ este egal cu lungimea perpendicularei coborîtă din O pe dreapta Δ_1 sau egal cu brațul pîrghiei, noi tragem concluzia că și în cazul cel mai general, pentru echilibrul pîrghiei de ordinul întîi, este necesar ca produsele forțelor cu brațele, respectiv din stînga și din dreapta să fie egale între ele. Nu e greu să ne convingem că același lucru se petrece și la pîrghia de ordinul al doilea. În acest fel în condiția de echilibru a pîrghiilor nu intervin direct mărimile forțelor ci produsul forțelor cu brațele respective; echilibrul se va menține, de exemplu, micșorînd forța, dar mărind

în același timp brațul astfel încît produsul forței cu brațul respectiv să rămînă constant. Dacă însă acest produs se va mări pentru un capăt oarecare al pîrghiei, pîrghia se va roti în jurul punctului său de sprijin.

Această condiție de echilibru a pîrghiei era cunoscută încă din antichitate. Vom cita aici raționamentul care aparține lui Arhimede (secolul III î.e.n.).

Din experiența zilnică se poate considera ca evident că două forțe egale $\overline{P}$, aplicate la capetele A și B ale pîrghiei cu brațe egale AOB, lasă pîrghia în echilibru (fig. 20); acest fapt se poate explica prin aceea că cele două forțe $\overline{P}$ aplicate în punctele A și B, se reduc la o singură forță $2\overline{P}$, aplicată în punctul O, care apasă numai pîrghia spre punctul său de sprijin, dar nu o poate roti. Să luăm $AC=AO$ și să înlocuim forța $\overline{P}$ aplicată în punctul A prin două forțe egale cu $\frac{\overline{P}}{2}$ și aplicate în punctele O și C, ceea ce este posibil deoarece conform celor expuse pînă acum, ambele forțe se reduc la o singură forță $\overline{P}$ aplicată în punctul A. Dar forța $\frac{\overline{P}}{2}$, aplicată, în O, apasă doar pîrghia în punctul de sprijin O și prin urmare nu influențează asupra echilibrului pîrghiei. În acest fel rămîn numai forțele $\overline{P}$ în punctul B și $\frac{\overline{P}}{2}$ în punctul C, sub a căror acțiune pîrghia trebuie să fie în echilibru, de unde se vede că:

$$\frac{P}{2}\cdot OC=P\cdot OB.$$

Acest mod de raționare se poate continua și mai departe.

§ 10. Momentul unei forțe în raport cu un punct. În acest fel, din studiul echilibrului pîrghiei a reieșit nevoia de a se studia o dată cu forțele și produsul modulului forțelor cu brațele respective. Generalizînd puțin cele expuse considerăm o forță $\overline{F}$ și un punct oarecare O din spațiu; coborîm din punctul O o perpendiculară pe suportul forței $\overline{F}$ și fie d lungimea acestei perpendiculare. Convenim să examinăm produsele Fd, considerîndu-le ca modulele unor vectori. Pentru a clarifica această posibilitate trebuie să demonstrăm că în primul rînd produsele Fd pot fi considerate ca modulele unor mărimi care au direcție în spațiu

și în al doilea rînd că aceste mărimi se pot aduna geometric. Ca să ne convingem de primul fapt vom reveni la pîrghie și ne vom referi, de exemplu, la fig. 18. Deoarece forța $\overline{P}$ tinde să producă o rotație în jurul punctului O în sens contrar acelor unui ceasornic și forța $\overline{Q}$ în sensul acelor unui ceasornic, atunci, conform condiției expuse la sfîrșitul § 4, pentru forța $\overline{P}$, sensul pozitiv al axei de rotație perpendiculare pe planul desenului va fi către fața cititorului, iar pentru forța $\overline{Q}$ va fi invers. Să convenim să construim în sensul pozitiv al axei de rotație un segment care reprezintă simbolic, la o anumită scară, produsul Fd. În acest fel vom obține segmente, care reprezintă simbolic produsele Fd și care au direcții determinate în spațiu. Ca să ne convingem că aceste segmente sînt vectori, rămîne să arătăm că ele se pot aduna geometric. Pentru aceasta să considerăm un punct oarecare O și o serie de forțe coplanare $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... Să construim pentru aceste forțe, prin procedeul arătat mai sus, segmente cu lungimile F_1d_1, F_2d_2, F_3d_3 ...; toate aceste segmente vor avea o origine comună O. Deoarece toate aceste construcții sînt convenționale, putem impune acestor segmente încă o condiție nouă care nu este în contradicție cu cele anterioare, și anume, să admitem că aceste segmente se pot aduna geometric. Avantajul introducerii acestei noi condiții va reieși clar din cele ce vor urma. Astfel, mai departe, la expunerea teoremelor lui Varignon (§§ 21, 23 și 24) a momentului cuplului de forțe (§ 25), a adunării cuplurilor de forțe (§ 36) la reducerea unui sistem general de forțe la un sistem mai simplu (§§ 47 și 48) etc., vom vedea că suma geometrică a acestor segmente convenționale are importanță în mecanică și ne vom convinge că ea simplifică în mare măsură expunerea a foarte multe capitole nu numai din statică ci și din cinematică și dinamică. Segmentele astfel definite au lungimi, direcții și sensuri și ele se pot aduna geometric. Deci aceste segmente sînt vectori. Acești vectori au căpătat denumirea de *momente ale forțelor în raport cu punctul O*. Suma geometrică a momentelor forțelor se numește *moment rezultant al sistemului de forțe*. Vom nota vectorul-moment al forței prin $\overline{M}$. Tot ce s-a spus anterior, se poate rezuma în definiția generală a momentului unei forțe în raport cu un punct.

Momentul forței în raport cu un punct este un vector avînd ca origine punctul dat; modulul acestui vector este egal cu produsul modulului forței cu lungimea perpendicularei coborîtă din

punctul dat pe suportul forței; momentul forței este dirijat perpendicular pe planul determinat de suportul forței și punctul dat și este orientat astfel încît un observator care stă în lungul vectorului să vadă forța rotind planul în sens contrar acelor de ceasornic.

Din această definiție urmează că momentul forței este un vector legat.

Introducînd noțiunea de moment al unei forțe putem exprima mai simplu condiția de echilibru a pîrghiei. Deoarece această condiție de echilibru constă în faptul că modulul momentului

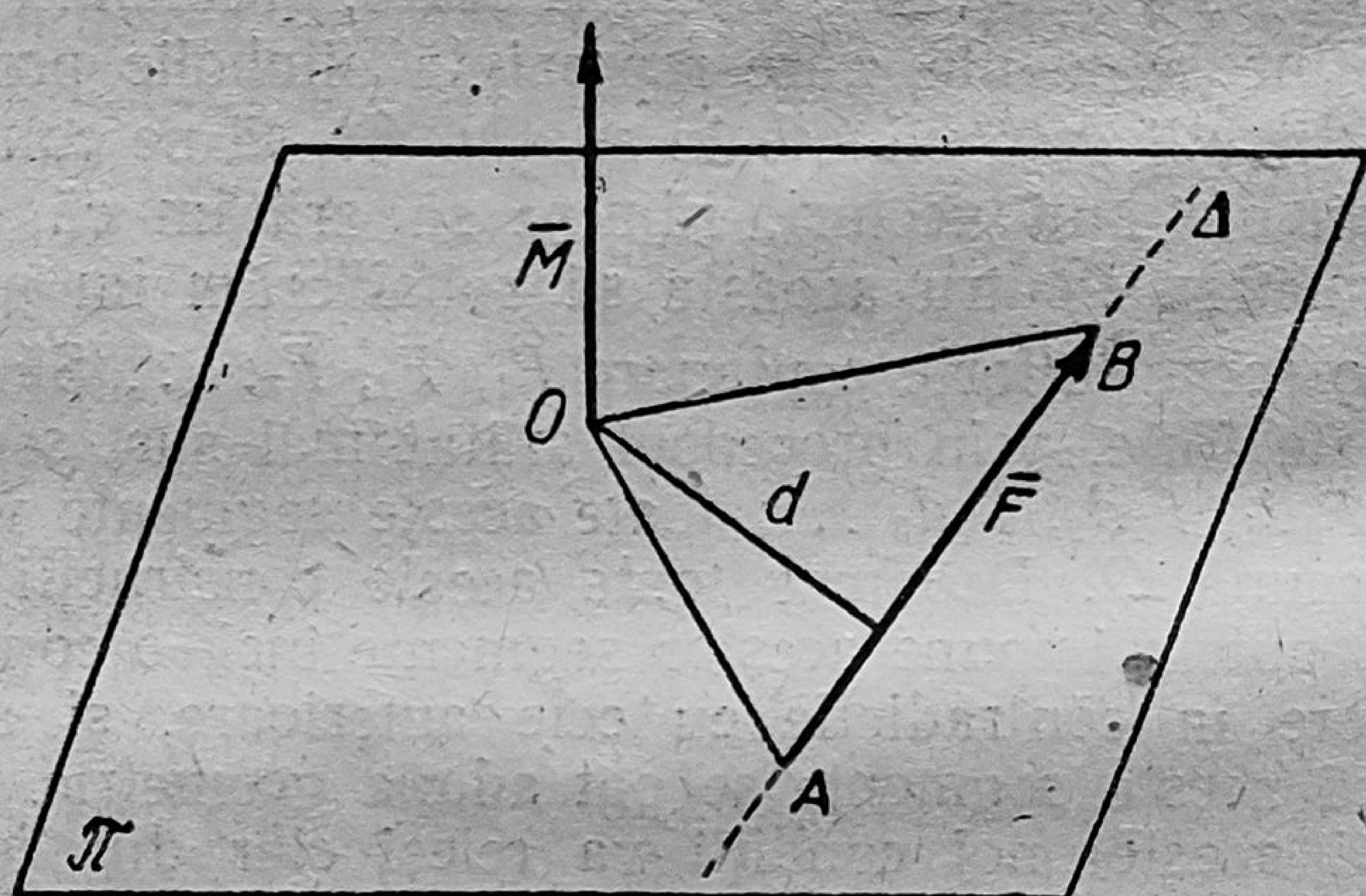


Fig. 21

forței $\overline{P}$ în raport cu punctul O (fig. 18), este egal cu modulul momentului forței $\overline{Q}$ în raport cu același punct O, iar vectorii-moment au sensuri opuse, atunci o altă exprimare mai simplă și mai concisă a condiției de echilibru a pîrghiei este: că, pentru echilibrul pîrghiei, momentul rezultant, în raport cu punctul de sprijin al ambelor forțe aplicate pîrghiei, trebuie să fie egal cu zero. În fig. 21 sînt reprezentate: punctul O, forța $\overline{F}$, planul π care trece prin $\overline{F}$ și O, momentul M; se vede că momentul $\overline{M}$ este orientat conform definiției. Pentru modulul vectorului $\overline{M}$ avem $M=Fd$. Vom preciza încă o dată că această reprezentare a momentului printr-un segment este pur convențională, ca și reprezentarea forței printr-un segment de dreaptă. Vom avea $Fd=2$ aria ΔAOB, iar modulul M poate să reprezinte mărimea suprafeței Fd numai în mod convențional, dacă vom conveni să

reprezentăm unitatea de suprafață printr-o anumită unitate de lungime.

Triunghiul OAB se numește triunghiul momentelor. Este evident că suprafața acestui triunghi nu se va schimba dacă vom deplasa forța de-a lungul suportului ei Δ; astfel, definiția momentului nu este în contradicție cu proprietatea că forța aplicată unui solid absolut rigid este un vector alunecător. Este evident de asemenea, că în raport cu orice punct care se găsește pe suportul forței, momentul forței va fi egal cu zero.

§ 11. Momentul unei forțe în raport cu o axă. Să considerăm o axă oarecare D și o forță $\overline{F}$ (fig. 22). Pe axa D să luăm arbi-

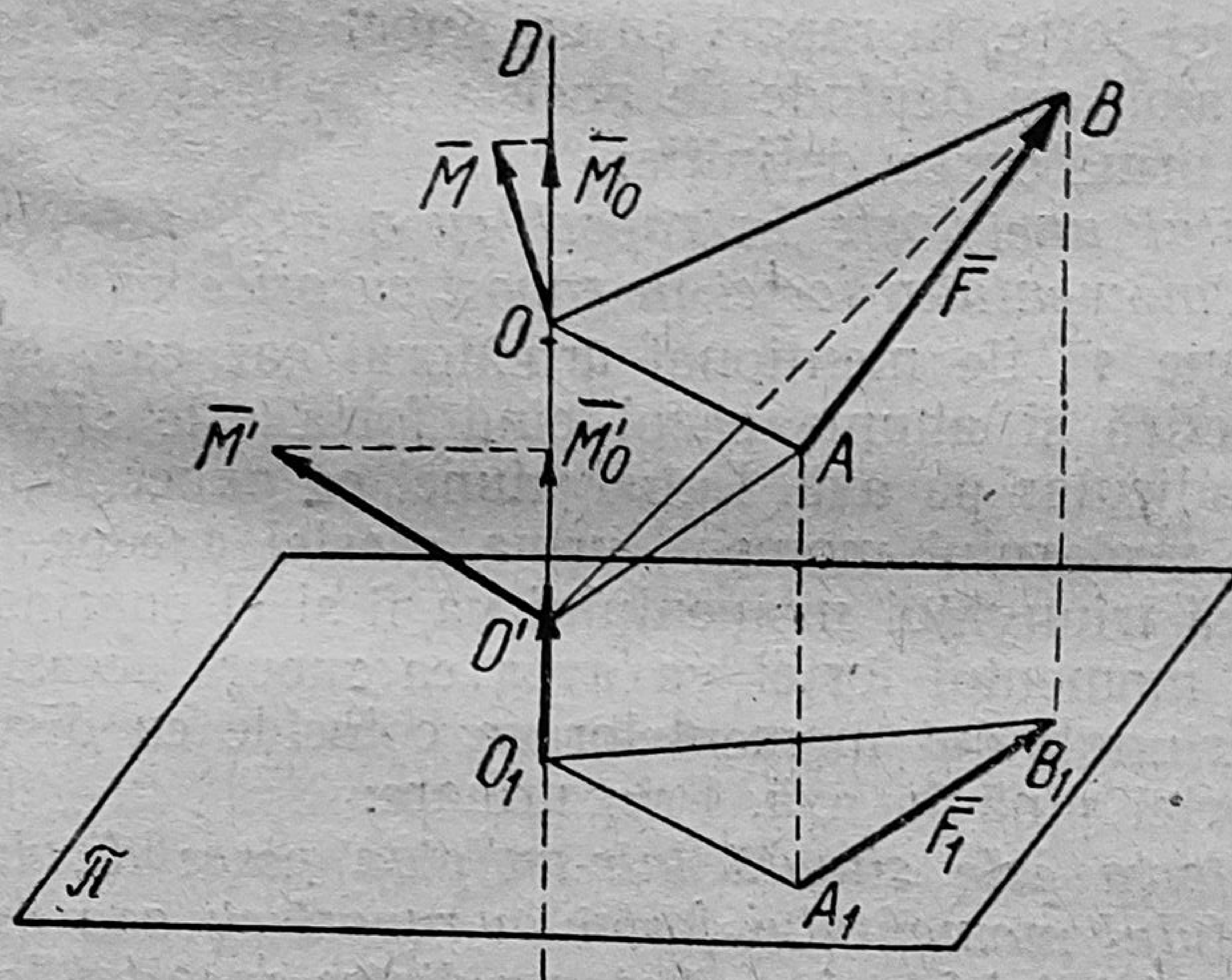


Fig. 22

trar două puncte O și O' și să considerăm momentele $\overline{M}$ și $\overline{M'}$ ale forței $\overline{F}$ în raport cu aceste puncte O și O'. Evident că suprafețele triunghiurilor OAB și $O'AB$ în general nu vor fi egale între ele, așa că $M \neq M'$. Să proiectăm momentul $\overline{M}$ și momentul $\overline{M'}$ pe axa D, vom obține proiecțiile $\overline{M}_0$ și $\overline{M}_0'$. Să demonstrăm că întotdeauna $M_0 = M_0'$.

În adevăr avem:

$$M_0 = M \cos(\widehat{\overline{M}, D})$$

$$M_0' = M' \cos(\widehat{\overline{M'}, D}).$$

Ducem printr-un punct oarecare O_1 de pe dreapta D planul π perpendicular pe dreapta D. Deoarece vectorul $\overline{M}$ este perpendicular pe planul triunghiului OAB, iar vectorul $\overline{M}'$ este perpendicular pe planul triunghiului $O'AB$, unghiurile dintre dreapta D și vectorii $\overline{M}$ și $\overline{M}'$ sînt egale cu unghiurile dintre planul π și planurile triunghiurilor OAB și $O'AB$ și vom avea:

$$M_0 = 2 \text{ aria } \Delta OAB \cos(\widehat{\overline{M}, D}) = 2 \text{ aria } \Delta O_1A_1B_1 ,$$

$$M_0' = 2 \text{ aria } \Delta O'AB \cos(\widehat{\overline{M}', D}) = 2 \text{ aria } \Delta O_1A_1B_1 ,$$

adică $M_0 = M_0'$; ceea ce trebuie demonstrat. Astfel proiecția momentului unei forțe, în raport cu un punct oarecare de pe o axă, pe această axă, nu depinde de poziția punctului dat pe axă. De aici rezultă următoarea definiție:

Momentul unei forțe în raport cu o axă, este proiecția pe acea axă a momentului forței în raport cu orice punct de pe axă.

Este bine să fie menționat următorul caz care se întîlnește des în practică și anume cazul cînd forța este situată într-un plan perpendicular pe axă. Luînd atunci ca punct al axei pentru construirea vectorului moment, urma acestei axe pe planul dat, vom găsi că triunghiul momentului va fi și el cuprins în planul considerat; momentul forței va avea ca suport această axă, iar înălțimea triunghiului momentelor va coincide cu distanța de la suportul forței pînă la axă. Prin urmare:

Dacă forța este situată într-un plan perpendicular pe axă, atunci modulul momentului forței în raport cu axa este egal cu produsul modulului forței cu distanța dintre suportul forței și axă.

Pentru ca momentul unei forțe în raport cu o axă să fie egal cu zero, este necesar ca momentul forței, luat în raport cu orice punct de pe axă, să fie perpendicular pe acea axă. Evident că, pentru aceasta, este necesar ca axa și triunghiul momentelor să se găsească în același plan sau cu alte cuvinte:

Pentru ca momentul unei forțe în raport cu o axă să fie egal cu zero, este necesar ca forța și axa să fie coplanare.

In cele ce urmează vom întîlni momentele unei forțe în raport cu puncte și axe; drept punct vom lua adesea originea O a coordonatelor și drept axe — axele Ox, Oy, Oz ale sistemului ortogonal de coordonate $Oxyz$.

In practică, pentru calculul momentului forței în raport cu o axă se folosește de obicei proprietatea, că momentul forței $\overline{F}$ în

raport cu o axă (fig. 22) este egal cu momentul proiecţiei ei $\overline{F}_1$ pe planul π — perpendicular pe axă — în raport cu axa dată.

§ 12. Produsul vectorial. Înlocuind în definiţia momentului unei forţe, vectorul forţă printr-un alt vector oarecare, de exemplu, prin vectorul cantităţii de mişcare, vom obţine momentul cantităţii de mişcare etc. Toate aceste momente, au o întreagă serie de proprietăţi generale care se pot studia cu ajutorul produsului vectorial.

Fie daţi doi vectori liberi, $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Să mutăm aceşti vectori într-un punct arbitrar A din spaţiu şi să construim pe ei paralelogramul $ABDC$ aşa cum se arată în fig. 23. Dintre cele două feţe ale planului paralelogramului vom considera pozitivă acea faţă pe care trebuie să stăm, pentru ca trecînd de la primul vector $\overline{a}$, la al doilea vector $\overline{b}$, să ne deplasăm în sens pozitiv, adică în sens contrar acelor de ceasornic. În locul acestei construcţii se mai poate utiliza şi următoarea: prin extremitatea vectorului $\overline{a}$, ducem al doilea vector $\overline{b}$, astfel încît originea vectorului $\overline{b}$ să coincidă cu extremitatea primului vector şi completăm linia frîntă obţinută ABD cu două laturi pînă obţinem paralelogramul $ABDC$. Vom considera ca pozitivă acea faţă a planului paralelogramului, care va rămîne în partea mîinii stîngi, dacă vom ocoli acea suprafaţă mişcîndu-ne la început de-a lungul primului vector şi apoi de-a lungul celui de al doilea vector. Acest al doilea mod de construcţie va fi folosit mai jos la § 13, la reprezentarea momentului forţei printr-un produs vectorial. Dacă considerăm $\overline{b}$ primul vector şi $\overline{a}$ al doilea vector, atunci partea pozitivă va deveni cealaltă faţă a planului paralelogramului. Determinăm aria paralelogramului $ABDC$ şi convenim s-o reprezentăm în mod simbolic prin segmentul $\overline{c}$ avînd lungimea egală cu aria paralelogramului şi construindu-l în partea pozitivă a planului paralelogramului, perpendicular pe suprafaţa

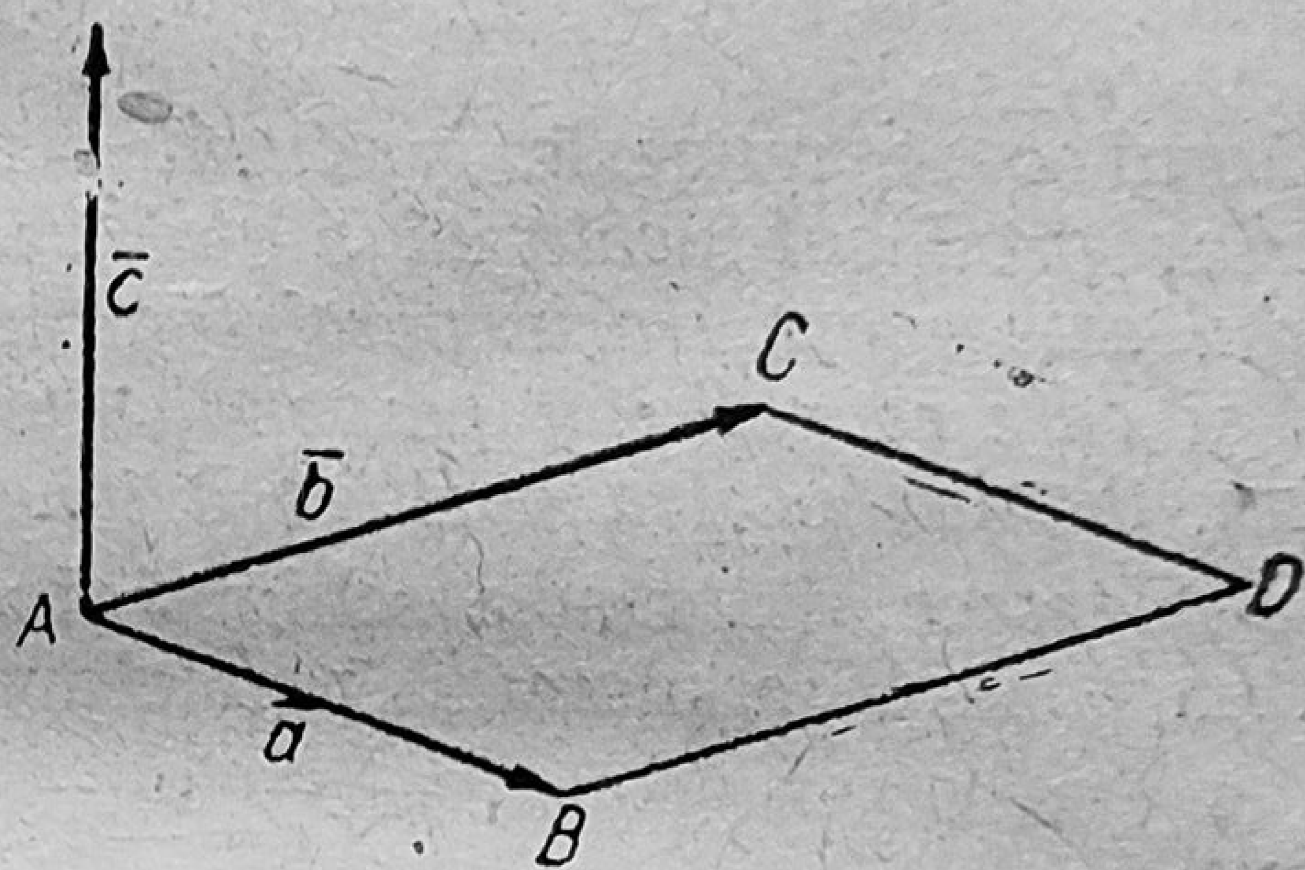


Fig. 23

paralelogramului (reprezentăm unitatea de suprafață printr-o anumită unitate de lungime). Impunem segmentelor $\bar{c}$ astfel formate, încă o nouă condiție, aceea că ele pot fi adunate geometric; această nouă condiție nu este în contradicție cu definiția segmentului $\bar{c}$, și mai jos, în acest paragraf va fi clarificat sensul acestor adunări. În același timp se va lămuri de asemenea că operația de obținere a segmentului $\bar{c}$ din vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, are proprietăți caracteristice înmulțirii. De aceea segmentul $\bar{c}$ va fi un vector, iar modul de obținere a vectorului $\bar{c}$ din vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numește *înmulțire vectorială;* înmulțirea vectorială se notează cu semnul $\times$:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}. \tag{2.1}$$

Vectorul $\bar{c}$ se numește *produsul vectorial* al vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Așadar *produsul vectorial a doi vectori, este vectorul al cărui modul este egal cu aria paralelogramului construit pe acești vectori și care este dirijat perpendicular pe planul acestui paralelogram, dinspre partea pozitivă a lui.*

Deoarece, din cauza schimbării ordinii vectorilor se schimbă partea pozitivă a planului paralelogramului, vom avea:

$$\bar{b}\times\bar{a}=-\bar{a}\times\bar{b}; \tag{2.2}$$

într-adevăr vectorul $\bar{b}\times\bar{a}$ este egal ca modul cu vectorul $\bar{a}\times\bar{b}$ dar dirijat în sens contrar.

Se știe din trigonometrie că aria paralelogramului este egală cu produsul laturilor lui înmulțit cu sinusul unghiului format de ele. De aceea, notînd unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ prin φ vom avea:

$$c=|\bar{a}\times\bar{b}|=ab\sin\varphi \quad (\pi\geqslant\varphi\geqslant0). \tag{2.3}$$

De aici rezultă că produsul vectorial a doi vectori paraleli este egal cu zero pentru că pentru ei: sau $\varphi=0$, dacă sînt dirijați în același sens sau $\varphi=\pi$ dacă sînt dirijați în sens contrar. Reciproc:

Dacă produsul vectorial a doi vectori este egal cu zero, atunci acești vectori sînt paraleli între ei.

Dacă modulele a și b ale vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt egale între ele, iar vectorii sînt perpendiculari între ei, atunci $|\bar{a}\times\bar{b}|=a^2$.

Aplicînd aceste reguli la vectorii unitari $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, vom obţine formulele:

$$\bar{i}\times\bar{i}=0, \quad \bar{j}\times\bar{j}=0, \quad \bar{k}\times\bar{k}=0; \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}\times\bar{j}=-\bar{j}\times\bar{i}=\bar{k}, \\ \bar{j}\times\bar{k}=-\bar{k}\times\bar{j}=\bar{i}, \\ \bar{k}\times\bar{i}=-\bar{i}\times\bar{k}=\bar{j}. \end{aligned}\right\} \tag{ .5}$$

Formulele (2.5) rezultă din considerentul că modulele vectorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sînt egale cu unitatea, prin urmare produsul $\bar{i}\times\bar{j}$ are modulul egal cu aria pătratului construit pe vectorii unitari $\bar{i}$ şi $\bar{j}$, adică egal cu unitatea; el este dirijat în sensul pozitiv al axei Oz.

Vedem că pentru produsul vectorial regula comutativităţii este aplicabilă în afară de semn, deoarece prin schimbarea ordinii factorilor, produsul vectorial are acelaşi modul şi aceeaşi direcţie, dar îşi schimbă semnul.

În continuare vom dovedi că produsul vectorial este distributiv. Totodată, produsele vectoriale se vor aduna geometric şi prin aceasta se confirmă că produsul vectorial $\bar{c}$ este în adevăr un vector.

Tot ceea ce s-a expus anterior, îndreptăţeşte denumirea de *produs vectorial* care este dată operaţiei de obţinere a vectorului $\bar{c}$ din vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, conform formulei (2.1).

Pentru a dovedi că produsul vectorial este distributiv să considerăm trei vectori oarecare $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ şi $\bar{b}$ şi să demonstrăm că

$$\bar{a}_1\times\bar{b}+\bar{a}_2\times\bar{b}=(\bar{a}_1+\bar{a}_2)\times\bar{b}.$$

Pentru simplificare introducem notaţiile:

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2=\bar{d}, \quad \bar{a}_1\times\bar{b}=\bar{c}_1, \quad \bar{a}_2\times\bar{b}=\bar{c}_2, \quad \bar{d}\times\bar{b}=\bar{c};$$

cu aceste notaţii relaţia precedentă apare sub forma:

$$\bar{c}_1+\bar{c}_2=\bar{c}.$$

Să examinăm mai întîi cazul cînd cei trei vectori $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ şi $\bar{b}$ nu sînt paraleli cu acelaşi plan. Să-i mutăm într-un punct oarecare din spaţiu A şi să construim pe ei paralelipipedul

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 24). Ducem un plan perpendicular pe muchia AA_1 a paralelipipedului. La intersecția cu muchiile paralelipipedului el formează o secțiune perpendiculară $LMNP$ care este un paralelogram cu laturile h_1 și h_2 și diagonala H. Să rotim acest paralelogram în planul său cu 90° în jurul punctului L în sensul către cititor; atunci segmentele h_1, h_2 și H vor avea direcția produselor vectoriale $\overline{a}_1\times\overline{b}$, $\overline{a}_2\times\overline{b}$ și $\overline{d}\times\overline{b}$. Fără a schimba orientarea laturilor acestui paralelogram rotit, să mărim lungimea laturilor lui de b ori, ca să avem $LM_1=bh_1$, $LP_1=bh_2$ și

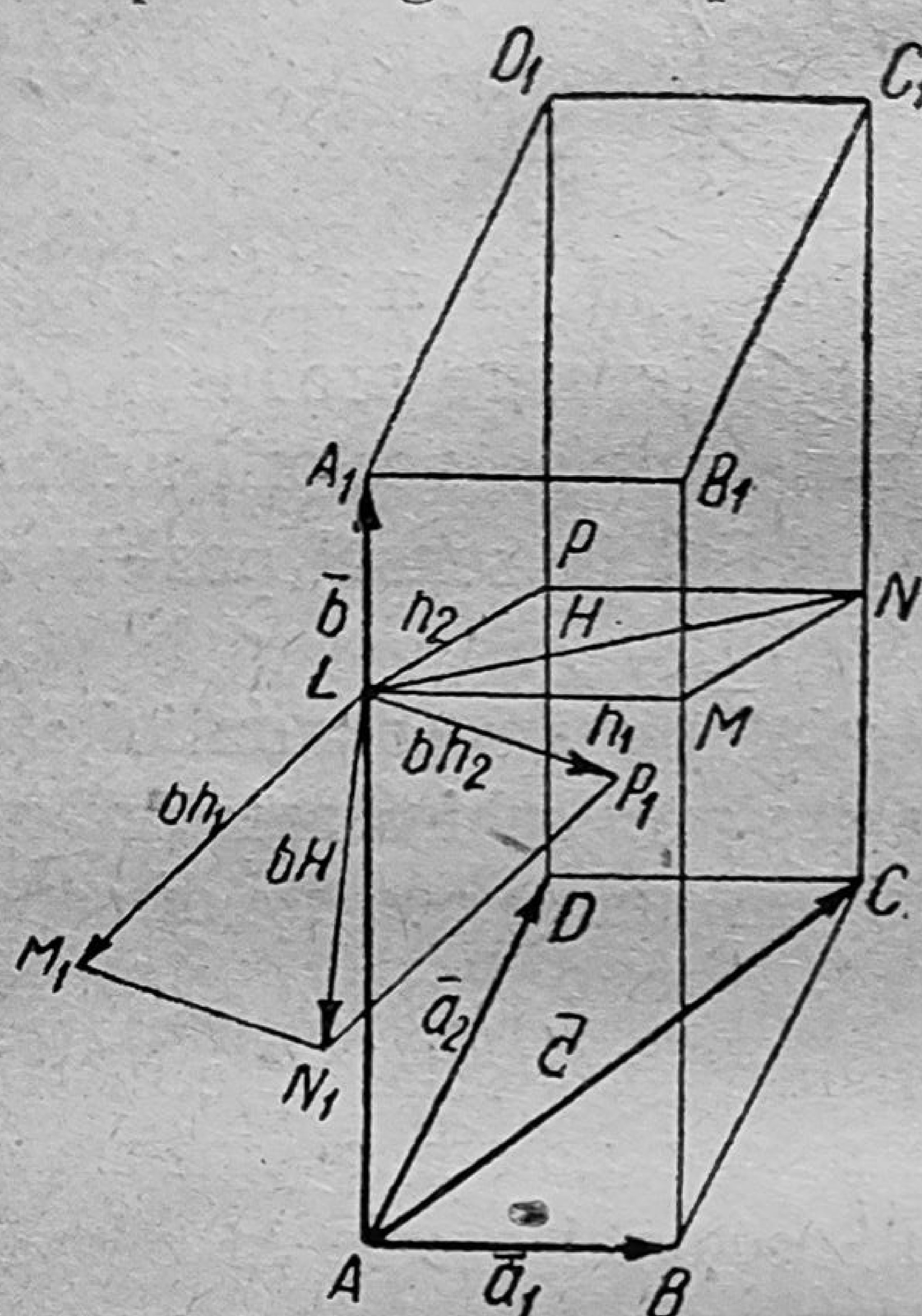


Fig. 24

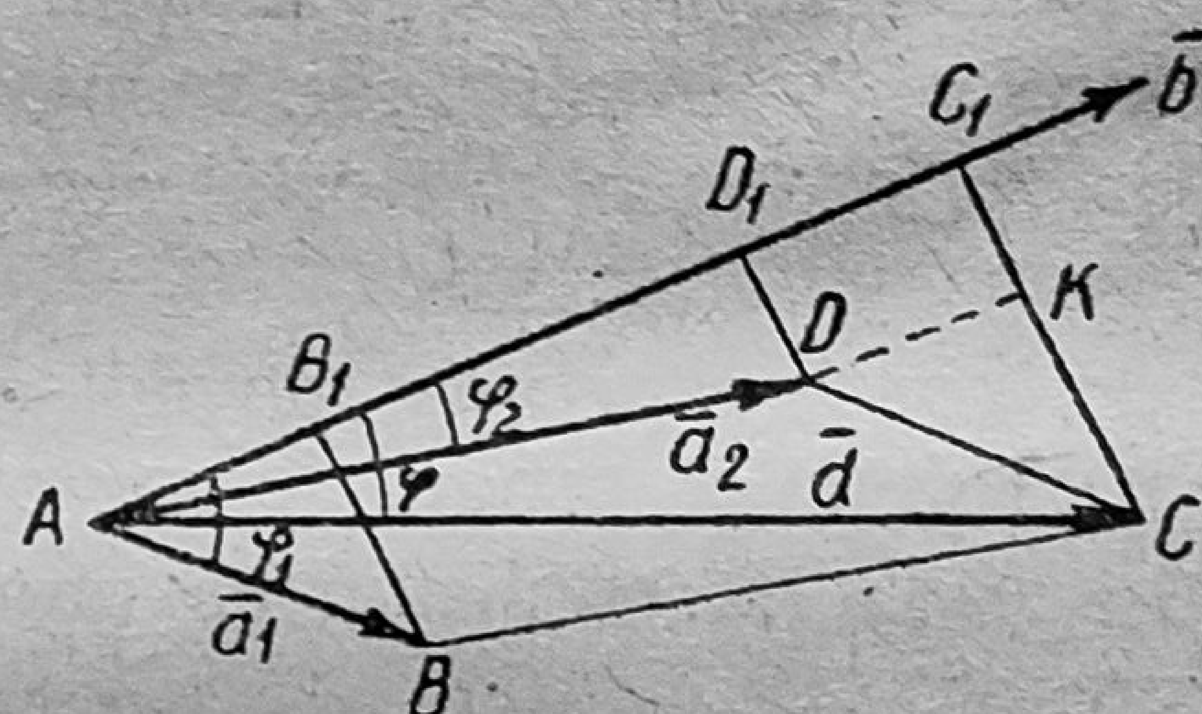


Fig. 25

$LN_1=bH$. Deoarece modulele vectorilor $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, $\overline{c}$, sînt respectiv: $c_1=$aria $ABB_1A_1=bh_1$, $c_2=$aria $ADD_1A_1=bh_2$, $c=$aria $ACC_1A_1=$ $=bH$, vedem că segmentele LM_1, LP_1 și LN_1 vor reprezenta ca mărime, ca direcție și sens vectorii $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$ și $\overline{c}$, prin urmare relația $\overline{c}=\overline{c}_1+\overline{c}_2$ este demonstrată.

Presupunem acum că cei trei vectori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ și $\overline{b}$ sînt paraleli cu același plan; atunci, mutîndu-i într-un punct oarecare din spațiu, vom vedea că acești trei vectori sînt în același plan și de aceea nu mai putem construi paralelipipedul pomenit anterior. Totuși, nu este greu de demonstrat, că în acest caz produsul vectorial este distributiv. In adevăr, presupunem că am mutat cei trei vectori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ și $\overline{b}$ într-un punct A, cum se arată în fig. 25. Construind vectorii $\overline{a}_1\times\overline{b}$, $\overline{a}_2\times\overline{b}$ și $\overline{d}\times\overline{b}$ în punctul A, vom găsi că toți acești vectori vor fi perpendiculari pe planul desenului și,

prin urmare, egalitatea vectorială se reduce în acest caz la o relație scalară și anume $c_1+c_2=c$. Dar noi avem:

$$c_1=a_1 b \sin\varphi_1, \quad c_2=a_2 b \sin\varphi_2, \quad c=db \sin\varphi;$$

de aceea, relația $c_1+c_2=c$ devine

$$a_1 \sin\varphi_1+a_2 \sin\varphi_2=d \sin\varphi.$$

Din fig. 25 rezultă că

$$CC_1=CK+KC_1=BB_1+DD_1,$$

dar

$$a_1 \sin\varphi_1=BB_1=KC, \quad a_2 \sin\varphi_2=DD_1=C_1K, \quad d \sin\varphi=CC_1,$$

și teorema este demonstrată. Nu este greu să ne convingem de valabilitatea teoremei și în acele cazuri cînd vectorul $\bar{b}$ este de cealaltă parte a vectorilor $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$ sau între ei. În acest fel în toate cazurile avem:

$$\bar{a}_1\times\bar{b}+\bar{a}_2\times\bar{b}=(\bar{a}_1+\bar{a}_2)\times\bar{b}. \tag{2.6}$$

Schimbînd ordinea factorilor, obținem:

$$-\bar{b}\times\bar{a}_1-\bar{b}\times\bar{a}_2=-\bar{b}\times(\bar{a}_1+\bar{a}_2),$$

sau

$$\bar{b}\times\bar{a}_1+\bar{b}\times\bar{a}_2=\bar{b}\times(\bar{a}_1+\bar{a}_2). \tag{2.7}$$

Repetînd același procedeu care se folosește la deducerea regulii înmulțirii a două polinoame între ele din regula înmulțirii unui polinom cu un monom, vom avea:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{d}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{d}. \tag{2.8}$$

Este evident că suma situată în partea dreaptă a formulei (2.8) este o sumă geometrică.

Este ușor de văzut că dacă m și n sînt scalari, atunci trebuie să avem

$$\bar{a}m\times\bar{b}n=(\bar{a}\times\bar{b})\, m\cdot n. \tag{2.9}$$

Bazîndu-ne pe formulele (2.8) și (2.9) nu este greu să se obțină expresia produsului vectorial a doi vectori, cînd acești vectori sînt exprimați prin vectorii unitari $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. In adevăr fie dat:

$$\bar{a}=\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z, \quad \bar{b}=\bar{i}b_x+\bar{j}b_y+\bar{k}b_z.$$

Aplicînd formulele (2.8) și (2.9) vom obține

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=(\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z)\times(\bar{i}b_x+\bar{j}b_y+\bar{k}b_z)=$$
$$=(\bar{i}\times\bar{i})\,a_xb_x+(\bar{i}\times\bar{j})\,a_xb_y+(\bar{i}\times\bar{k})\,a_xb_z+(\bar{j}\times\bar{i})\,a_yb_x+(\bar{j}\times\bar{j})\,a_yb_y+$$
$$+(\bar{j}\times\bar{k})\,a_yb_z+(\bar{k}\times\bar{i})\,a_zb_x+(\bar{k}\times\bar{j})\,a_zb_y+(\bar{k}\times\bar{k})\,a_zb_z\,.$$

De aici în baza formulelor (2.4) și (2.5) vom obține:

$$\bar{c}=\bar{i}\,(a_yb_z-a_zb_y)+\bar{j}\,(a_zb_x-a_xb_z)+\bar{k}\,(a_xb_y-a_yb_x)\,. \qquad (2.10)$$

Exprimînd vectorul $\bar{c}$ prin aceiași vectori unitari $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, după formula

$$\bar{c}=\bar{i}c_x+\bar{j}c_y+\bar{k}c_z\,,$$

vom ajunge la formulele care reprezintă proiecțiile produsului vectorial a doi vectori pe axele de coordonate și anume:

$$\left.\begin{aligned} c_x&=a_yb_z-a_zb_y\,,\\ c_y&=a_zb_x-a_xb_z\,,\\ c_z&=a_xb_y-a_yb_x\,.\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Formula (2.10) mai poate fi prezentată simbolic și în felul următor:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

Expresia care se găsește în partea dreaptă a formulei (2.12) și este reprezentată printr-o tabelă simbolică plasată între două linii verticale, se numește *determinant*. Cantitățile care intervin în tabelă se numesc *elementele determinantului;* elementele care stau în același șir orizontal formează *linii* iar elementele care compun un șir vertical formează *coloane*. Tăind oricare linie sau coloană, de exemplu prima linie și prima coloană vom obține determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}$$

care se numește *minorul* determinantului (2.12), în raport cu elementul $\bar{i}$. Convenim să dezvoltăm determinantul cu două linii și două coloane după următoarea formulă:

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\,. \qquad (2.13)$$

După aceasta este ușor de dat următoarea regulă de dezvoltare a determinantului (2.12) care duce la formula (2.10):

Pentru a dezvolta determinantul (2.12), trebuie să înmulțim primul element al primei linii cu minorul său, apoi să scădem produsul elementului al doilea din prima linie cu minorul său și la rezultat să adăugăm produsul dintre elementul al treilea al primei linii cu minorul său. (În partea dreaptă a formulei (2.10) elementul al doilea are semnul plus, întrucît semnul minus este introdus în interiorul parantezei).

§ 13. Momentul unei forțe ca produs vectorial. Momentul unei forțe în raport cu un punct așa cum s-a definit la § 10, este ușor de interpretat ca un produs vectorial. In adevăr, fie forța $\overline{F}$ și se cere să se găsească momentul ei în raport cu punctul O. Pentru aceasta construim triunghiul momentelor OAB și vom numi vectorul $\overline{OA}$ care unește punctul dat O cu originea A a vectorului forță $\overline{F}$, vectorul de poziție $\overline{r}$ al punctului A (fig. 26).

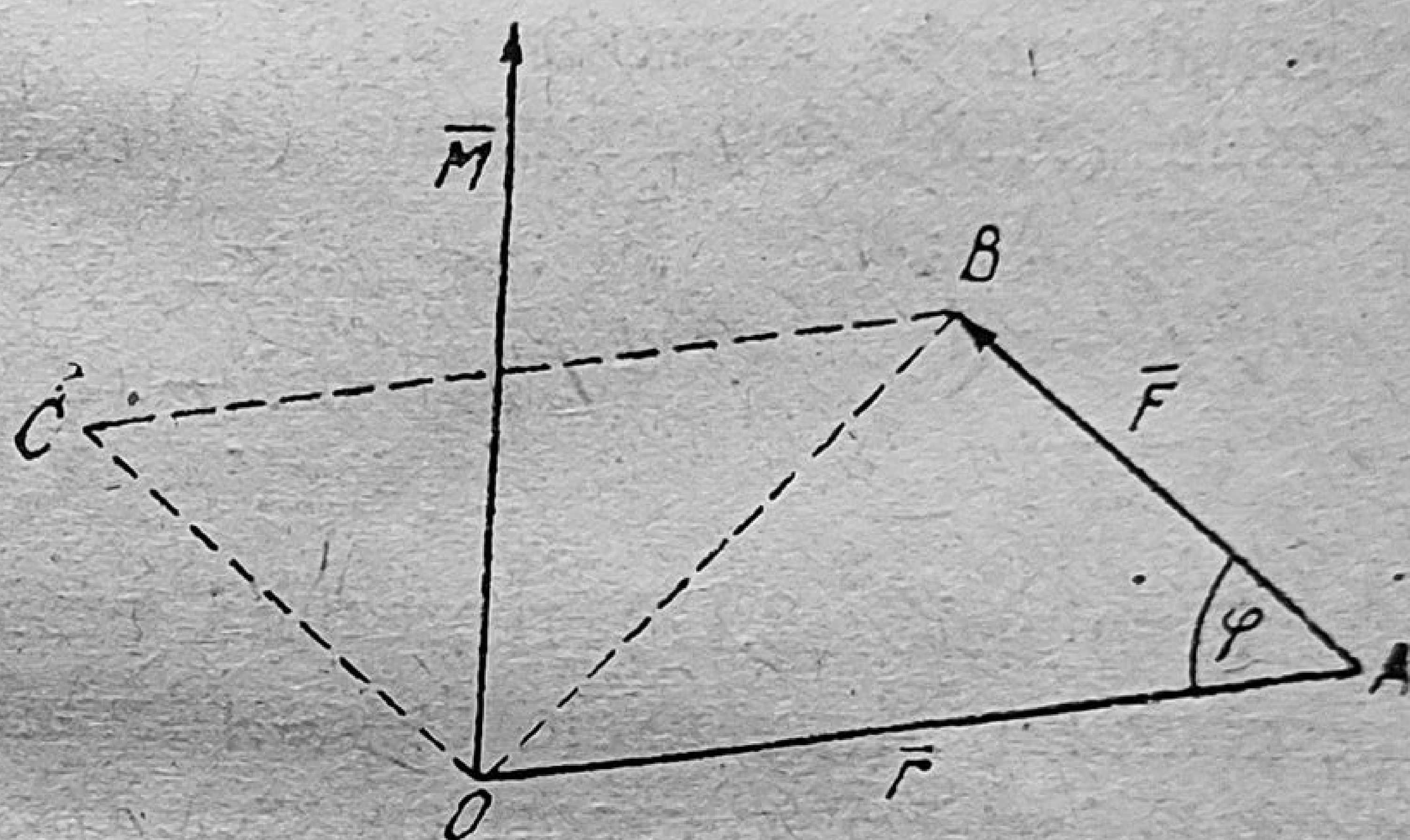


Fig. 26

Efectuînd produsul vectorial $\overline{r}\times\overline{F}$, după regula stabilită la § 12 vom vedea ușor că acest produs vectorial reprezintă ca mărime, direcție și sens vectorul-moment $\overline{M}$, adică

$$\overline{M}=\overline{r}\times\overline{F}. \tag{2.14}$$

Formula (2.14) nu este în contradicție cu definiția forței ca vector alunecător. In adevăr, să deplasăm forța pe suportul ei într-un alt punct A' și vom nota vectorul care unește punctul O cu A' prin $\overline{r}'$. Deoarece $\overline{r}'=\overline{r}+\overline{AA'}$, momentul în raport cu punctul O al forței $\overline{F}$ aplicată în punctul A', va fi

$$\overline{r}'\times\overline{F}=(\overline{r}+\overline{AA'})\times\overline{F}=\overline{r}\times\overline{F}+\overline{AA'}\times\overline{F}=\overline{r}\times\overline{F}$$

deoarece $\overline{AA'}\times\overline{F}=0$. Vom sublinia că în mecanică sîntem nevoiți să determinăm nu numai momentele forțelor ci și momentele altor vectori; toate aceste momente se calculează după formula (2.14).

Să notăm proiecțiile vectorului $\overline{M}$ pe axele de coordonate M_x, M_y și M_z, atunci

$$\overline{M}=\overline{i}M_x+\overline{j}M_y+\overline{k}M_z. \tag{2.15}$$

Aplicînd formulele (1.12), (1.15) și (2.12) vom obține pentru momentul $\overline{M}$ al forței $\overline{F}$ în raport cu originea coordonatelor O, următoarea expresie:

$$\overline{M}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Referindu-ne la formula (2.15) și dezvoltînd determinantul din formula (2.16) după formula (2.10), vom găsi:

$$\left.\begin{aligned} M_x&=yZ-zY, \\ M_y&=zX-xZ, \\ M_z&=xY-yX. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Formulele (2.17) reprezintă proiecțiile M_x, M_y și M_z ale momentului $\overline{M}$ pe axele de coordonate, adică în baza § 11 momentele forței $\overline{F}$ în raport cu axele Ox, Oy și Oz.

Prin analogie cu formulele (1.17) și (1.18) vom obține:

$$\left.\begin{aligned} M_x=M\cos a, \quad M_y=M\cos b, \quad M_z=M\cos c, \\ M=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}, \\ \cos a=\frac{M_x}{M}, \quad \cos b=\frac{M_y}{M}, \quad \cos c=\frac{M_z}{M}. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Din formulele (2.17) rezultă că:

$$M_xX+M_yY+M_zZ=0. \tag{2.19}$$

Relația (2.19) arată că egalitățile (2.17) nu pot fi considerate ca trei ecuații independente cu trei necunoscute x, y, și z, adică din cele trei ecuații (2.17) cu forța dată $\overline{F}$ și momentul ei $\overline{M}$ nu se poate determina un singur punct A (x, y, z). Acest lucru este perfect normal, deoarece forța $\overline{F}$ este un vector alunecător și ecuațiile (2.17) sînt de fapt ecuațiile suportului forței $\overline{F}$.

Exact la fel avem:

$$xM_x+yM_y+zM_z=0. \tag{2.20}$$

De aici rezultă că din cele trei ecuații (2.17) nu se poate determina o singură forță $\overline{F}$, cînd ne este dat momentul $\overline{M}$ și punctul A (x, y, z). În adevăr, notînd unghiul OAB (fig. 28) prin φ, vom obține:

$$M = Fr \sin \varphi,$$

adică

$$F \sin \varphi = \frac{M}{r}.$$

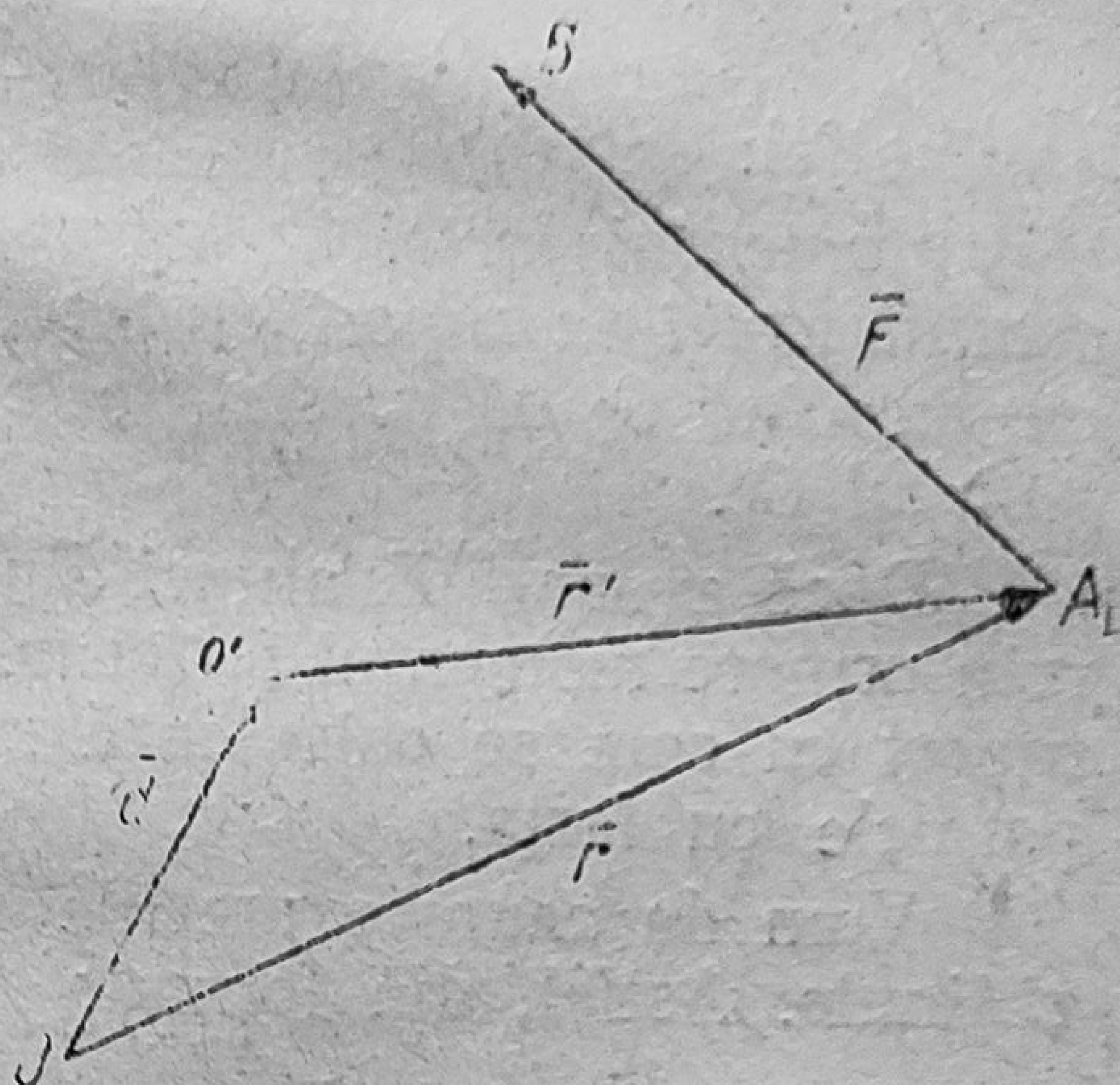


Fig 27.

Astfel se vede că pentru a determina modulul forței $\overline{F}$ trebuie să cunoaștem unghiul φ.

Uneori este necesar să se determine momentul forței în raport cu un punct oarecare O' cu coordonatele (x', y', z') altul decit originea O a coordonatelor. Notînd momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O' prin $\overline{M'}$ și proiecțiile lui prin M'_x, M'_y, M'_z avem:

$$\overline{M'} = \overline{i}M'_x + \overline{j}M'_y + \overline{k}M'_z.$$

Presupunem

$$\overline{O'A} = \overline{r'};$$

atunci după formula (2.14) obținem:

$$\overline{M'} = \overline{r'} \times \overline{F}.$$

Unind punctul O cu punctul O' prin vectorul $\overline{d} = \overline{OO'}$ (fig. 27) avem:

$$\overline{d} = \overline{i}x' + \overline{j}y' + \overline{k}z';$$

mai departe avem:

$$\overline{d} + \overline{r'} = \overline{r},$$

sau

$$\overline{r'} = \overline{r} - \overline{d}.$$

De aici obținem:

$$\overline{M'} = (\overline{r} - \overline{d}) \times \overline{F}. \qquad (2.21)$$

Aplicînd la membrul drept al acestei relații formula (2.6) și ținînd seamă de formula (2.14), vom avea:

$$\overline{M}'=\overline{M}-\overline{d}\times\overline{F}. \tag{2.22}$$

Astfel:

Momentul forței în raport cu punctul O' este egal cu momentul forței în raport cu punctul O minus momentul în raport cu punctul O al acestei forțe mutate paralel cu ea însăși în punctul O'.

Dacă avem $\overline{d}\|\overline{F}$, atunci din formula (2.22) rezultă că $\overline{M}'=\overline{M}$; prin urmare momentul forței nu variază dacă se mută punctul, în raport cu care se calculează momentul, de-a lungul unei drepte paralele cu forța.

Vom da acum expresiile analitice ale formulelor vectoriale obținute. Astfel, din formula (2.21) vom avea:

$$\overline{M}'=\overline{i}M'_x+\overline{j}M'_y+\overline{k}M'_z=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x-x' & y-y' & z-z'\\ X & Y & Z\end{vmatrix} \tag{2.23}$$

adică

$$\left.\begin{aligned}M'_x&=(y-y')Z-(z-z')Y,\\ M'_y&=(z-z')X-(x-x')Z,\\ M'_z&=(x-x')Y-(y-y')X.\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Din formula (2.22) vom obține:

$$\overline{i}M'_x+\overline{j}M'_y+\overline{k}M'_z=\overline{i}M_x+\overline{j}M_y+\overline{k}M_z-\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x' & y' & z'\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$$

sau

$$\left.\begin{aligned}M'_x&=M_x-(y'Z-z'Y),\\ M'_y&=M_y-(z'X-x'Z),\\ M'_z&=M_z-(x'Y-y'X).\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Din formulele (2.25) rezultă că $M'_x=M_x$, $M'_y=M_y$ și $M'_z=M_z$ adică $\overline{M}'=\overline{M}$ dacă

$$y'Z-z'Y=0,\quad z'X-x'Z=0,\quad x'Y-y'X=0$$

adică dacă

$$\frac{x'}{X}=\frac{y'}{Y}=\frac{z'}{Z}.$$

Aceasta este ecuația dreptei care trece prin punctul O și este paralelă cu $\bar{F}$. În adevăr, prin deplasarea punctului O' pe această dreaptă, momentul $\bar{M}$ în raport cu punctul O' nu trebuie să varieze deoarece, prin deplasarea vîrfului unui triunghi de-a lungul unei drepte paralele cu baza, suprafața triughiului nu variază și triunghiul rămîne în același plan.

Este evident că dacă forța se găsește în planul Oxy și căutăm momentul $\bar{M}$ al forței în raport cu un punct din același plan, de exemplu în raport cu punctul O, vectorul $\bar{M}$ va fi paralel cu axa Oz și vom obține:

$$\bar{M}=\bar{k}M_z=\bar{k}\,(xY-yX)\,. \tag{2.26}$$

Pentru un alt punct O' cu coordonatele (x', y') avem

$$\bar{M}'=\bar{k}M_z-\bar{k}\,(x'Y-y'X)\,. \tag{2.27}$$

§ 14. Exemple. Proiecțiile forței $\bar{F}$ pe axele sistemului de coordonate ortogonale $Oxyz$, le vom scrie $\bar{F}$ (X, Y, Z), iar coordonatele punctului de aplicație A, al forței, le vom nota A (x, y, z).

4. Se dă forța $\bar{F}$ $(2, 3, 4)$ cu punctul de aplicație A $(-1, -5, 6)$. Să se găsească momentul $\bar{M}$ (M_x, M_y, M_z) al acestei forțe, în raport cu originea coordonatelor. Avem:

$$\begin{aligned} M_x&=yZ-zY=-5\cdot4-6\cdot3=-38\,,\\ M_y&=zX-xZ=\ \ 6\cdot2+1\cdot4=\ \ 16\,,\\ M_z&=xY-yX=-1\cdot3+5\cdot2=\ \ \ 7\,. \end{aligned}$$

De aici rezultă:

$$M=\sqrt{38^2+16^2+7^2}=\sqrt{1\,749}\,,$$

$$\cos a=\frac{-38}{\sqrt{1\,749}}\,,\quad \cos b=\frac{16}{\sqrt{1\,749}}\,,\quad \cos c=\frac{7}{\sqrt{1\,749}}\,.$$

Efectuînd calculele se va obține:

$$M=41{,}821,\quad a=155°19'02'',\quad b=67°30'23'',\quad c=80°21'52''.$$

5. Să se determine momentul rezultant în raport cu originea O al sistemului de forțe $\bar{F}_1$ $(1, 2, 3)$, $\bar{F}_2$ $(3, 4, 6)$, $\bar{F}_3$ $(6, 7, 8)$ cu punctele de aplicație A_1 $(0, 0, 1)$, A_2 $(3, 0, 0)$, A_3 $(3, 2, 1)$. Vom avea:

$$\begin{aligned} M_{1x}&=y_1Z_1-z_1Y_1=0\cdot3-1\cdot2=-2, & M_{1y}&=z_1X_1-x_1Z_1=1\cdot1-0\cdot3=1,\\ M_{2x}&=y_2Z_2-z_2Y_2=0\cdot6-0\cdot4=0, & M_{2y}&=z_2X_2-x_2Z_2=0\cdot3-3\cdot6=-18,\\ M_{3x}&=y_3Z_3-z_3Y_3=2\cdot8-1\cdot7=9, & M_{3y}&=z_3X_3-x_3Z_3=1\cdot6-3\cdot8=-18, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1z}&=x_1Y_1-y_1X_1=0\cdot2-0\cdot1=0,\\ M_{2z}&=x_2Y_2-y_2X_2=3\cdot4-0\cdot3=12,\\ M_{3z}&=x_3Y_3-y_3X_3=3\cdot7-2\cdot6=9. \end{aligned}$$

Deoarece prima forță F_1 trece prin punctul A_1 care se găsește pe axa Oz, momentul ei M_{1z} în raport cu axa Oz trebuie să fie egal cu zero; deoarece a doua forță $\overline{F}_2$ trece prin punctul A_2 care se găsește pe axa Ox, momentul ei M_{2x} în raport cu axa Ox trebuie să fie egal cu zero; egalitatea cu zero a acestor două momente rezultă și din calculele precedente. De aici, pentru proiecția momentului rezultant, găsim:

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} = -2 + 0 + 9 = 7,$$
$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + M_{3y} = 1 - 18 - 18 = -35,$$
$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} = 0 + 12 + 9 = 21.$$

Prin urmare avem:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{7^2 + 35^2 + 21^2} = \sqrt{1\,715},$$

și

$$\cos a = \frac{7}{\sqrt{1\,715}}, \quad \cos b = \frac{-35}{\sqrt{1\,715}}, \quad \cos c = \frac{21}{\sqrt{1\,715}}.$$

Efectuînd calculele, obținem:

$$M = 41{,}413; \quad a = 80°16'07''; \quad b = 147°41'18''; \quad c = 59°31'47''.$$

6. Cosinușii unghiurilor a doi vectori liberi $\overline{a}_1$ și $\overline{a}_2$ cu axele ortogonale $Oxyz$ sînt respectiv $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ și $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$; să se găsească sinusul unghiului φ dintre vectorii $\overline{a}_1$ și $\overline{a}_2$ $(\pi \geqslant \varphi \geqslant 0)$. Deplasăm vectorii $\overline{a}_1$ și $\overline{a}_2$ paralel cu ei înșiși într-un punct oarecare A din spațiu fie $\overline{a}_1^0$ și $\overline{a}_2^0$ vectorii lor unitari; este evident că proiecțiile vectorilor $\overline{a}_1^0$ și $\overline{a}_2^0$ pe axele de coordonate vor fi respectiv egale cu $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ și $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Să formăm produsul vectorial $\overline{a}_1^0 \times \overline{a}_2^0$; el va fi egal:

$$\overline{a}_1^0 \times \overline{a}_2^0 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \overline{i}(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) + \overline{j}(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) + \overline{k}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2).$$

Deoarece

$$|\overline{a}_1^0 \times \overline{a}_2^0| = 1 \cdot 1 \sin\varphi = \sin\varphi,$$

rezultă de aici:

$$\sin\varphi = \sqrt{(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2}.$$

CAPITOLUL III

LEGATURI ŞI REACŢIUNI. PRODUS SCALAR

§ 15. Despre diferitele tipuri de forţe. În paragrafele precedente la examinarea şi descrierea proprietăţilor forţelor, ne-am imaginat un fir fixat într-un punct oarecare al unui corp de care se trage, sau o bară rigidă cu care se împinge corpul şi aşa mai departe. De aici am ajuns la reprezentarea forţei ca vector care se poate desena ca un segment de dreaptă. Însă, observaţiile asupra diferitelor fenomene din natură şi raţiunea ne conving că reprezentarea forţei este mult mai complexă şi anume, forţele pot fi împărţite în trei tipuri: *forţe de volum, forţe distribuite pe o suprafaţă şi forţe concentrate.* Se numeşte forţă de volum acea forţă care este răspîndită în întregul volum al corpului, de exemplu, forţa greutăţii. În adevăr, nu există nici cea mai mică părticică a unui corp greu care să nu aibă greutate şi deci, asupra căreia să nu se aplice forţa greutăţii. Forţa distribuită pe o suprafaţă este acea forţă care se aplică în punctele de pe suprafaţa corpului, de exemplu, forţa de frecare. În sfîrşit, forţă concentrată se numeşte forţa aplicată într-un punct al corpului. La fel ca şi punctele, curbele şi suprafeţele geometrice, forţele concentrate şi cele distribuite pe o suprafaţă sînt pure abstracţii; reale sînt numai forţele de volum. Totuşi, studiul forţelor concentrate şi al celor distribuite pe o suprafaţă este tot atît de raţional în mecanică ca şi studiul punctelor, curbelor şi suprafeţelor în geometrie. Dealtfel, în acest curs vom presupune clară ideea de forţă concentrată şi pornind de la aceasta vom împărţi suprafaţa sau volumul în elemente infinit de mici asupra cărora se aplică cîte o forţă concentrată, apoi trecînd la limită vom ajunge la forţele distribuite pe o suprafaţă sau la cele de volum.

§ 16. Legăturile şi reacţiunile introduse de ele. Dacă un punct material se poate deplasa în orice direcţie sau dacă un corp poate executa orice mişcare de translaţie şi de rotaţie,

atunci se spune că punctul material sau corpul este *liber*. Dacă însă el nu poate executa orice fel de mișcare, se spune că este supus anumitor legături. De exemplu, o mărgea înșirată pe un fir se poate deplasa numai în lungul lui; deci, mărgeaua este supusă la o legătură. Dacă, de exemplu, un punct trebuie să rămînă pe o suprafață, atunci punctul este supus la o legătură realizată de această suprafață. O ușă care se mișcă în balamale este limitată în mișcările ei de legăturile realizate prin fixarea a două puncte de pe ușă în balamale. Dacă corpul sau punctul nu pot părăsi legătura, atunci legătura se numește *bilateră*, astfel, de exemplu, este cazul mărgelei trasă pe fir sau cazul ușii care se mișcă în balamale. Dacă însă, corpul sau punctul, prin anumite mișcări poate să părăsească legătura într-o direcție, atunci legătura se numește *unilateră*. De exemplu, o piatră așezată pe o masă, se poate deplasa pe suprafața mesei, nu poate pătrunde în masă, dar se poate ridica, de pe masă, și, prin această mișcare, poate părăsi legătura. Prin urmare, piatra așezată pe masă este supusă unei legături unilatere. Trebuie subliniat că noi considerăm legăturile, din punct de vedere fizic, indestructibile, și de aceea nu socotim posibilă o mișcare prin care piatra ar pătrunde în scîndura mesei.

Să considerăm o masă care stă pe o pardoseală orizontală. Din cauza greutății ei, picioarele mesei apasă pardoseala și conform principiului acțiunii și reacțiunii, pardoseala apasă cu aceeași forță fiecare picior al mesei. Dacă masa nu ar avea greutate, ea nu ar apăsa pe pardoseală și prin urmare nici pardoseala nu ar acționa asupra picioarelor mesei. Așezînd pe masă o greutate oarecare, vom modifica presiunea picioarelor mesei pe pardoseală și deci și forțele cu care acționează pardoseala asupra picioarelor mesei se vor modifica. De aici tragem concluzia: dacă asupra unui corp sau punct material în repaus supus la legături, acționează forțe, atunci corpul sau punctul va acționa asupra legăturilor și la rîndul lor legăturile vor acționa asupra corpului sau punctului. Aceste forțe de reacțiune ale legăturilor se numesc *forțe de legătură sau reacțiuni*. Există reacțiuni numai atunci cînd *sub acțiunea forțelor efectiv aplicate*, corpul sau punctele materiale în repaus acționează asupra legăturilor; îndată ce acțiunea forțelor asupra corpurilor sau asupra punctelor materiale, aflate în repaus dispare, dispare în același timp și reacțiunea.

Forțele aplicate asupra unui corp material, datorită cărora corpul material acționează asupra legăturilor — și legăturile

dezvoltă reacțiuni — se numesc *forțe active*; reacțiunile, însă se mai numesc și *forțe pasive*, pentru că existența lor este condiționată de prezența forțelor active, de care depinde, în general mărimea, direcția și sensul lor.

În unele cazuri este posibil să se găsească imediat reacțiunile ca: mărime, direcție și sens. Să examinăm, de exemplu, un punct material greu pe un plan orizontal. Este evident că forța cu care acel punct apasă pe plan este egală, dar de sens contrar, cu aceea cu care planul apasă asupra punctului; astfel, reacțiunea produsă de plan este egală ca mărime și direcție dar de sens contrar cu greutatea punctului. Vom sublinia că presiunea punctu-

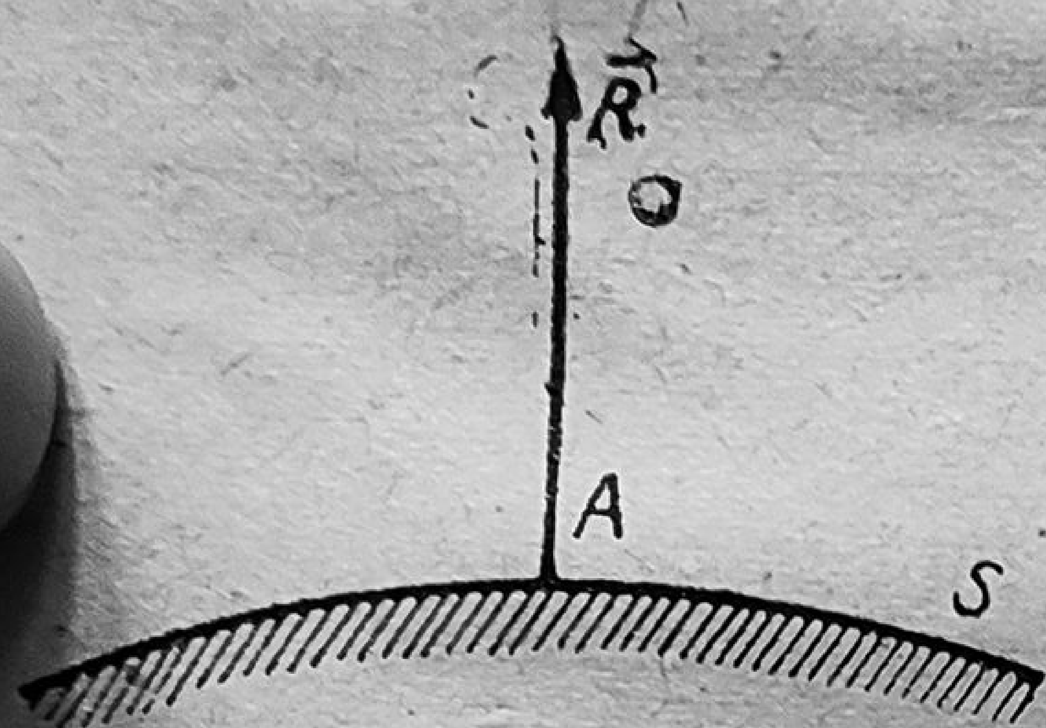


Fig. 28

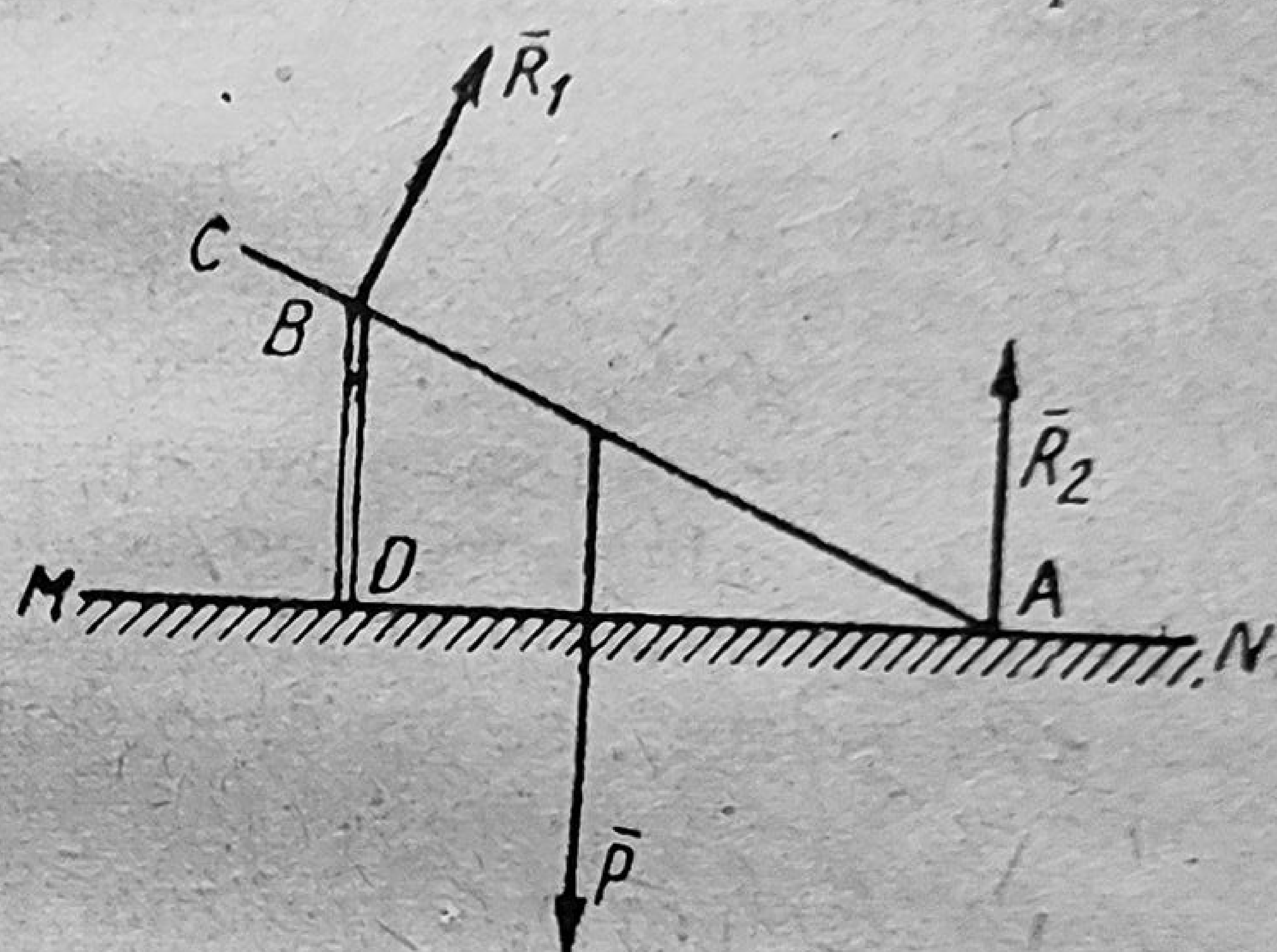


Fig. 29

lui pe plan și reacțiunea planului, forțe egale ca mărime și direcție și opuse ca sens sînt aplicate la corpuri diferite; prima forță este aplicată planului și a doua punctului; de aceea, studiind forțele aplicate acestui punct material nu se poate elimina reacțiunea planului, socotind-o echilibrată de presiunea punctului pe plan.

În majoritatea cazurilor reacțiunile sînt necunoscute ca mărime, direcție și sens. Totuși, se pot indica un număr de cazuri simple cînd direcția și sensul reacțiunii se pot stabili, independent de forțele active.

Să examinăm cele mai importante din aceste cazuri.

Dacă punctul sau corpul pot luneca pe o suprafață sau pe o curbă, fără frecare, atunci reacțiunea este dirijată normal pe suprafața sau pe curba, de-a lungul căreia se poate produce lunecarea.

În adevăr, să presupunem că punctul A se găsește pe suprafața S (fig. 28). Dacă nu există frecare atunci nu există nici o forță situată în planul tangent la suprafață, care să împiedice

mișcarea punctului A pe suprafața S. Prin urmare, reacțiunea $\overline{R}$ trebuie să fie dirijată după normala la suprafață.

Dacă suprafața sau curba care limitează un corp poate luneca fără frecare pe un punct fix sau pe un corp, atunci reacțiunea este dirijată normal pe acea suprafață sau linie.

Explicația este aceeași ca în cazul precedent. Exemplul reprezentat în fig. 29 cuprinde ambele cazuri; o bară grea ABC de greutate $\overline{F}$ poate luneca fără frecare cu extremitatea ei A pe un plan orizontal, bara rezemîndu-se pe stîlpul DB. Reacțiunea $\overline{R}_1$ în punctul B este dirijată după normală la bara ABC, deși reacțiunea $\overline{R}_2$ în punctul A este dirijată după normală la planul orizontal MN.

Cu toate că lunecarea fără frecare nu există în realitate, totuși, dacă forțele de frecare sînt mici în comparație cu celelalte forțe date în problemă, de multe ori se pot neglija forțele de frecare introducîndu-se convențional, legături fără frecare, așa cum s-a făcut adineaori. Legăturile fără frecare se numesc *legături ideale;* în volumul II al cursului de față în capitolul „Lucrul mecanic și putere“, se va da o definiție mai generală a legăturilor ideale.

Dacă legătura este realizată cu ajutorul unui fir, reacțiunea este dirijată în lungul firului.

În adevăr, să ne închipuim punctul greu A de greutate $\overline{P}$ atîrnat la capătul firului AB (fig. 30); este evident că reacțiunea este forța $\overline{T}$ dirijată în lungul firului, egală ca mărime și direcție cu greutatea $\overline{P}$ a punctului A și avînd sensul contrar. Dacă, firul greu nu va fi vertical ci înclinat față de orizontală, atunci sub acțiunea greutății firul va căpăta o formă curbă; în acest caz forța T de la extremitatea lui fiind egală ca mărime și direcție cu forța aplicată la acest capăt dar în sens opus, va fi totodată așezată de-a lungul tangentei la fir în extremitatea lui. Așa este, de exemplu, cazul firului telegrafic întins între doi stîlpi. In cursul de față vom studia firele cu greutate proprie mică și cu grosime atît de mică încît vom putea neglija totdeauna greutatea proprie a firelor; de aceea, vom presupune că firele întinse sînt rectilinii, iar reacțiunile, dirijate în lungul firelor.

Dacă legătura este realizată prin intermediul unei bare rigide, a cărei greutate se neglijează și care este articulată la capete, reacțiunea este dirijată în lungul barei.

În adevăr să ne închipuim bara AB articulată în punctul B; de bară se atîrnă punctul greu A cu greutatea $\overline{P}$; vom obține aici același caz, ca și în fig. 30. Dacă la capătul A al barei AB, suspendat prin intermediul articulației B, vom apăsa cu forța $\overline{F}$, dirijată în lungul barei AB, atunci se va dezvolta reacțiunea $\overline{T}$, egală ca modul și direcție cu forța $\overline{F}$ și dirijată în lungul barei în sens contrar forței $\overline{F}$ (fig. 31).

Dacă mărimea forței F va depăși o anumită limită, bara reală și materială AB se va deforma; forma deformată a barei se determină în acest caz cu ajutorul teoriei rezistenței materialelor. În cursul de față forța $\overline{F}$ se va presupune totdeauna mai mică decît această forță limită și bara va rămîne nedeformată.

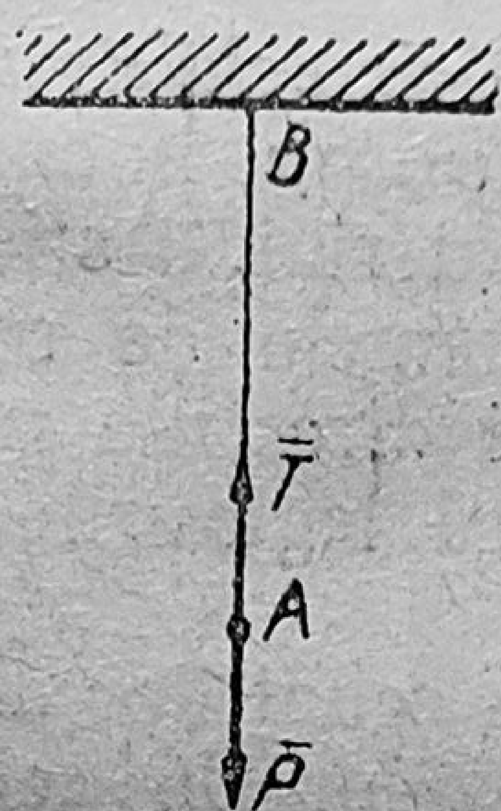


Fig. 30

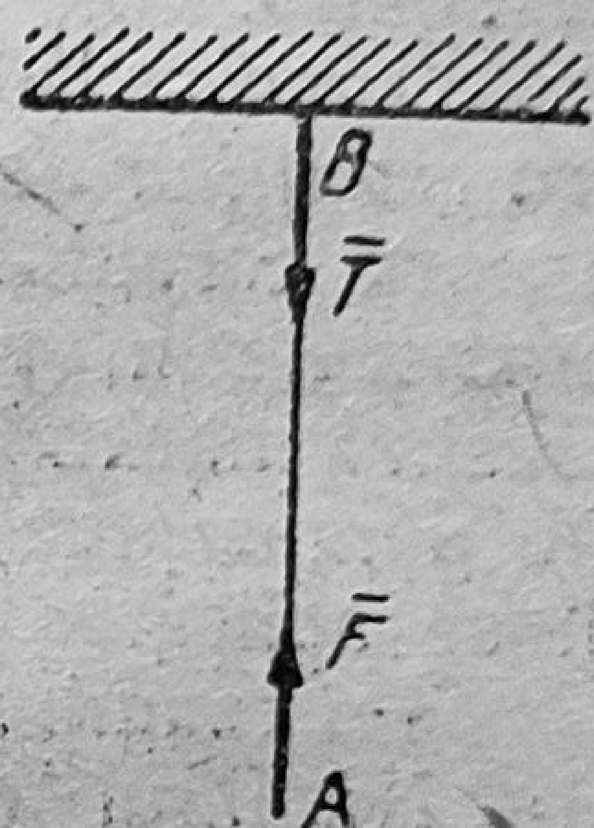


Fig. 31

În cazurile studiate anterior, direcția reacțiunii se poate determina din caracterul legăturilor, independent de forțele active.

Totuși, în cazul general, reacțiunile sînt necunoscute atît ca mărime cît și ca direcție. Să examinăm, de exemplu, o ușă grea avînd două balamale; tragem de mînerul ușii, căutînd s-o scoatem din balamale. Evident că ușa acționează cu o anumită forță asupra balamalelor, iar reacțiunea balamalelor va fi egală ca mărime și direcție cu această forță, dar de sens opus; în cazul acesta însă nu cunoaștem nici mărimea acestor reacțiuni, nici direcția după care ele acționează.

§ 17. Problema de bază a staticii. În paragraful precedent am văzut că toate efectele legăturilor se reduc, din punct de vedere mecanic, la reacțiunea pe care ele o dezvoltă. De aceea, împreună cu forțele efectiv aplicate asupra punctelor și corpurilor materiale, vom considera că acționează în majoritatea cazurilor și reacțiuni care vor înlocui, din punct de vedere mecanic, acțiunea legăturilor asupra punctelor și corpurilor materiale. Este evident că *adăugînd la forțele date reacțiunile introduse de legături, punctele și corpurile materiale pot fi considerate libere.*

Problema de bază a staticii constă în a afla dacă punctele materiale şi corpurile pot rămîne în echilibru absolut, sub acţiunea forţelor date şi a reacţiunilor introduse de legături.

Este evident că, pentru aceasta este suficient să cunoaştem cazurile în care forţele aplicate unui punct material sau unui solid liber se echilibrează. De obicei, în cursul de statică, această problemă nu se rezolvă deodată pentru un sistem oarecare de forţe; de cele mai multe ori cazul general se tratează treptat, studiind iniţial cazul forţelor concurente, al forţelor paralele, apoi sistemul plan de forţe şi în cele din urmă sistemul de forţe în spaţiu.

Orice problemă de echilibru se reduce la formarea şi rezolvarea ecuaţiilor de echilibru, în care intră toate forţele ce acţionează asupra corpului material. Astfel, reacţiunile sînt în general necunoscute în problemele de statică şi ele trebuie determinate. Găsind mărimile şi direcţiile reacţiunilor putem, de exemplu, să ne dăm seama dacă legăturile vor rezista sau nu la sarcina ce li se aplică.

La examinarea ecuaţiilor de echilibru pot avea loc trei cazuri: 1) Numărul ecuaţiilor de echilibru poate fi mai mare decît numărul reacţiunilor necunoscute; în acest caz eliminînd din ecuaţiile de echilibru reacţiunile, vom obţine ecuaţii care leagă între ele caracteristicile mecanice şi geometrice date ale corpului material: echilibrul va fi posibil numai după satisfacerea acestor ecuaţii. De aceea, aceste ecuaţii care nu conţin reacţiunile necunoscute se numesc *condiţii de echilibru.* 2) Dacă numărul ecuaţiilor de echilibru este egal cu numărul de reacţiuni necunoscute, în aşa fel încît din ele se pot determina toate reacţiunile, nu există condiţii de echilibru şi din ecuaţiile de echilibru se determină numai reacţiunile necunoscute. Cazul 1) şi 2) poartă denumirea comună de *cazuri static determinate*. 3) Dacă din ecuaţiile de echilibru nu se pot determina toate reacţiunile, adică ecuaţiile sînt mai puţine decît reacţiunile necunoscute, atunci avem un caz *static nedeterminat*. În cazurile static nedeterminate nu sînt suficiente teoremele din statică şi pentru determinarea tuturor reacţiunilor sîntem nevoiţi să recurgem la studiul proprietăţilor elastice ale corpurilor, de aceea, studiul cazurilor static nedeterminate, este expus în teoria rezistenţei materialelor şi nu ne vom ocupa de ele în cursul de mecanică teoretică.

§ 18. Produsul scalar. După cum vom vedea mai departe, avem adesea de calculat produsul modulelor a doi vectori prin cosinusul unghiului cuprins între ei. În particular, proiecţia unui

vector pe o axă oarecare se poate interpreta numeric ca produsul modulului vectorului dat cu modulul vectorului unitar al axei și cu cosinusul unghiului cuprins între acești vectori. Fie $\overline{a}$ și $\overline{b}$ doi vectori și φ unghiul format de ei; vom examina aici produsul

$$ab \cos \varphi. \tag{3.1}$$

Deoarece astfel de operații sînt după cum vom vedea mai jos, comutative și distributive, operația de obținere a expresiei scalare $ab \cos \varphi$ din doi vectori $\overline{a}$ și $\overline{b}$ a primit denumirea de *produs scalar*. Produsul scalar se reprezintă prin simbolul

$$\overline{a} \cdot \overline{b}, \tag{3.2}$$

așa că vom avea:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = ab \cos \varphi. \tag{3.3}$$

Deci:

Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul modulelor lor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre vectori.

Este evident că produsul scalar a doi vectori se mai poate exprima și ca *produs al modulului unui vector prin proiecția celuilalt vector pe el.*

În funcție de valoarea unghiului φ, produsul scalar definit prin formula (3.3) poate fi pozitiv $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, negativ $\left(\varphi > \frac{\pi}{2}\right)$, sau egal cu zero $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Dacă produsul scalar a doi vectori este egal cu zero, atunci acești vectori sînt perpendiculari între ei.

Din formulele (3.3) rezultă că produsul scalar este o operație comutativă deoarece:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = ab \cos \varphi = \overline{b} \cdot \overline{a}.$$

Observăm că pe baza celor expuse pînă aici trebuie să avem:

$$\overline{i} \cdot \overline{j} = 0, \quad \overline{j} \cdot \overline{k} = 0, \quad \overline{k} \cdot \overline{i} = 0. \tag{3.4}$$

Dacă $\overline{b} = \overline{a}$, atunci

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{a} = aa \cos 0 = a^2,$$

adică produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul modulului acestui vector. De aici urmează că trebuie să avem:

$$\overline{i} \cdot \overline{i} = 1; \quad \overline{j} \cdot \overline{j} = 1; \quad \overline{k} \cdot \overline{k} = 1. \tag{3.5}$$

Să arătăm acum că produsul scalar este distributiv. Fie dați trei vectori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ și $\overline{b}$. Trebuie să demonstrăm că:

$$\overline{a}_1 \cdot \overline{b} + \overline{a}_2 \cdot \overline{b} = (\overline{a}_1 + \overline{a}_2) \cdot \overline{b}.$$

Vom nota unghiurile între vectorii $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ și $\overline{c} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$, cu vectorul $\overline{b}$, respectiv φ_1, φ_2 și φ. După cum am văzut la § 5, proiecția vectorului rezultant este egală cu suma proiecțiilor vectorilor componenți, adică:

$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 = c \cos \varphi,$$

sau

$$ba_1 \cos \varphi_1 + ba_2 \cos \varphi_2 = bc \cos \varphi,$$

adică

$$\overline{a}_1 \cdot \overline{b} + \overline{a}_2 \cdot \overline{b} = (\overline{a}_1 + \overline{a}_2) \cdot \overline{b}. \tag{3.6}$$

Aplicînd regula de comutativitate vom obține:

$$\overline{b} \cdot \overline{a}_1 + \overline{b} \cdot \overline{a}_2 = \overline{b} \cdot (\overline{a}_1 + \overline{a}_2). \tag{3.7}$$

Repetînd aceleași raționamente care se folosesc la deducerea regulii de înmulțire a două polinoame, vom avea:

$$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{c} + \overline{d}) = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{d} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{d}. \tag{3.8}$$

Bazîndu-ne pe formula (3.8) nu este greu să obținem expresia produsului scalar a doi vectori exprimați prin proiecțiile lor pe axe și prin vectorii unitari $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. În adevăr fie dat:

$$\overline{a} = \overline{i}a_x + \overline{j}a_y + \overline{k}a_z, \quad \overline{b} = \overline{i}b_x + \overline{j}b_y + \overline{k}b_z.$$

Avem după formula (3.8):

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= (\overline{i}a_x + \overline{j}a_y + \overline{k}a_z) \cdot (\overline{i}b_x + \overline{j}b_y + \overline{k}b_z) = \\ &= (\overline{i} \cdot \overline{i}) a_x b_x + (\overline{i} \cdot \overline{j}) a_x b_y + (\overline{i} \cdot \overline{k}) a_x b_z + \\ &+ (\overline{j} \cdot \overline{i}) a_y b_x + (\overline{j} \cdot \overline{j}) a_y b_y + (\overline{j} \cdot \overline{k}) a_y b_z + \\ &+ (\overline{k} \cdot \overline{i}) a_z b_x + (\overline{k} \cdot \overline{j}) a_z b_y + (\overline{k} \cdot \overline{k}) a_z b_z.\end{aligned}$$

De aici, aplicînd formulele (3.4) și (3.5) vom obține:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3.9}$$

Formula (3.9) poate fi exprimată în felul următor:

Produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor proiecțiilor de același nume a acestor vectori pe trei axe perpendiculare între ele.

Din formula (3.9) avem:

$$a \cdot b \cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z ,$$

sau

$$\cos\varphi = \frac{a_x}{a}\,\frac{b_x}{b} + \frac{a_y}{a}\,\frac{b_y}{b} + \frac{a_z}{a}\,\frac{b_z}{b} .$$

Notînd prin $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ și $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ unghiurile formate de vectorii $\overline{a}$ și $\overline{b}$ cu axele de coordonate și aplicînd formulele (1.5) vom obține:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 . \qquad (3.10)$$

Prin urmare:

Cosinusul unghiului dintre doi vectori este egal cu suma produselor cosinușilor unghiurilor formate de acești vectori cu axele de coordonate.

Expresiile care nu se schimbă prin transformarea sistemului ortogonal de coordonate într-un alt sistem se numesc *invarianți*. Deoarece mărimile definite prin egalitățile,

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 ,$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = ab \cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z ,$$

nu depind nici de poziția originei coordonatelor, nici de direcția axelor de coordonate, următoarele expresii vor fi invariante:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2 ,$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'} ,$$

în care indicii x, y, z se referă la sistemul ortogonal de coordonate $Oxyz$ și indicii x' y' z' la alt sistem ortogonal de coordonate $O'x'y'z'$.

Știm că momentul $\overline{M}$ al forței $\overline{F}$ este perpendicular pe vectorul $\overline{F}$ și pe vectorul de poziție $\overline{r}$ al originei vectorului forță și, de aceea trebuie să avem:

$$\overline{M} \cdot \overline{F} = 0, \qquad \overline{M} \cdot \overline{r} = 0,$$

sau în baza formulei (3.9):

$$M_x X + M_y Y + M_z Z = 0 , \quad x M_x + y M_y + z M_z = 0 ,$$

adică vom obține formulele (2.19) și (2.20). Vedem cît de repede se obțin formulele (2.19) și (2.20) cu ajutorul produsului scalar.

§ 19. Exemple. 7. Doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$, sînt definiți prin proiecțiile lor $\bar{a}$ (2, 4, 6) și $\bar{b}$ (3, 7, 8) pe axele sistemului de coordonate ortogonale *Oxyz*. Să se afle proiecția celui de-al doilea vector, b, pe direcția primului vector. Notînd prin φ unghiul dintre vectori, avem:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=ab\cos\varphi;$$

de aici obținem:

$$b\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Introducînd valorile numerice găsim:

$$b\cos\varphi=\frac{2\cdot3+4\cdot7+6\cdot8}{\sqrt{2^2+4^2+6^2}}=\frac{82}{\sqrt{56}}=\frac{41}{\sqrt{14}}=10{,}958.$$

8. Fie a, b, c și m, n, p, șase numere arbitrare, să se verifice următoarea identitate:

$$(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)-(am+bn+cp)^2=(bp-cn)^2+(cm-ap)^2+(an-bm)^2.$$

Această identitate se numește *identitatea lui Lagrange;* din ea rezultă că partea din stînga a acestei identități este totdeauna pozitivă sau egală cu zero. Să considerăm (a, b, c) și (m, n, p) ca proiecțiile a doi vectori pe axele sistemului rectangular de coordonate *Oxyz;* atunci modulele acestor vectori vor fi egale

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \qquad \sqrt{m^2+n^2+p^2}.$$

Notînd prin $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ și $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ cosinușii unghiurilor acestor vectori cu axele de coordonate, avem:

$$\alpha_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \alpha_2=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\beta_1=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \beta_2=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\gamma_1=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \gamma_2=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Împărțind ambele părți ale identității care trebuie demonstrată cu produsul $(a^2+b^2+c^2)\cdot(m^2+n^2+p^2)$ vom obține:

$$1-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2=(\beta_1\gamma_1-\gamma_1\beta_2)^2+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)^2+(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2,$$

sau

$$1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi.$$

In acest fel identitatea este verificată [1].

9. Să efectuăm produsul $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$. Avem:

$$\bar{a}=\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z, \qquad \bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

---

[1] V. exemplul 6, cap. II (N.R.).

La calcularea produsului căutat este necesar ca minorii determinantului care reprezintă produsul $\overline{b} \times \overline{c}$ să-i înmulțim respectiv cu a_x, a_y și a_z adică să înlocuim $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ cu a_x, a_y și a_z; în acest fel vom obține:

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

CAPITOLUL IV

FORȚE CONCURENTE

§ 20. Rezultanta și echilibrul unui sistem de forțe concurente. În tot cursul staticii, precum și în celelalte secțiuni ale mecanicii, vom avea de-a face cu cazul unui solid absolut rigid căruia i se aplică un sistem oarecare de forțe. Vom vedea că un sistem complex de forțe poate fi înlocuit după anumite legi cu un sistem simplu, a cărui acțiune asupra solidului să fie aceeași cu acțiunea sistemului complex. Această înlocuire a sistemului complex cu unul simplu dar cu același efect, se numește *reducerea* sistemului de forțe. Dacă sistemul de forțe se reduce numai la o singură forță, atunci această singură forță se numește *rezultanta* sistemului de forțe, iar reducerea sistemului de forțe se numește în acest caz *adunarea (compunerea) forțelor*. În mod general, dacă vreun sistem mecanic de elemente cu aceeași dimensiune fizică poate fi înlocuit printr-un singur element cu aceeași dimensiune, această înlocuire se numește în mecanică *adunare* (compunere) prin analogie cu adunarea aritmetică, unde suma are aceeași dimensiune ca și termenii care se adună. În acest fel noțiunea de adunare este mai restrînsă decît noțiunea de reducere pentru că, prin reducere, sistemul mecanic al elementelor cu aceeași dimensiune fizică se înlocuiește printr-un sistem care poate să includă și elemente cu o altă dimensiune. Să presupunem că unui solid absolut rigid i se aplică un sistem de *forțe concurente* $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... adică, forțe ale căror suporturi se întretaie într-un singur punct. Acest punct comun de intersecție al suporturilor forțelor concurente, se numește punct de concurență. Să notăm cu A punctul de concurență al forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... și să mutăm aceste forțe de-a lungul suporturilor lor, în acest punct A, operație care se poate face conform celor arătate la § 2. Atunci, după cele expuse în § 3, toate forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... se vor putea aduna geometric, și, vom obține în punctul A, forța rezultantă $\overline{F}$, care se numește *rezultanta sistemului de forțe concurente*. După

formulele (1.12) şi (1.19) pentru rezultanta $\bar{F}$ şi proiecţiile ei X, Y şi Z, avem:

$$\left.\begin{array}{c}\bar{F}=\sum_n \bar{F}_n ,\\ X=\sum_n X_n ,\ Y=\sum_n Y_n ,\ Z=\sum_n Z_n .\end{array}\right\} \quad (4.1)$$

Dacă rezultanta sistemului de forţe concurente va fi egală cu zero, atunci este evident că sistemul de forţe concurente considerat nu poate modifica nici starea de repaus nici starea de mişcare a corpului material; de aceea vom spune că sistemul de forţe concurente este în echilibru. Evident că pentru aceasta este necesar şi suficient ca *poligonul forţelor, format de forţele concurente $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, ... să fie închis*. În acest fel ecuaţia de echilibru în cazul forţelor concurente în forma vectorială, are următorul aspect:

$$\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3+\ldots=\sum_n \bar{F}_n=0 . \quad (4.2)$$

În forma analitică ecuaţiile de echilibru, vor fi:

$$\left.\begin{array}{l}X_1+X_2+X_3+\ldots=\sum_n X_n=0 ,\\ Y_1+Y_2+Y_3+\ldots=\sum_n Y_n=0 ,\\ Z_1+Z_2+Z_3+\ldots=\sum_n Z_n=0 .\end{array}\right\} \quad (4.3)$$

Deoarece, drept axe de coordonate se pot lua trei drepte concurente şi necoplanare chiar dacă nu sînt perpendiculare între ele (în ultimul caz vom avea un sistem de coordonate oblice) ajungem la următoarea regulă:

Pentru ca sistemul de forţe concurente să fie în echilibru, este necesar şi suficient ca suma proiecţiilor tuturor forţelor pe trei direcţii neparalele între ele şi necoplanare să fie egală cu zero.

Dacă toate forţele concurente sînt situate în acelaşi plan, atunci, în loc de trei direcţii pentru formarea proiecţiilor forţelor este suficient să se ia numai două direcţii care se află în acelaşi plan cu forţele.

In cazul a trei forţe concurente, poligonul forţelor se reduce în cazul echilibrului la un triunghi; deoarece triunghiul este o figură plană, rezultă de aici că *trei forţe concurente se pot afla în echilibru numai în caz cînd ele sînt situate în acelaşi plan.* Relaţiile (4.2) şi (4.3) sînt ecuaţiile de bază pentru dezvoltarea problemelor de echilibru al unui sistem de forţe concurente.

§ 21. Teorema lui Varignon. Am introdus în § 10 definiția momentului rezultant al unui sistem de forțe; prin această definiție, momentul rezultant al unui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare, se numește suma geometrică a momentelor forțelor acestui sistem, în raport cu același punct. De aceea, dacă $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3, \ldots$ sînt vectorii de poziție ai punctelor de aplicare $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ale forțelor $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots$ momentul rezultant M al acestui sistem de forțe în raport cu punctul 0 este suma:

$$\overline{M}=\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3+\ldots=\sum_n \overline{M}_n=\sum_n \overline{r}_n\times\overline{F}_n. \tag{4.4}$$

Pentru cazul unui sistem de forțe concurente, momentul rezultant are o interpretare mecanică simplă, cunoscută sub numele de teorema lui Varignon. Fie $\overline{F}_1, \overline{F}_2, F_3, \ldots$ - forțele concurente avînd punctul de concurență în A; să mutăm punctele de aplicare ale acestor forțe de-a lungul suportului lor pînă în punctul de concurență A, avînd vectorul de poziție $\overline{r}=\overline{OA}$.

Atunci avem:

$$\overline{M}_1=\overline{r}\times\overline{F}_1,\quad \overline{M}_2=\overline{r}\times\overline{F}_2,\quad \overline{M}_3=\overline{r}\times\overline{F}_3,\ \ldots$$

De aici vom avea:

$$\overline{M}=\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3+\ldots=\overline{r}\times\overline{F}_1+\overline{r}\times\overline{F}_2+\overline{r}\times\overline{F}_3+\ldots,$$

sau după formula (2.7):

$$\overline{M}=\overline{r}\times(\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\ldots)=\overline{r}\times\sum_n\overline{F}_n.$$

Aplicînd la partea dreaptă a acestei relații prima din formulele (4.1) vom obține:

$$\overline{M}=\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3+\ldots=\overline{r}\times\overline{F}. \tag{4.5}$$

Partea dreaptă a formulei (4.5) reprezintă momentul rezultantei față de punctul O; astfel *teorema lui Varignon pentru un sistem de forțe concurente* se enunță în modul următor:

Momentul rezultant în raport cu un punct oarecare al unui sistem de forțe concurente, este egal cu momentul rezultantei, în raport cu același punct.

Vom dovedi că, servindu-ne de teorema lui Varignon, se pot obține formulele (2.17) pentru proiecțiile M_x, M_y și M_z ale momentului M al forței $\overline{F}$. Fie dată forța F. S-o descompunem în

trei componente $\overline{X}$, $\overline{Y}$ și $\overline{Z}$, paralele cu axele de coordonate (fig. 32). Pe baza teoremei lui Varignon, momentul în raport cu punctul O al forței rezultante $\overline{F}$ este egal cu suma geometrică a momentelor, în raport cu punctul O, ale forțelor componente $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$. Dar, din formulele (4.4) și (2.15), urmează:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_{1x}+M_{2x}+M_{3x}+\cdots=\sum_n M_{nx}\,, \\ M_y &= M_{1y}+M_{2y}+M_{3y}+\cdots=\sum_n M_{ny}\,, \\ M_z &= M_{1z}+M_{2z}+M_{3z}+\cdots=\sum_n M_{nz}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Formulele (4.6) se pot interpreta în felul următor:

Momentul rezultantei forțelor concurente în raport cu o axă oarecare este egal cu suma momentelor în raport cu aceeași axă a forțelor componente.

Vom căuta, de exemplu, momentul $\overline{M}_z$ al forței $\overline{F}$ în raport cu axa Oz. Din ultima formulare a teoremei lui Varignon, valabilă pentru orice fel de axe, deducem că pentru determinarea momentului $\overline{M}_z$ trebuie să se găsească momentele forțelor $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ în raport cu axa Oz și să le adunăm. Deoarece forța $\overline{Z}$ este paralelă cu axa Oz, momentul ei în raport cu axa Oz este egal cu zero (§ 11); momentul forței $\overline{Y}$ este egal cu $+xY$, întrucît distanța forței $\overline{Y}$ de axa Oz este egală cu x și forța $\overline{Y}$ tinde să producă în raport cu direcția pozitivă a axei Oz o rotație în sens contrar acelor unui ceasornic; prin analogie vom găsi că momentul forței $\overline{X}$, în raport cu axa Oz este egală cu $-yX$. Astfel, în conformitate cu relația a treia din formulele (4.6) avem:

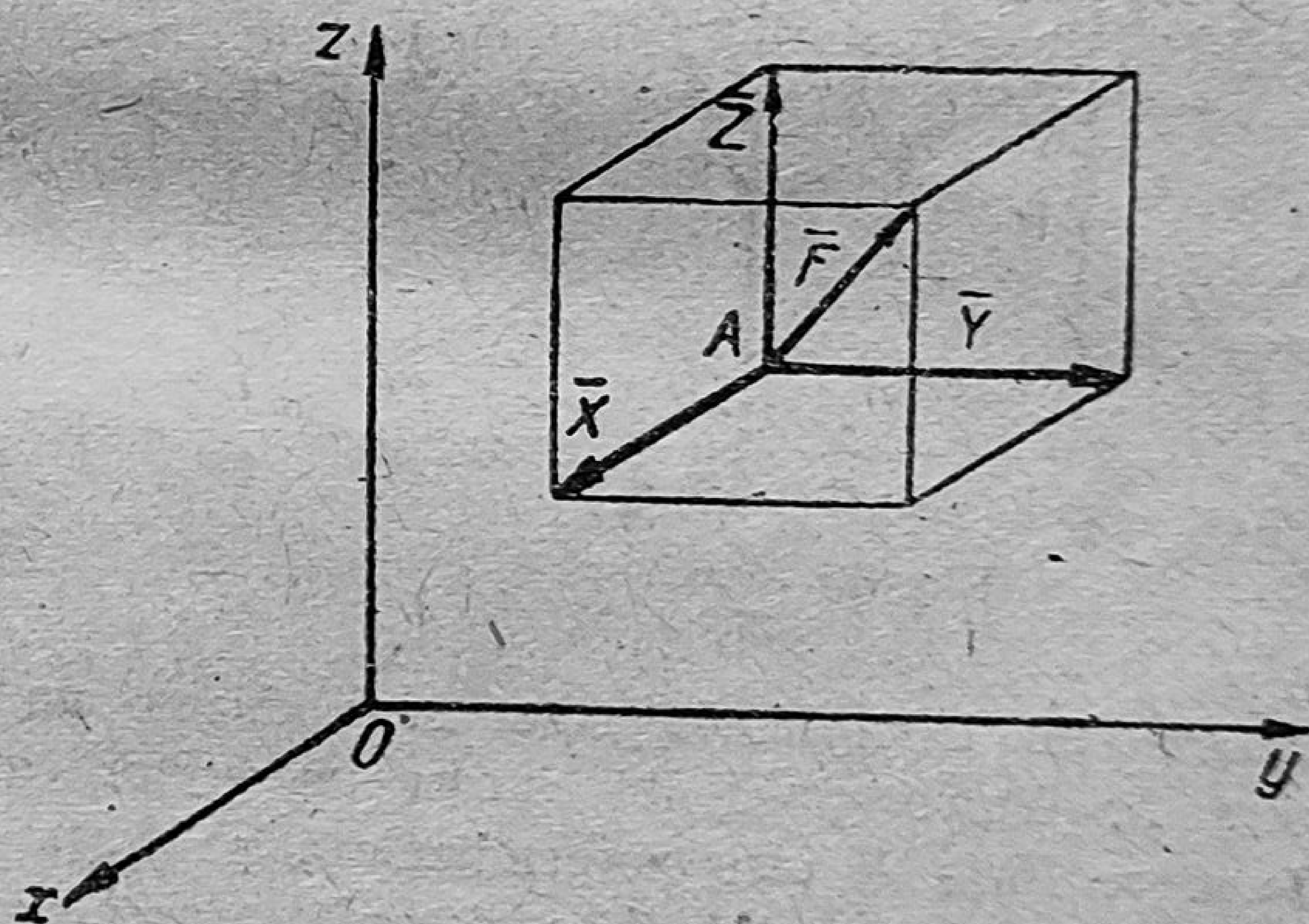


Fig. 32

$$M_z = -yX + xY + 0 = xY - yX,$$

adică ajungem la ultima relație din formulele (2.17).

§ 22. Exemple. 10. Un punct material cu greutatea $\overline{P}$ se găsește pe un plan înclinat perfect neted care formează unghiul φ cu orizontala; se cere să se studieze echilibrul punctului știind că asupra lui mai acționează forța $\overline{Q}$ paralelă cu planul înclinat și dirijată în sus. Reprezentînd forțele $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ pe figura 33, trecem la examinarea legăturilor. Este evident că punctul material considerat este supus unei legături, deoarece punctul trebuie să rămînă pe planul înclinat BC. Deoarece nu există frecare, reacțiunea $\overline{R}$ a legăturii trebuie să fie dirijată perpendicular pe planul înclinat; să însemnăm pe figură forța $\overline{R}$. Astfel am ajuns la căutarea echilibrului punctului A sub acțiunea a trei forțe $\overline{P}$, $\overline{Q}$ și $\overline{R}$.

Incepem cu procedeul geometric (grafic) de rezolvare a problemei. In primul rînd vom construi poligonul forțelor care trebuie să fie închis pentru ca să existe echilibru, adică cele trei forțe $\overline{P}$, $\overline{Q}$ și $\overline{R}$ trebuie să

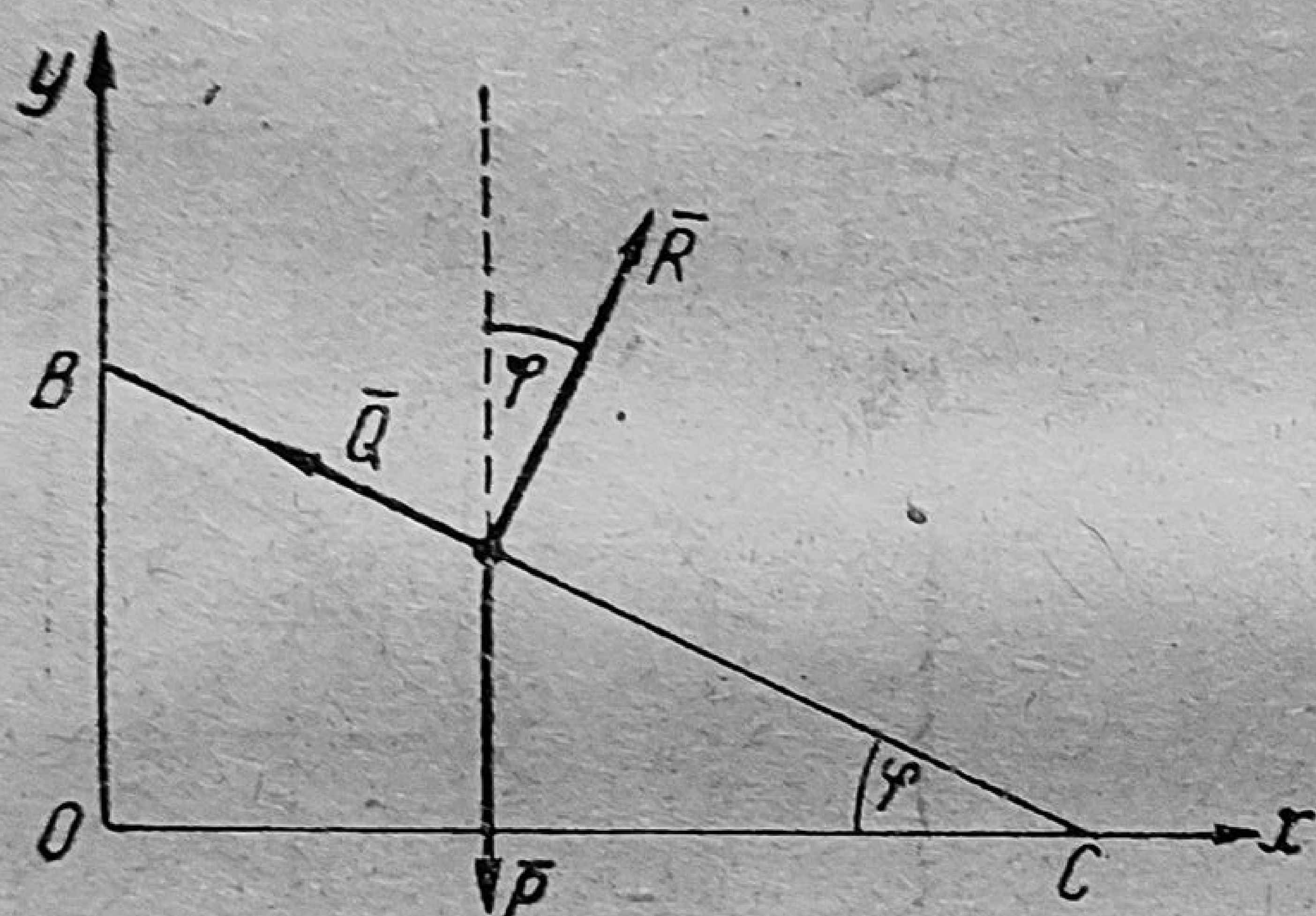


Fig. 33



Fig. 34

formeze un triunghi. In acest scop ducem un vector egal și paralel cu forța $\overline{P}$; din originea lui ducem un vector egal și paralel cu forța $\overline{Q}$. Deoarece forța $\overline{R}$ este perpendiculară pe forța $\overline{Q}$, ducem, în fig. 34, din extremitatea vectorului $\overline{Q}$ o dreaptă perpendiculară pe vectorul $\overline{Q}$ și în caz de echilibru, trebuie să observăm că dreapta dusă trece prin originea vectorului $\overline{P}$; în aceasta constă condiția de echilibru exprimată geometric. Lungimea laturii $\overline{R}$ a triunghiului din fig 34 determină modulul necunoscut ca mărime al reacțiunii $\overline{R}$. Din triunghiul reprezentat în fig. 34 este ușor de dedus că condiția de echilibru va fi $Q=P\sin\varphi$ și reacțiunea se determină prin egalitatea $R=P\cos\varphi$, adică ajungem la interpretarea numerică a rezultatelor obținute geometric.

Trecînd la metoda vectorială de rezolvare a problemei, scriem ecuația de echilibru de forma (4.2), și anume:

$$\overline{P}+\overline{Q}+\overline{R}=0.$$

Ca să deducem din această ecuaţie modulul forţei $\overline{R}$ vom înmulţi ecuaţia scalar cu vectorul unitar $\overline{R}^{\circ}$; deoarece $\overline{R}^{\circ} \perp \overline{Q}$ vom obţine:

$$\overline{P} \cdot \overline{R}^{\circ} + \overline{R} \cdot \overline{R}^{\circ} = 0.$$

Deoarece unghiul dintre vectorii $\overline{P}$ şi $\overline{R}^{\circ}$ este egal cu $\pi - \varphi$, găsim de aici:

$$-P \cos\varphi + R = 0,$$

adică ajungem la formula precedentă pentru modulul forţei R. Pentru a găsi condiţia de echilibru, adică pentru a elimina forţa $\overline{R}$, înmulţim ecuaţia de echilibru scalar cu vectorul unitar $\overline{Q}^{\circ}$; vom obţine:

$$\overline{P} \cdot \overline{Q}^{\circ} + \overline{Q} \cdot \overline{Q}^{\circ} = 0.$$

Deoarece unghiul între vectorii $\overline{P}$ şi $\overline{Q}^{\circ}$ este egal cu $\frac{\pi}{2} + \varphi$, vom găsi:

$$-P \sin\varphi + Q = 0,$$

adică, ajungem la condiţia de echilibru sub forma obţinută mai sus.

În sfîrşit, să rezolvăm aceeaşi problemă pe cale analitică. Pentru aceasta trebuie să proiectăm toate forţele pe două direcţii neparalele şi sumele proiecţiilor să le egalăm cu zero. Să alegem aceste direcţii şi anume direcţia CB şi direcţia forţei $\overline{R}$. Proiectînd toate forţele pe direcţia CB, vom obţine pentru proiecţia forţelor $\overline{P}$, $\overline{Q}$ şi $\overline{R}$, respectiv

$$-P \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -P \sin\varphi, \quad Q, \quad 0;$$

de aceea, prima ecuaţie va fi:

$$-P \sin\varphi + Q = 0.$$

Proiectînd aceleaşi forţe pe direcţia forţei $\overline{R}$, vom avea respectiv

$$-P \cos\varphi, \quad 0, \quad R;$$

proiectînd, obţinem a doua ecuaţie sub forma

$$-P \cos\varphi + R = 0.$$

Este necesar să explicăm de ce am ales direcţiile precedente pentru efectuarea proiecţiilor. Ca să arătăm avantajul acestor direcţii şi să obţinem regula pe care trebuie să o urmăm, vom rezolva aceeaşi problemă luînd ca direcţii pentru proiectare axele Ox şi Oy (fig. 33). Proiectînd forţele $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ pe axele Ox şi Oy vom avea respectiv:

$$Ox) \quad 0, \quad -Q\cos\varphi, \quad R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = R\sin\varphi;$$

$$Oy) \quad -P, \quad Q\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = Q\sin\varphi, \quad R\cos\varphi.$$

Formînd ecuaţiile, vom obţine:

$$-Q\cos\varphi + R\sin\varphi = 0, \quad -P + Q\sin\varphi + R\cos\varphi = 0.$$

Vedem că modulul R al reacțiunii a intrat în ambele ecuații. Pentru a obține condiția de echilibru va fi necesar să eliminăm pe R. Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu $-\cos\varphi$, a doua cu $\sin\varphi$ și adunîndu-le, obținem:

$$Q\cos^2\varphi - P\sin\varphi + Q\sin^2\varphi = 0,$$

sau

$$Q - P\sin\varphi = 0.$$

Pentru a găsi valoarea forței $\overline{R}$, înmulțim prima ecuație cu $\sin\varphi$, a doua cu $\cos\varphi$ și adunîndu-le vom avea:

$$R\sin^2\varphi - P\cos\varphi + R\cos^2\varphi = 0,$$

sau

$$R - P\cos\varphi = 0.$$

Am obținut ecuațiile precedente dar numai după operații algebrice, în timp ce luînd pentru formarea proiecțiilor direcțiile CB și R vom obține imediat aceste ecuații. Nu este greu de explicat acest lucru. Observăm că dreapta CB este perpendiculară pe $\overline{R}$; de aceea proiecția forței $\overline{R}$ pe direcția CB este nulă. Proiecția forței $\overline{R}$ pe direcția $\overline{R}$ va fi $+R$, adică una din ecuații ne dă condiția de echilibru, iar cealaltă modulul reacțiunii. Desigur, dacă direcția reacțiunii nu ar fi cunoscută, atunci nu s-ar putea alege o direcție perpendiculară pe ea. De aici rezultă următoarea regulă:

La alegerea proiecțiilor pentru eliminarea din ecuația de echilibru a reacțiunii a cărei direcție este cunoscută, trebuie luată ca direcție pe care se proiectează forțele, direcția perpendiculară pe reacțiune.

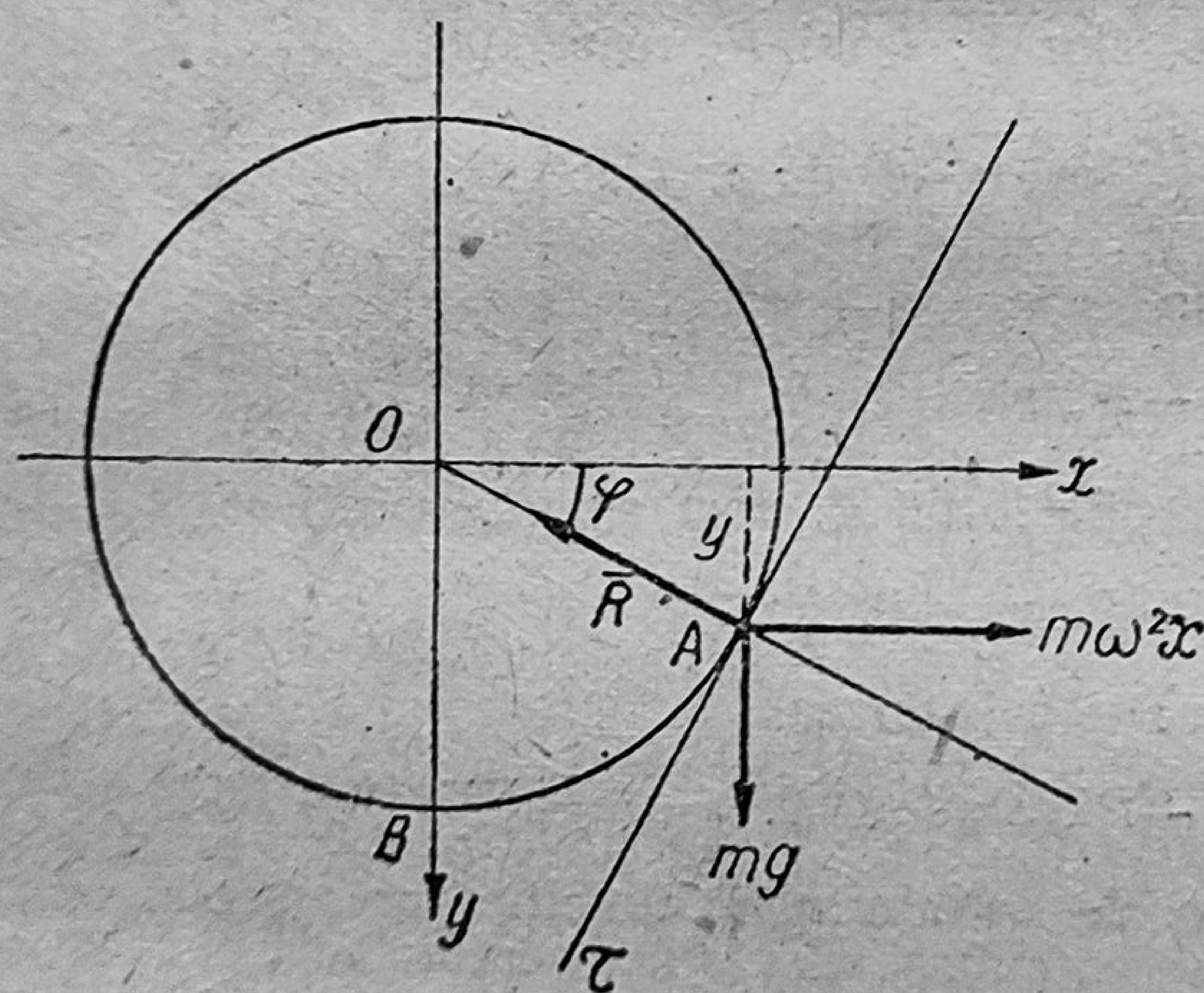


Fig. 35

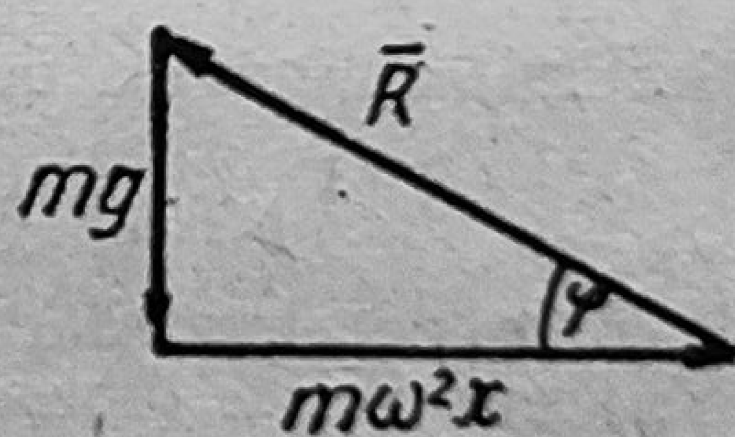


Fig. 36

11. Un punct material se găsește pe o circumferință cu raza a, și este respins după o direcție perpendiculară pe diametrul vertical Oy al acestei circumferințe, cu o forță egală cu $m\omega^2 x$ unde m este masa punctului, ω^2 — un coeficient de proporționalitate și x distanța punctului la dreapta Oy. Să se studieze echilibrul punctului. Notăm unghiul format de raza OA, dusă prin punctul dat, cu axa orizontală Ox prin φ (fig. 35). Deoarece și în acest caz punctul nu este liber, la forța activă a greutății mg unde g este

accelerația gravitației și la forța $m\omega^2 x$, trebuie să se mai adauge reacțiunea legăturii R care va fi dirijată de-a lungul dreptei AO. Aplicînd metoda grafică concludem că forțele mg, $m\omega^2 x$ și R trebuie să formeze un triunghi. Incepem construcția de la forța mg cunoscută ca valoare, direcție și sens. Obținem triunghiul reprezentat în fig. 36 în care în afară de latura mg, cunoscută ca valoare, direcție și sens, este cunoscut numai faptul că latura $m\omega^2 x$ este dirijată pe orizontală. Din acest triunghi avem:

$$m\,\omega^2 x = mg \operatorname{ctg} \varphi\,.$$

Deoarece din fig. 35 rezultă că $x = a \cos \varphi$, vom avea:

$$m\,\omega^2 a \cos \varphi = mg \operatorname{ctg} \varphi\,,$$

sau

$$\cos \varphi \left(m\,\omega^2 a - \frac{mg}{\sin \varphi} \right) = 0\,.$$

De aici se vede că ecuația care exprimă condiția de echilibru se împarte în două ecuații.

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin \varphi = \frac{g}{\omega^2 a}\,.$$

Tot din același triunghi găsim pentru valoarea reacțiunii $\overline{R}$ următoarea expresie:

$$R = \frac{mg}{\sin \varphi}$$

în funcție de valoarea unghiului φ mărimea reacțiunii $\overline{R}$ are două valori:

$$R = mg, \quad R = m\,\omega^2 a\,.$$

Inainte de a interpreta rezultatele obținute, să rezolvăm aceeași problemă prin metoda proiecțiilor.

Pentru a obține ecuațiile de proiecție pentru determinarea modulului forței R și condiția de echilibru, este suficient să alegem ca axe direcțiile AO și $A\tau$, unde $A\tau$ este dirijat de-a lungul tangentei la circumferință. Proiectînd toate forțele pe această direcție, vom obține:

$$R - M\,\omega^2 x \cos \varphi - mg \sin \varphi = 0,$$
$$mg \cos \varphi - m\,\omega^2 x \sin \varphi = 0\,,$$

sau

$$R - m\,\omega^2 a \cos^2 \varphi - mg \sin \varphi = 0\,,$$
$$mg \cos \varphi - m\,\omega^2 a \cos \varphi \sin \varphi = 0\,.$$

De aici rezultă:

$$R = m\,(\omega^2 a \cos^2 \varphi + g \sin \varphi),$$
$$\cos \varphi\,(g - \omega^2 a \sin \varphi) = 0\,.$$

In acest fel ajungem la aceleași rezultate cu cele obținute mai înainte prin metoda grafică.

Din relația $\sin \varphi = \frac{g}{\omega^2 a}$ rezultă că trebuie să avem $\frac{g}{\omega^2 a} \leqslant 1$ adică $\omega^2 \geqslant \frac{g}{a}$. Prin urmare dacă $\omega^2 < \frac{g}{a}$, atunci este posibilă numai o singură poziție de

echilibru în punctul B, pentru care vom avea: $\cos\varphi=0$. Dacă însă $\omega^2 \geqslant \frac{g}{a}$, atunci sînt posibile două poziții de echilibru, atît în punctul B cît și în acel punct A în care rezultanta forțelor $m\,\omega^2 x$ și mg este dirijată după direcția razei OA și va fi echilibrată de reacțiunea normală. R. Se poate demonstra că în acest din urmă caz, poziția de echilibru în punctul A va fi stabilă, iar în punctul B nestabilă.

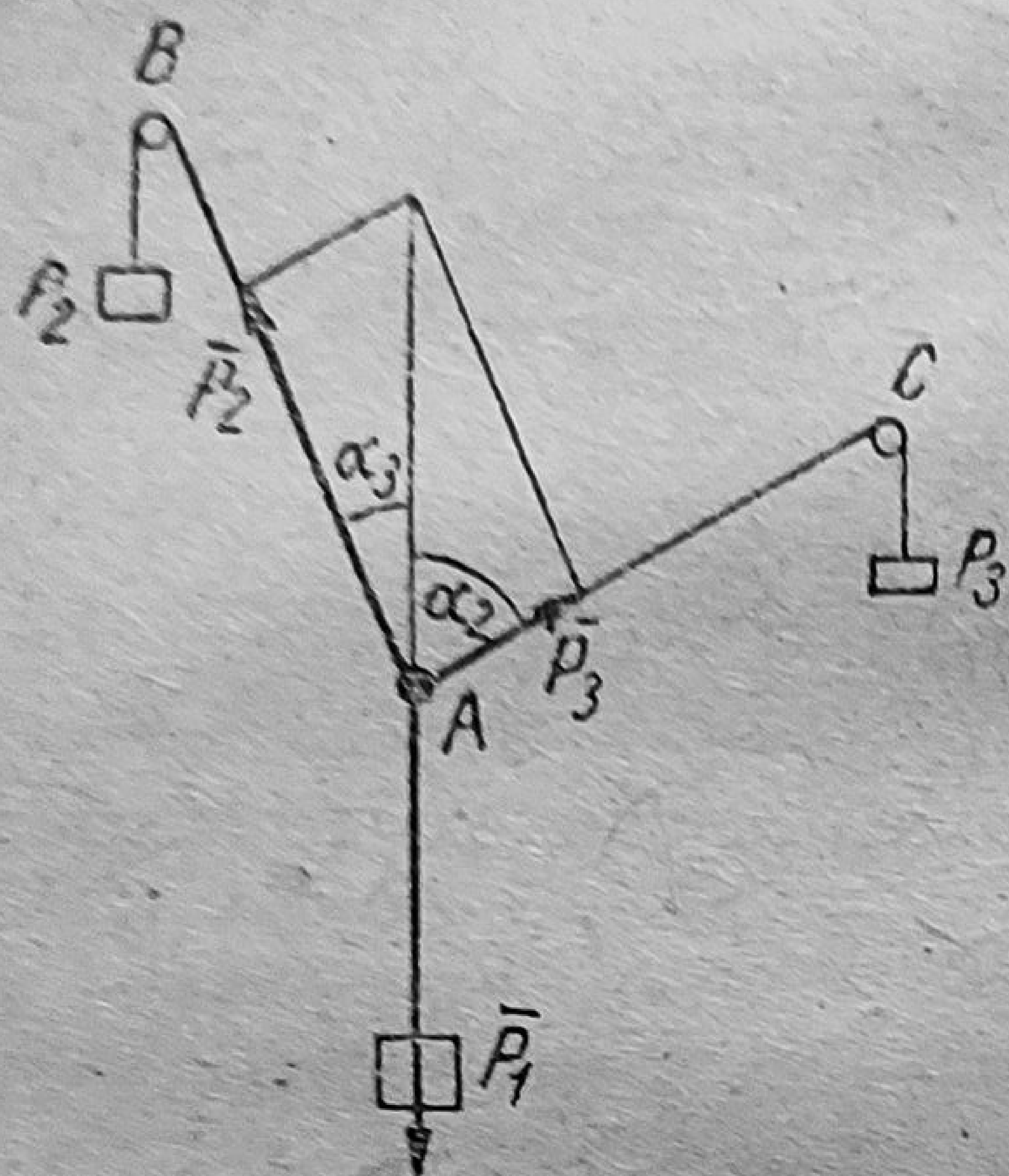


Fig. 37

12. In punctul A este atîrnat un fir care susține greutatea P_1; la capetele firului petrecut prin doi scripeți B și C sînt fixate greutățile P_2 și P_3; întregul sistem format din aceste trei greutăți se găsește în echilibru. Să se studieze echilibrul punctului A. Deoarece toate trei forțele P_1, P_2 și P_3 care acționează asupra punctului A ne sînt date, condițiile de echilibru se reduc la relații care determină unghiurile α_2 și α_3 (fig. 37). Incepem construirea triunghiului forțelor cu forța P_1 care ne este dată ca mărime, direcție și sens. Vedem că ajungem la problema cunoscută din geometria elementară a construirii unui triunghi, cînd sînt date cele trei laturi. Să notăm perimetrul triunghiului prin $2p$, adică:

$$P_1+P_2+P_3=2p.$$

Din trigonometrie se știe că:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}=\sqrt{\frac{(p-P_1)(p-P_3)}{(p-P_2)\,p}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2}=\sqrt{\frac{(p-P_1)(p-P_2)}{(p-P_3)\,p}}.$$

Rezolvarea problemei este posibilă numai în cazul cînd avem:

$$|P_2-P_3|<P_1<P_2+P_3.$$

Pentru această problemă ne mărginim numai la acest singur mod de rezolvare, ca unul cu care se ajunge mai repede la rezultat.

13. In vîrfurile triunghiului echilateral AOB sînt situate respectiv masele m_1, m_2 și m_3. Să se găsească poziția de echilibru a unei mase m care este atrasă de aceste mase cu forțe proporționale cu produsul maselor și cu distanța dintre ele. Vom rezolva această problemă prin metoda proiecțiilor, ca fiind cea mai simplă.

Vom lua originea coordonatelor în punctul O şi vom dirija axa Ox după dreapta OA (fig. 38). Deoarece aici trebuie să se echilibreze trei forţe, ele trebuie să fie în acelaşi plan (§ 20); prin urmare poziţia de echilibru a punctului C de masă m, se găseşte în planul OAB. Notăm coordonatele punctului C prin (x, y), iar lungimea laturii triunghiului OAB prin a. Forţele de atracţie ale punctului C de către punctele O, A şi B vor fi respectiv:

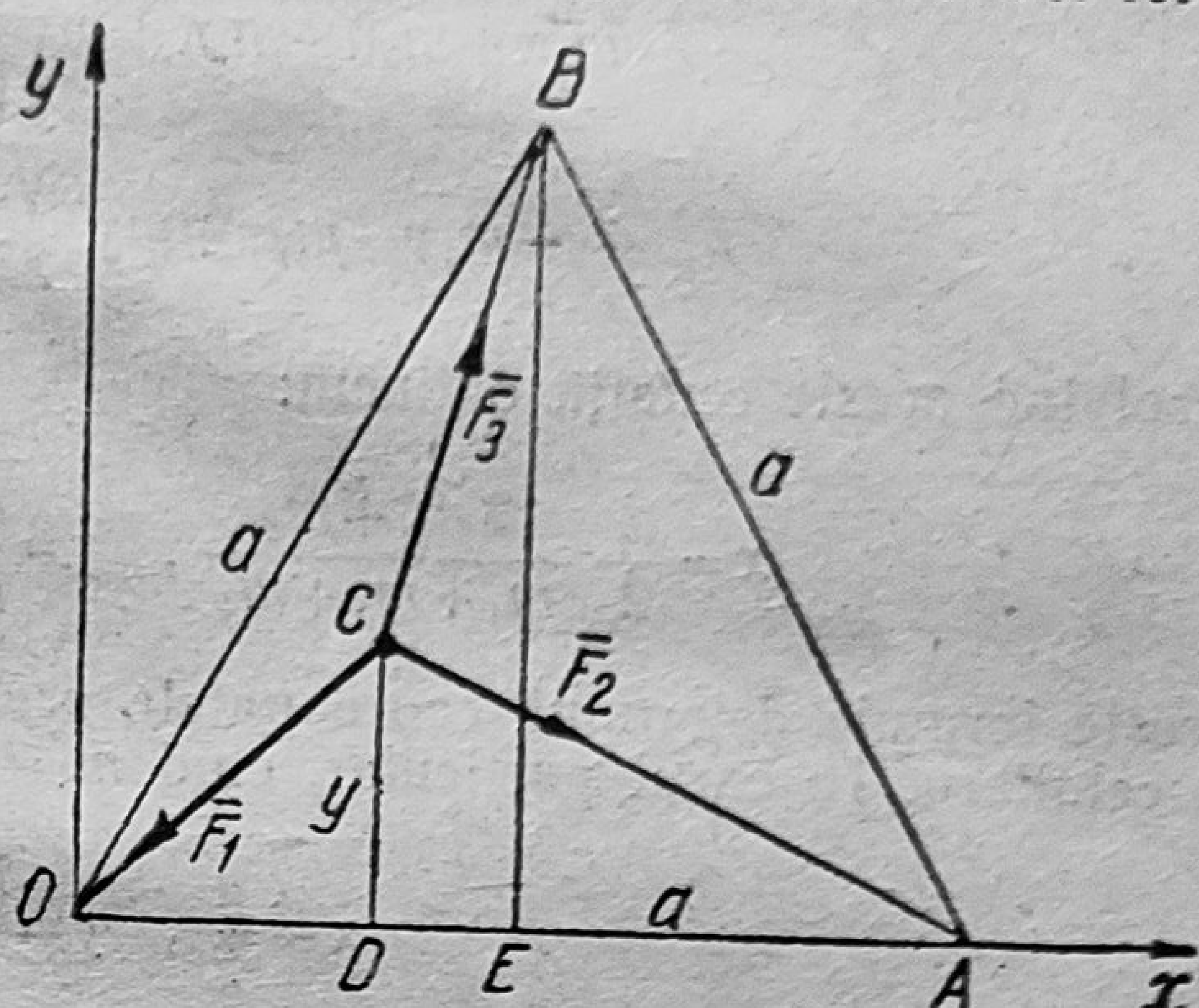


Fig. 38

$$\overline{F}_1 = kmm_1\overline{CO},$$
$$\overline{F}_2 = kmm_2\overline{CA},$$
$$\overline{F}_3 = kmm_3\overline{CB},$$

unde k este factorul de proporţionalitate şi vor fi dirijate de la punctul C spre punctele O, A şi B. In expresiile proiecţiilor forţelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_3$ pe axele de coordonate, va interveni proiecţia vectorilor $\overline{CO}$, $\overline{CA}$ şi $\overline{CB}$ pe axele de coordonate. Dar este uşor de văzut că vom avea:

$$pr_x\overline{CO} = DO = -x, \quad pr_x\overline{CA} = DA = a - x, \quad pr_x\overline{CB} = \frac{a}{2} - x,$$

$$pr_y\overline{CO} = CD = -y, \quad pr_y\overline{CO} = CD = -y, \quad pr_x\overline{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - y,$$

unde $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ este înălţimea BE a triunghiului OAB. De aici, găsim pentru proiecţia forţelor următoarele expresii:

$$X_1 = -kmm_1x, \qquad Y_1 = -kmm_1y,$$
$$X_2 = kmm_2(a - x), \qquad Y_2 = -kmm_2y,$$
$$X_3 = kmm_3\left(\frac{a}{2} - x\right), \quad Y_3 = kmm_3\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right).$$

Ecuaţiile de echilibru vor fi:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0,$$

sau

$$-kmm_1x + kmm_2(a - x) + kmm_3\left(\frac{a}{2} - x\right) = 0,$$

$$-kmm_1y - kmm_2y + kmm_3\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right) = 0.$$

Simplificînd cu km, vom obține:

$$m_1x+m_2a-m_2x+m_3\frac{a}{2}-m_3x=0,$$

$$-m_1y-m_2y+m_3\frac{a\sqrt{3}}{2}-m_3y=0.$$

Rezolvînd aceste ecuații, obținem:

$$x=\frac{a}{2}\,\frac{2m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y=\frac{a\sqrt{3}}{2}\,\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Aceste formule determină coordonatele acelui punct C în care masa m va fi în echilibru. In cazul particular, cînd $m_1=m_2=m_3$, avem:

$$x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{a\sqrt{3}}{6},$$

adică, punctul C se găsește în centrul circumferinței circumscrise triunghiului OAB, ceea ce este evident și rezultă în mod direct. In această problemă punctul m este liber, și de aceea nu există reacțiuni.

CAPITOLUL V

REDUCEREA FORȚELOR PARALELE

§ 23. Forțele paralele dirijate în același sens. Forțele se numesc *paralele* dacă suporturile lor sînt paralele. Dacă două forțe paralele sînt de sens contrar, ele se mai numesc uneori și *antiparalele.*

Vom examina cazul a două forțe paralele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, dirijate în același sens, aplicate asupra unui solid; notăm punctele lor de aplicație cu A_1 și A_2. Vom demonstra că două forțe paralele dirijate în același sens, admit totdeauna o rezultantă. Ne referim la fig. 39. Să aplicăm în punctele A_1 și A_2 două forțe $\overline{p}$ și $\overline{q}$, egale între ele ca valoare absolută, avînd ca suport dreapta A_1A_2, și acționînd în sensuri opuse. Adunînd forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{p}$ și forțele $\overline{F}_2$ și $\overline{q}$, vom obține rezultantele $\overline{A_1D_1}$ și $\overline{A_2D_2}$, care se pot muta în punctul lor de concurență O. Descompunîndu-le acolo din nou în forțele precedente, vom obține cele două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ aplicate în punctul O și cele două forțe $\overline{p}$ și $\overline{q}$, aplicate de asemenea în același punct O. Forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ dau rezultanta $\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2$, care se poate muta în punctul C al dreptei A_1A_2 iar forțele $\overline{p}$ și $\overline{q}$ se

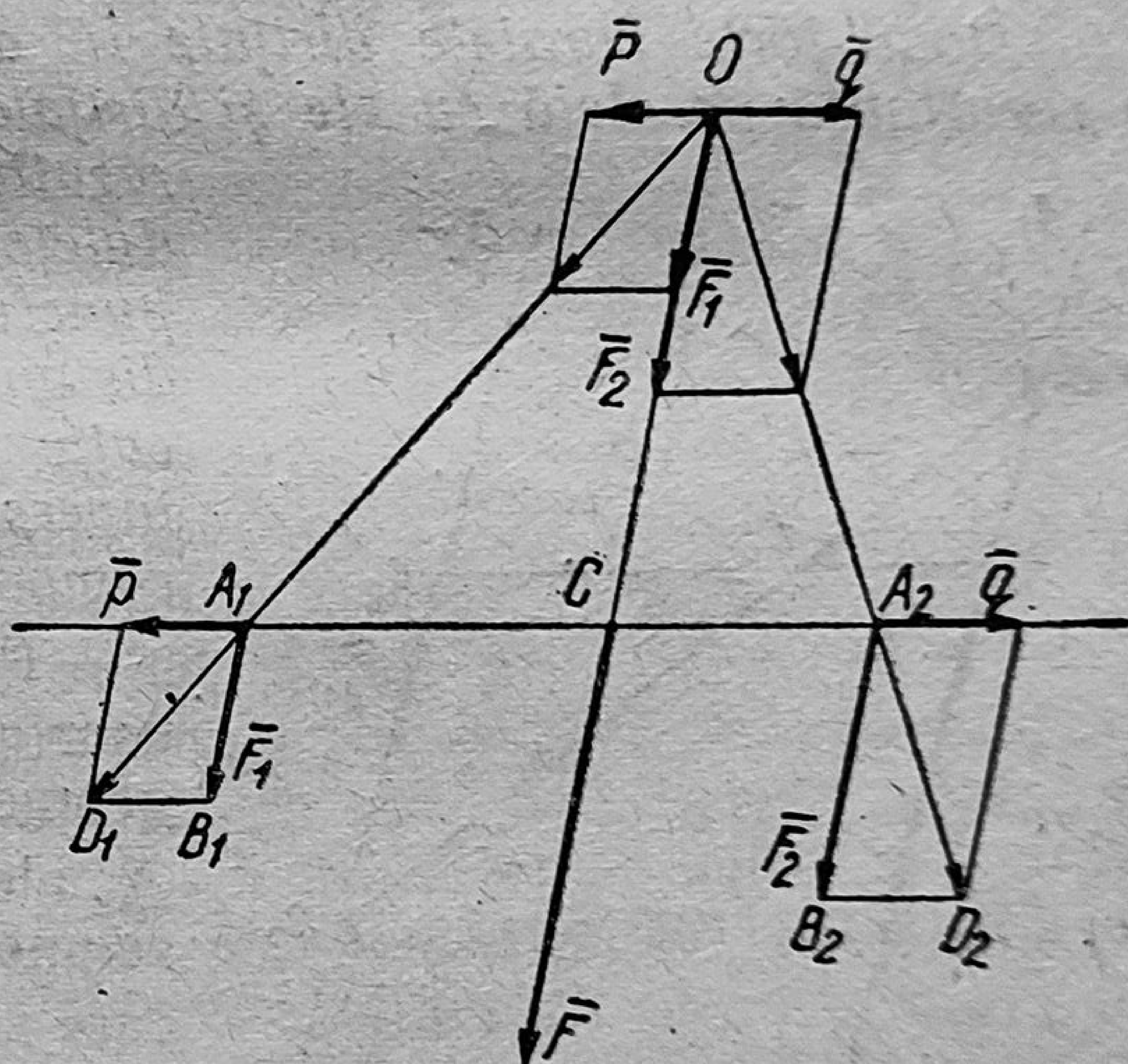


Fig. 39

echilibrează între ele. Să găsim poziția punctului C; pentru aceasta, să examinăm următoarele triunghiuri:

$$\triangle A_1B_1D_1 \sim \triangle A_1OC \text{ și } \triangle A_2B_2D_2 \sim \triangle A_2OC .$$

Din asemănarea primelor două triunghiuri, obținem:

$$\frac{CA_1}{OC}=\frac{B_1D_1}{A_1B_1}=\frac{p}{F_1};$$

din asemănarea celei de-a doua perechi de triunghiuri, găsim:

$$\frac{CA_2}{OC}=\frac{B_2D_2}{A_2B_2}=\frac{q}{F_2}.$$

Împărțind cele două proporții obținem:

$$\frac{CA_1}{CA_2}=\frac{F_2}{F_1}. \qquad (5.1)$$

Astfel, ajungem la teorema:

Două forțe paralele dirijate în același sens, au totdeauna o rezultantă paralelă cu ele și dirijată în același sens; modulul rezultantei este egal cu suma modulelor forțelor componente, iar punctul ei de aplicație împarte distanța dintre punctele de aplicație a componentelor, în părți invers proporționale cu forțele componente.

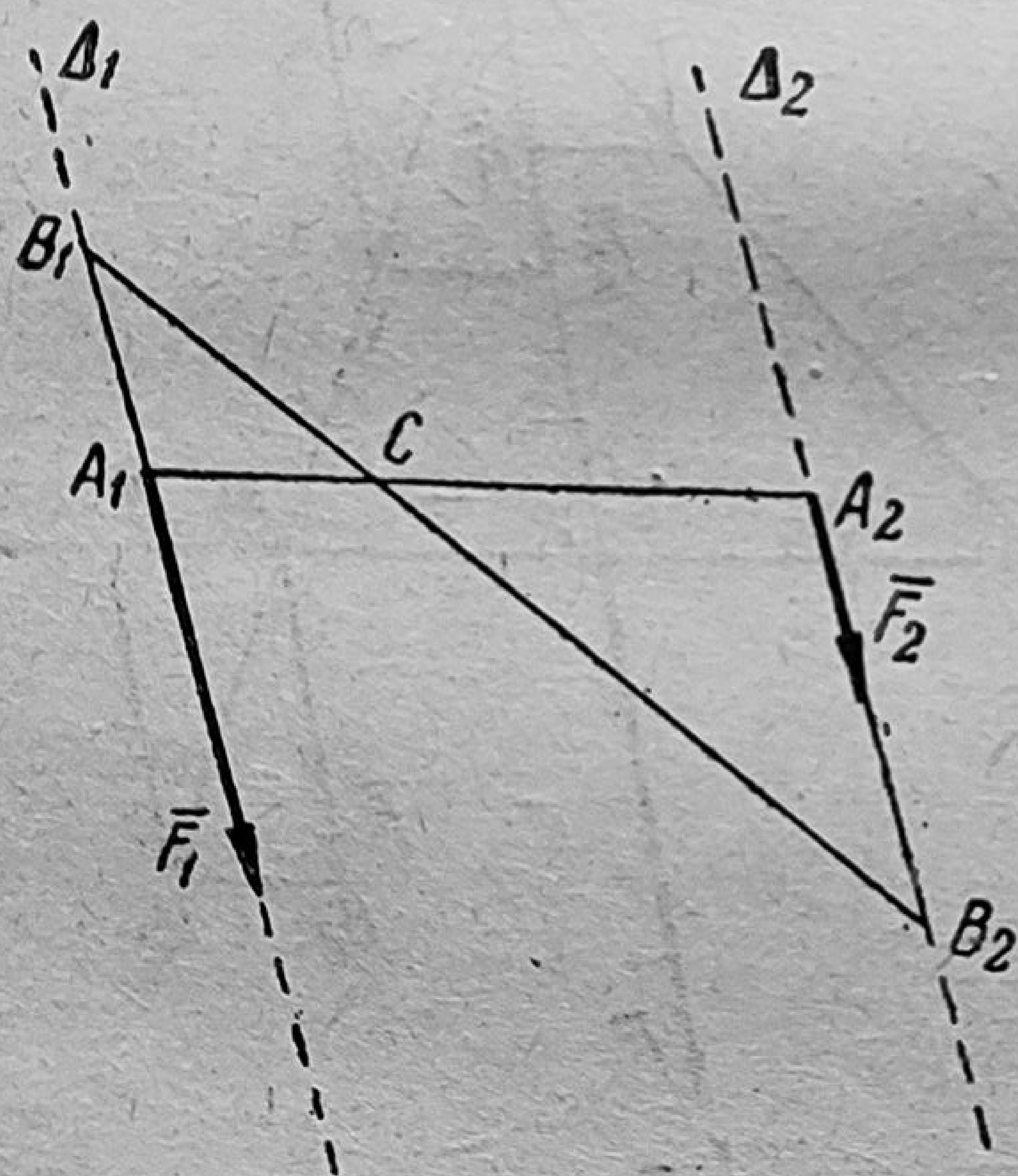


Fig. 40

Poziția punctului C se află ușor printr-o simplă construcție geometrică. Pe suporturile Δ_1 și Δ_2 ale forțelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, măsurăm segmentele A_1B_1 și A_2B_2, dintre care segmentul $A_1B_1=F_2$ este dirijat în sens contrar cu forța $\overline{F}_1$, iar segmentul $A_2B_2=F_1$ este dirijat în același sens cu forța $\overline{F}_2$ (fig. 40). Unind printr-o dreaptă punctele B_1 și B_2 vom găsi punctul căutat C, ca punct de intersecție al dreptelor A_1A_2 și B_1B_2. În adevăr, din asemănarea triunghiurilor A_1B_1C și A_2B_2C, ajungem imediat la relația (5.1).

Dacă avem cîteva forțe paralele dirijate în același sens, vom obține rezultanta, adunînd inițial două forțe, iar rezultanta parțială obținută, o adunăm cu forța a treia etc. Din cele precedente rezultă *că modulul rezultantei forțelor paralele dirijate în același sens este egal cu suma modulelor tuturor forțelor componente.*

Între adunarea a două forțe paralele dirijate în același sens și adunarea după regula paralelogramului a două forțe aplicate în același punct, există o diferență esențială. Adunarea a două forțe paralele dirijate în același sens se poate demonstra matematic pe baza proprietăților cunoscute ale forțelor, printre care și adunarea forțelor concurente. Adunarea însă a două forțe aplicate la același punct, cum am văzut în § 3, nu se poate demonstra matematic, ci este un principiu al științelor naturii.

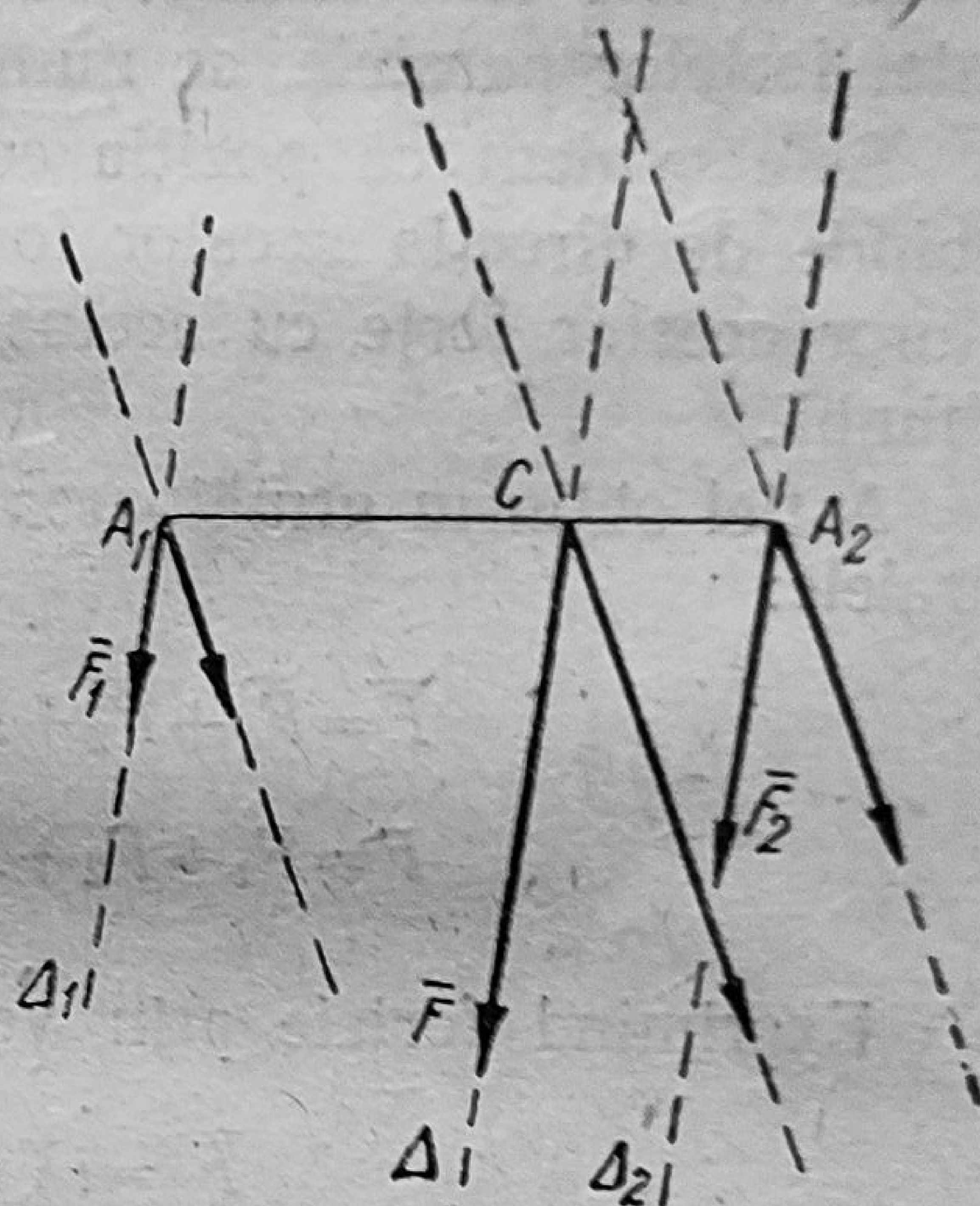


Fig. 41

La prima vedere pare că, cuprinsul § 23, în care se tratează despre punctele de aplicare ale forțelor componente și despre rezultanta forțelor paralele, este în contrazicere cu § 2, în care se arată că: „orice teoremă despre forțe aplicate asupra unui solid nu trebuie să fie în contradicție cu ipoteza că punctul de aplicație al forței se poate deplasa în solid de-a lungul suportului forței“. Pentru a îndepărta această nepotrivire între § 2 și § 23, să precizăm sensul care trebuie dat pentru punctele de aplicație în cazul forțelor paralele. Pentru aceasta vom roti suporturile Δ_1 și Δ_2 ale forțelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, în jurul punctelor A_1 și A_2, menținînd aceste direcții paralele între ele (fig. 41). Din construcția precedentă, urmează că suportul Δ al rezultantei lor $\overline{F}$, se va roti în jurul punctului C rămînînd paralel cu primele două suporturi. În ceea ce privește forțele $\overline{F}$, $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, ele se pot deplasa arbitrar pe suporturile lor. În acest fel, punctele A_1, A_2 și C sînt de fapt centrele de rotire ale suporturilor forțelor paralele considerate, dar nu puncte fixe de aplicare a acestor forțe.

Se observă uşor că dîndu-se punctele de aplicaţie ale forţelor paralele şi de acelaşi sens şi căutînd punctul de aplicaţie al rezultantei forţelor paralele sau, mai precis, căutînd centrul de rotaţie al suportului rezultantei, vom găsi că: centrul de rotaţie al suportului rezultantei forţelor paralele dirijate în acelaşi sens, se află totdeauna în interiorul unui poliedru convex care conţine în interior sau pe extremităţile lui, centrele de rotaţie ale suporturilor forţelor componente. Centrul de rotaţie al suportului rezultantei forţelor paralele, se numeşte *centrul forţelor paralele.*

Este evident că poziţia centrului C al forţelor paralele nu depinde de direcţia acestor forţe în spaţiu; de aceea la rotirea tuturor acestor forţe cu acelaşi unghi poziţia centrului C nu se schimbă.

Astfel obţinem următoarea expresie pentru rezultanta forţelor paralele:

$$\left.\begin{aligned} \overline{F} &= \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \cdots = \sum_n \overline{F}_n, \\ F &= F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = \sum_n F_n. \end{aligned}\right\} \quad (5.2)$$

Exprimînd forţele prin vectori unitari, pe baza formulelor

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \overline{i}X + \overline{j}Y + \overline{k}Z, \\ \overline{F}_1 &= \overline{i}X_1 + \overline{j}Y_1 + \overline{k}Z_1, \\ \overline{F}_2 &= \overline{i}X_2 + \overline{j}Y_2 + \overline{k}Z_2 \\ \overline{F}_3 &= \overline{i}X_3 + \overline{j}Y_3 + \overline{k}Z_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

şi introducînd aceste expresii în prima din formulele (5.2), vom obţine:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = \sum_n X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = \sum_n Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots = \sum_n Z_n. \end{aligned}\right\} \quad (5.3)$$

Vedem că:

Proiecţia rezultantei forţelor paralele pe orice axă, este egală cu suma proiecţiilor forţelor componente pe aceeaşi axă.

Notăm că teorema adunării a două forțe paralele se poate obține evitînd adăugarea aparent artificială a forțelor $\overline{p}$ și $\overline{q}$, considerînd forțele paralele ca un caz limită al forțelor concurente. In adevăr, fie două două forțe concurente $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, aplicate în punctele A_1 și A_2 (fig. 42). Mutînd aceste forțe în punctul lor de concurență O, și adunîndu-le după regula paralelogramului, vom obține rezultanta $\overline{F}$ care se poate muta în punctul C. Din triunghiurile A_1OC și A_2OC, avem:

$$\frac{CA_1}{OC}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin A_1}, \quad \frac{CA_2}{OC}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin A_2}.$$

Impărțind aceste proporții între ele, găsim:

$$\frac{CA_1}{CA_2}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_1}.$$

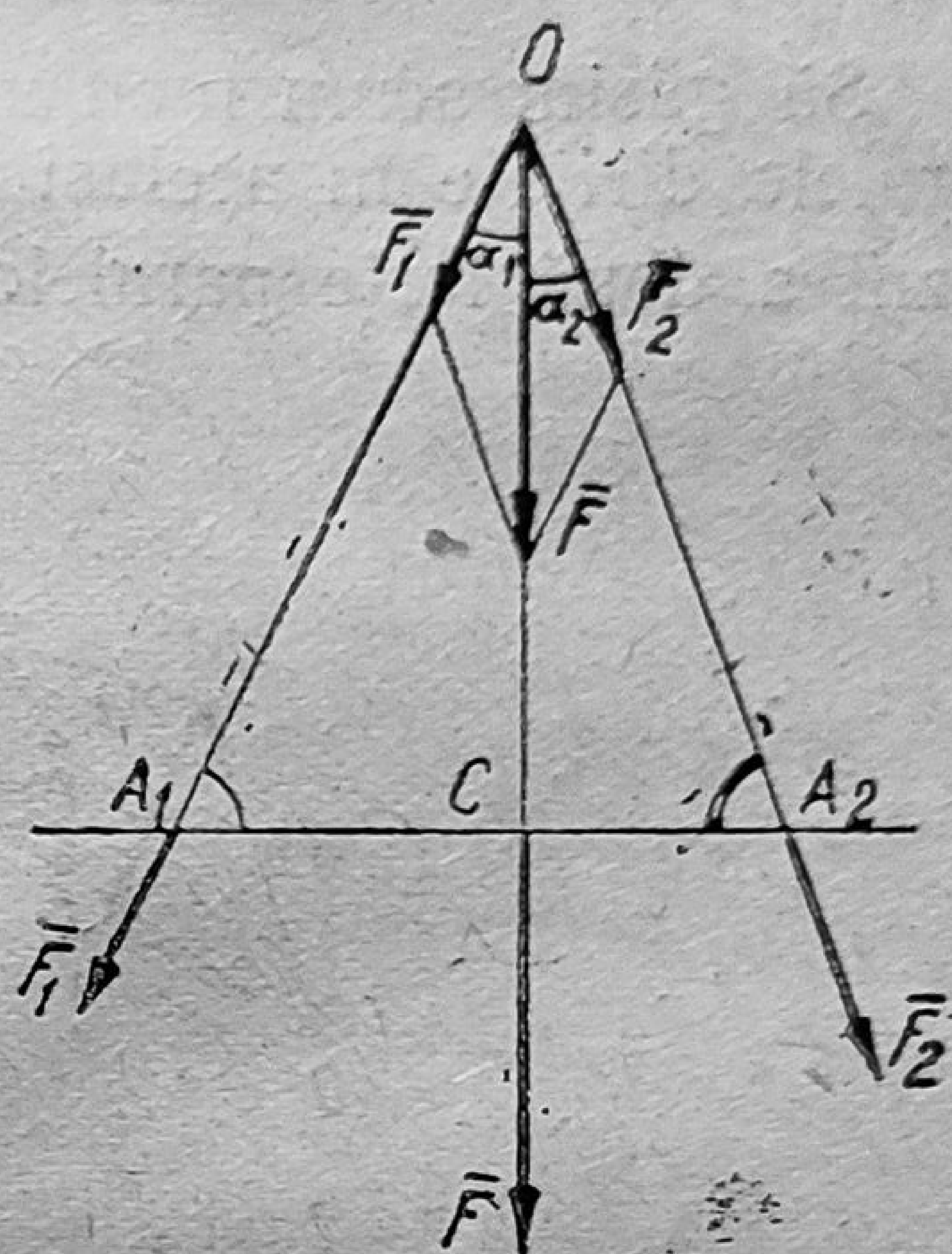


Fig. 42

Dar, din triunghiurile paralelogramului forțelor, obținem:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{F_2}{F_1},$$

adică:

$$\frac{CA_1}{CA_2}=\frac{F_2}{F_1}\frac{\sin A_2}{\sin A_1}.$$

Cînd punctul O se îndepărtează la infinit, unghiul A_2 tinde către valoarea $\pi - A_1$, și raportul

$$\frac{\sin A_2}{\sin A_1}$$

tinde către 1. Astfel, la limită, obținem formula (5.1). In ceea ce privește mărimea F a rezultantei, aceasta va fi după formula (1.1):

$$F^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos(\widehat{F_1F_2}).$$

Cînd punctul O tinde către infinit, unghiul $(\widehat{F_1 F_2})$ tinde către zero şi la limită, obținem:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2,$$

adică

$$F = F_1 + F_2.$$

Să găsim acum momentul rezultant al unui sistem de forțe paralele dirijate în același sens. Vom examina mai întîi numai cazul a două forțe paralele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ cu rezultanta $\overline{F}$ (fig. 43).

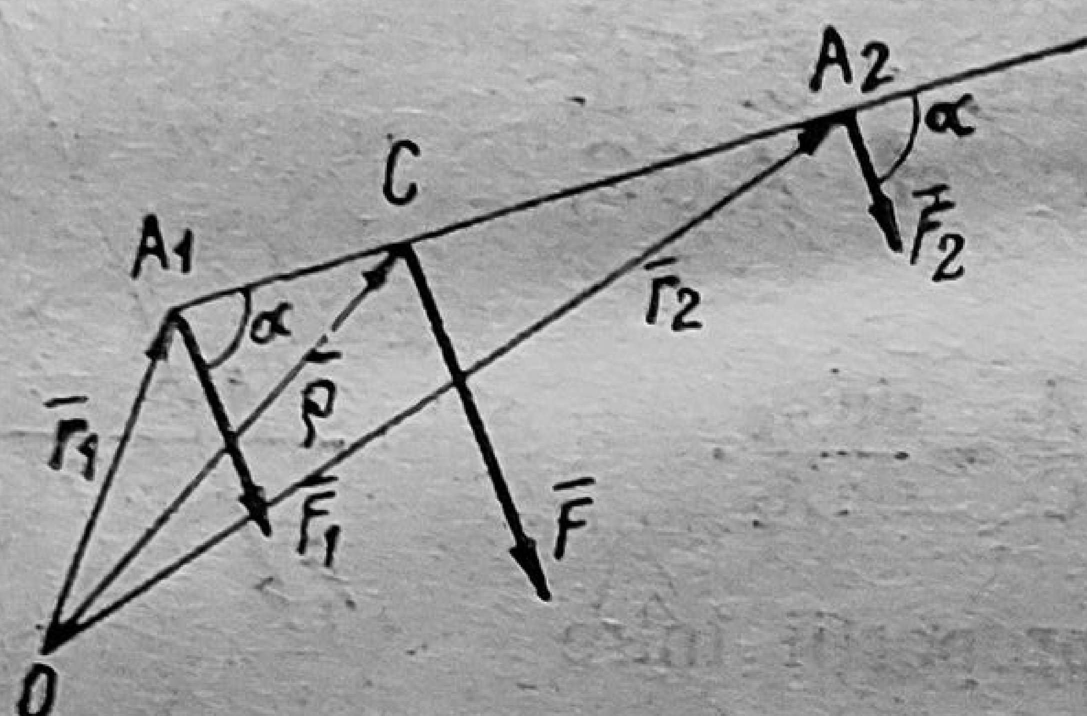


Fig. 43

Considerăm în spațiu un punct oarecare O, în raport cu care vom determina momentele forțelor și construim vectorii $\overline{OA}_1 = \overline{r}_1$, $\overline{OA}_2 = \overline{r}_2$, $\overline{OC} = \overline{\rho}$.

Momentul rezultant $\overline{M}$ al forțelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ în raport cu punctul O, va fi conform formulei (4.4):

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2.$$

Din fig. 43 se deduce:

$$\overline{\rho} + \overline{CA}_1 = \overline{r}_1, \quad \overline{\rho} + \overline{CA}_2 = \overline{r}_2,$$

adică trebuie să avem:

$$\overline{M} = (\overline{\rho} + \overline{CA}_1) \times \overline{F}_1 + (\overline{\rho} + \overline{CA}_2) \times \overline{F}_2,$$

sau

$$\overline{M} = \overline{\rho} \times \overline{F}_1 + \overline{\rho} \times \overline{F}_2 + \overline{CA}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{CA}_2 \times \overline{F}_2.$$

Vom demonstra că suma ultimilor doi termeni este egală cu zero. În adevăr, modulele acestor termeni sînt egali deoarece

$$|\overline{CA}_1 \times \overline{F}_1| = CA_1 \cdot F_1 \sin(\widehat{\overline{CA}_1, \overline{F}_1}) = CA_1 \cdot F_1 \sin\alpha;$$

$$|\overline{CA}_2 \times \overline{F}_2| = CA_2 \cdot F_2 \sin(\widehat{\overline{CA}_2, \overline{F}_2}) = CA_2 \cdot F_2 \sin(\pi - \alpha) = CA_2 \cdot F_2 \sin\alpha.$$

Pe de altă parte, din relația (5.1) obținem:

$$CA_1 \cdot F_1 = CA_2 \cdot F_2;$$

astfel, avem:

$$|\overline{CA}_1 \times \overline{F}_1| = |\overline{CA}_2 \times \overline{F}_2|.$$

Dar din fig. 43 se observă ușor că direcțiile acestor produse vectoriale sînt aceleași, normale pe planul determinat de forțele paralele, iar sensurile sînt opuse, așa că trebuie să avem:

$$\overline{CA}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{CA}_2 \times \overline{F}_2 = 0;$$

de aceea, ajungem la egalitatea:

$$\overline{M} = \overline{\rho} \times \overline{F}_1 + \overline{\rho} \times \overline{F}_2.$$

Aplicînd la această egalitate formula (2.7), obținem:

$$\overline{M} = \overline{\rho} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2) = \overline{\rho} \times \overline{F},$$

adică momentul rezultant a două forțe paralele dirijate în același sens este egal cu momentul rezultantei lor.

Vom arăta că această teoremă se poate extinde asupra oricărui număr de forțe paralele dirijate în același sens. Să examinăm, de exemplu, cazul a trei forțe paralele dirijate în același sens (fig. 44). Fie $\overline{F'}$ rezultanta forțelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$. După cele arătate pînă acum, pentru două forțe, avem:

$$\overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 = \overline{\rho}' \times \overline{F}',$$

unde $\overline{\rho}' = \overline{OC'}$. Pentru a obține rezultanta tuturor celor trei forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$, rămîne de adunat forțele $\overline{F}'$ și $\overline{F}_3$; vom obține:

$$\overline{F} = \overline{F}' + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3,$$

și după cele demonstrate pentru două forțe, avem

$$\overline{\rho}' \times \overline{F}' + \overline{r}_3 \times \overline{F} = \overline{\rho} \times \overline{F},$$

sau, observînd cele precedente:

$$\overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 + \overline{r}_3 \times \overline{F}_3 = \overline{\rho} \times \overline{F}.$$

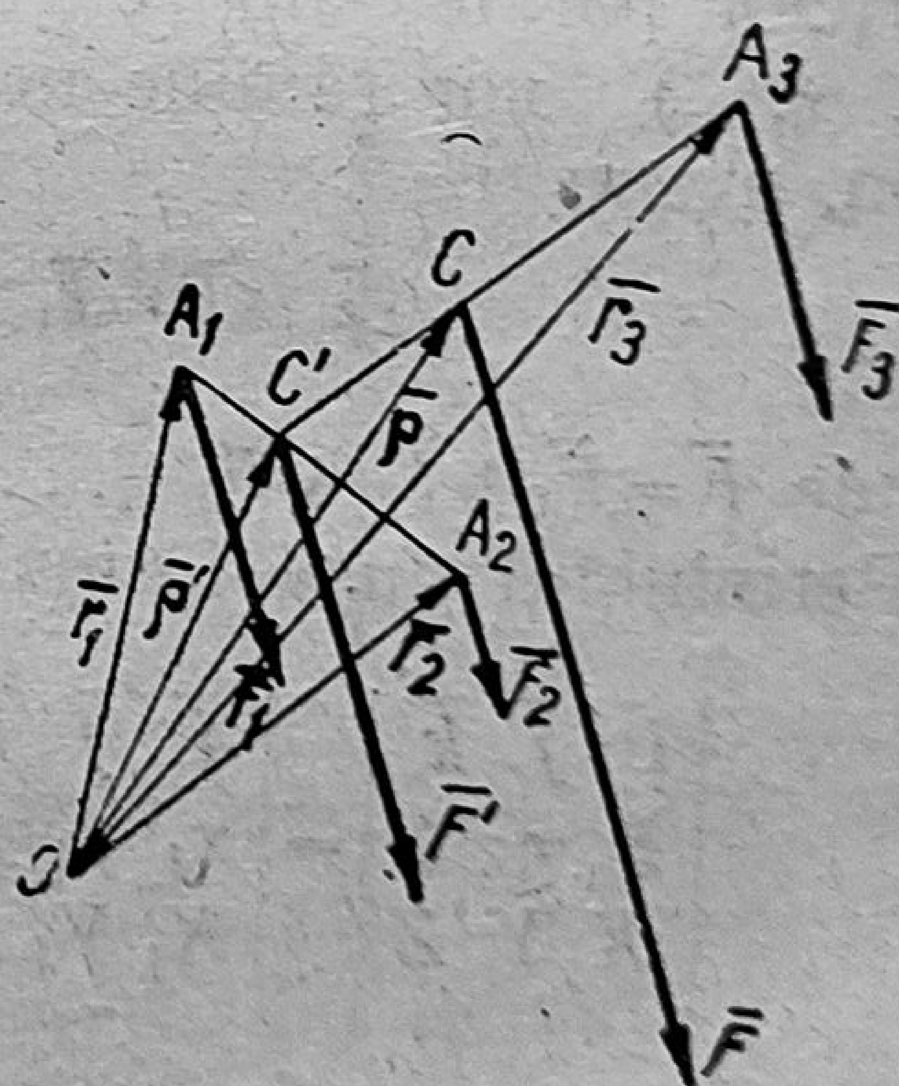


Fig. 44

Știind că găsim expresia pentru momentul rezultant a trei forțe, prin același procedeu, putem găsi expresia pentru momentul

rezultant a patru forțe paralele dirijate în același sens și așa mai departe. Astfel se ajunge la *teorema lui Varignon pentru un sistem de forțe paralele dirijate în același sens:*

Momentul rezultant al unui sistem de forțe paralele dirijate în același sens, este egal cu momentul rezultantei.

Plecînd de la teorema lui Varignon nu este greu de găsit coordonatele centrului forțelor paralele dirijate în același sens. Să notăm aceste coordonate prin (ξ, η, ζ) și coordonatele punctelor $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de aplicație a forțelor $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots$ respectiv $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \ldots$
De aici avem:

$$\begin{aligned}
\overline{\rho} &= \overline{i}\xi + \overline{j}\eta - \overline{k}\zeta, \\
\overline{r}_1 &= \overline{i}x_1 + \overline{j}y_1 + \overline{k}z_1, \\
\overline{r}_2 &= \overline{i}x_2 + \overline{j}y_2 + \overline{k}z_2, \\
\overline{r}_3 &= \overline{i}x_3 + \overline{j}y_3 + \overline{k}z_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Rotim toate forțele $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots$ în jurul punctelor $A_1, A_2, A_3, \ldots$ cu același unghi, astfel încît toate forțele să devină paralele, de exemplu, cu axa Oz; știm că prin aceasta centrul forțelor paralele nu se va muta și prin urmare coordonatele lui (ξ, η, ζ) vor rămîne neschimbate. Aplicînd teorema lui Varignon, avem:

$$\overline{\rho}\times\overline{F}=\overline{r}_1\times\overline{F}_1+\overline{r}_2\times\overline{F}_2+\overline{r}_3\times\overline{F}_3\ldots,$$

unde $\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\ldots$ Reprezentînd produsele vectoriale prin determinanți după formula (2.12) obținem:

$$\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \xi & \eta & \zeta \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} + \cdots$$

Deoarece prin rotire toate forțele au devenit paralele cu axa Oz, proiecțiile lor pe axele Ox și Oy sînt egale cu zero, dar pe axa Oz ele se proiectează în mărime naturală, adică avem:

$$Z=F,\quad Z_1=F_1,\quad Z_2=F_2 \text{ și } Z_3=F_3,\ \ldots$$

De aceea, egalitatea precedentă ia următoarea formă:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \xi & \eta & \zeta \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ 0 & 0 & F_3 \end{vmatrix} + \cdots$$

Dezvoltînd acești determinanți vom găsi că un rînd de produse se vor anula și vom obține:

$$\bar{i}\eta F - \bar{j}\xi F = \bar{i}y_1F_1 - \bar{j}x_1F_1 + \bar{i}y_2F_2 - \bar{j}x_2F_2 + \bar{i}y_3F_3 - \bar{j}x_3F_3 + \ldots$$

sau

$$\bar{i}\eta F - \bar{j}\xi F = \bar{i}(F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3 + \ldots) - \bar{j}(F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 \ldots).$$

De aici comparînd între ei coeficienții lui $\bar{i}$ și $\bar{j}$, găsim:

$$\xi F = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \ldots,$$
$$\eta F = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3 + \ldots$$

Rotind toate forțele astfel încît ele să devină paralele, de exemplu cu axa Ox, putem adăuga la aceste două relații și relația:

$$\zeta F = F_1z_1 + F_2z_2 + F_3z_3 + \ldots$$

Determinînd din aceste relații coordonatele (ξ, η, ζ) ale centrului forțelor paralele dirijate în același sens, obținem:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \ldots}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots} = \frac{\sum\limits_n F_nx_n}{F}, \\ \eta &= \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3 + \ldots}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots} = \frac{\sum\limits_n F_ny_n}{F}, \\ \zeta &= \frac{F_1z_1 + F_2z_2 + F_3z_3 + \ldots}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots} = \frac{\sum\limits_n F_nz_n}{F}. \end{aligned}\right\} \quad (5.4)$$

Cele trei formule (5.4) se pot înlocui prin una vectorială, formînd astfel expresia $\bar{\rho} = \bar{i}\xi + \bar{j}\eta + \bar{k}\zeta$; ținînd seama de expresiile vectorilor $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \ldots$ prin vectorii unitari, din formula (5.4), se va obține ușor:

$$\bar{\rho} = \frac{F_1\bar{r}_1 + F_2\bar{r}_2 + F_3\bar{r}_3 + \ldots}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots} = \frac{\sum\limits_n F_n\bar{r}_n}{F}. \quad (5.5)$$

Formula (5.5) este echivalentă cu trei formule (5.4).

Din formulele (5.4) și (5.5) reiese că coordonatele centrului forțelor paralele, nu depind de modulele forțelor ci numai de raportul lor; în adevăr, însă, dacă vom multiplica toate forțele de același număr de ori, atunci de același număr de ori se vor schimba și numărătorii formulelor (5.4) și (5.5), și, de aceea fracțiile vor rămîne neschimbate ca valoare.

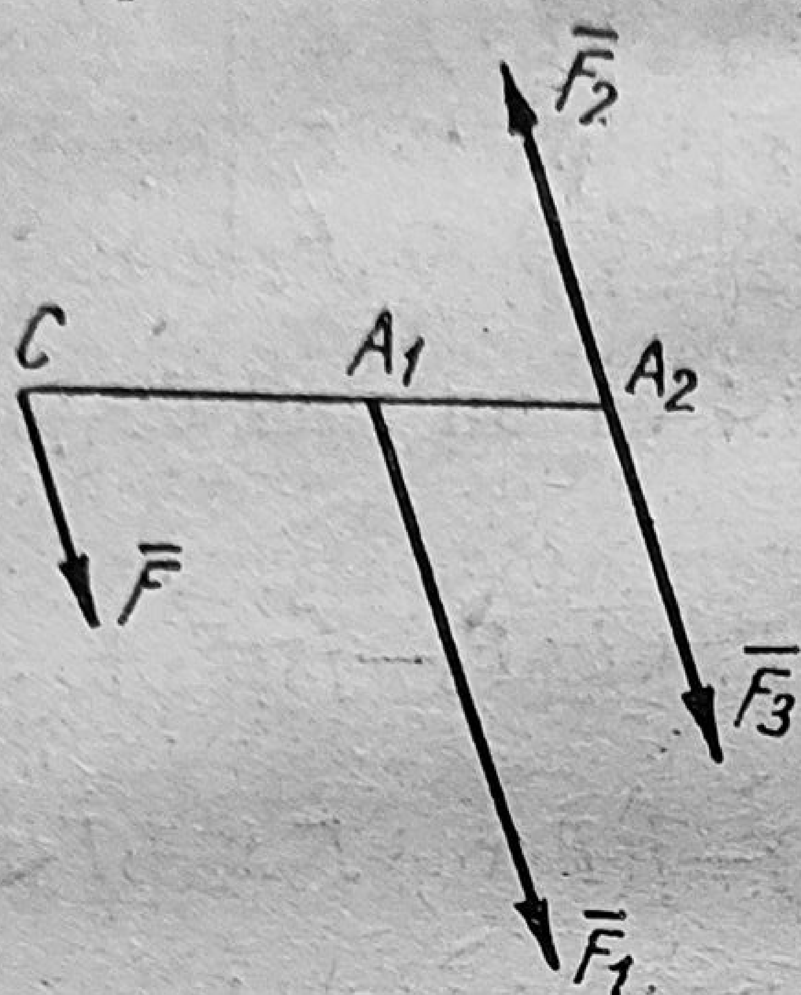


Fig. 45

Ne putem folosi de această proprietate pentru a înlocui în formulele (5.4) și (5.5) forțele propriu-zise cu proiecțiile lor. Notăm prin α, β, γ unghiurile direcțiilor comune ale tuturor forțelor $\overline{F}$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... cu axele de coordonate. Proiecțiile acestor forțe pe axele de coordonate, vor fi:

$$X=F\cos\alpha,\ X_1=F_1\cos\alpha,\ X_2=F_2\cos\alpha,\ X_3=F_3\cos\alpha, \cdots$$
$$Y=F\cos\beta,\ Y_1=F_1\cos\beta,\ Y_2=F_2\cos\beta,\ Y_3=F_3\cos\beta, \cdots$$
$$Z=F\cos\gamma,\ Z_1=F_1\cos\gamma,\ Z_2=F_2\cos\gamma,\ Z_3=F_3\cos\gamma, \cdots$$

Inmulțind numărătorul și numitorul primei părți, de exemplu, la prima din formulele (5.4) consecutiv cu cos α, cos β și cos γ, vom obține:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{X_1x_1+X_2x_2+X_3x_3+\cdots}{X_1+X_2+X_3+\cdots}=\frac{\sum\limits_n X_n x_n}{X},\\
\xi &= \frac{Y_1x_1+Y_2x_2+Y_3x_3+\cdots}{Y_1+Y_2+Y_3+\cdots}=\frac{\sum\limits_n Y_n x_n}{Y},\\
\xi &= \frac{Z_1x_1+Z_2x_2+Z_3x_3+\cdots}{Z_1+Z_2+Z_3+\cdots}=\frac{\sum\limits_n Z_n x_n}{Z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

Asemenea formule sînt valabile și pentru celelalte coordonate ale centrului forțelor paralele.

§ 24. Cazul general al forțelor paralele. Pentru a trece la cazul general al forțelor paralele care se aplică unui solid absolut rigid, cînd unele forțe pot fi dirijate într-un sens, iar celelalte în sens contrar, trebuie examinat mai întîi cazul a două forțe antiparalele.

Să presupunem că sînt date două forțe antiparalele $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ cu punctele de aplicație A_1 și A_2 (fig. 45). Vom examina numai cazul cînd modulele F_1 și F_2 ale forțelor antiparalele $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ nu sînt egale între ele; să presupunem că avem de exemplu $F_1 > F_2$. Descompunem forța $\overline{F_1}$ în două forțe paralele și dirijate în același sens $\overline{F}$ și $\overline{F_3}$, astfel încît să avem $F_3 = F_2$, iar forța $\overline{F_3}$ să fie aplicată în punctul A_2; atunci forțele $\overline{F_3}$ și $\overline{F_2}$ se vor echilibra. Această descompunere este posibilă numai într-un singur mod. În adevăr, din egalitatea $F + F_3 = F_1$ găsim pentru modulul forței $\overline{F}$ o singură valoare $F = F_1 - F_3 = F_1 - F_2$; punctul C de aplicare a ei este unic, deoarece din formula (5.1) avem:

$$\frac{A_1C}{A_1A_2} = \frac{F_3}{F} = \frac{F_2}{F_1 - F_2},$$

adică

$$A_1C = A_1A_2 \frac{F_2}{F_1 - F_2}. \tag{5.7}$$

Din ultima formulă deducem:

$$CA_1(F_1 - F_2) = A_1A_2 \cdot F_2$$

sau

$$CA_1 \cdot F_1 = CA_1 \cdot F_2 + A_1A_2 \cdot F_2.$$

De aici vom obține:

$$CA_1 \cdot F_1 = CA_2 \cdot F_2,$$

sau

$$\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{F_2}{F_1}. \tag{5.8}$$

Această formulă după aspectul exterior este identică cu formula (5.1), dar noi vedem că în cazul a două forțe paralele dirijate în același sens, punctul C împărțea segmentul A_1A_2 în raportul $F_2 : F_1$ interior, pe cînd în cazul a două forțe antiparalele punctul C împarte segmentul A_1A_2 în raportul $F_2 : F_1$ exterior. Astfel, obținem o singură forță $\overline{F}$ aplicată în punctul C și ajungem la următoarea teoremă:

Două forțe antiparalele și neegale au totdeauna rezultanta paralelă cu ele și îndreptată în sensul forței mai mari; modulul rezultantei este egal cu diferența modulelor forțelor componente, iar punctul de aplicație al rezultantei împarte distanța dintre punctele de aplicație ale forțelor componente exterior în părți invers proporționale cu forțele componente.

Poziția punctului C este ușor de obținut printr-o simplă construcție geometrică. Pe suporturile Δ_1 și Δ_2 ale forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$; măsurăm segmentele A_1B_1 și A_2B_2, unde segmentul $A_1B_1=\bar{F}_2$ și dirijat după forța $\bar{F}_1$, iar segmentul $A_2B_2=\bar{F}_1$ și dirijat în sens contrar forței $\bar{F}_2$. Unind printr-o dreaptă punctele B_1 și B_2 găsim punctul căutat C, ca punct de intersecție al dreptelor A_2A_1 și $B_2 B_1$. În adevăr, din asemănarea triunghiurilor A_1B_1C și A_2B_2C ajungem imediat la relația (5.8).

Este evident că în cazul forțelor antiparalele, punctele de aplicație CA_1 și A_2 ale forțelor pot fi interpretate ca centre de rotație în mod analog cu interpretarea făcută în § 23 pentru cazul forțelor paralele dirijate în același sens.

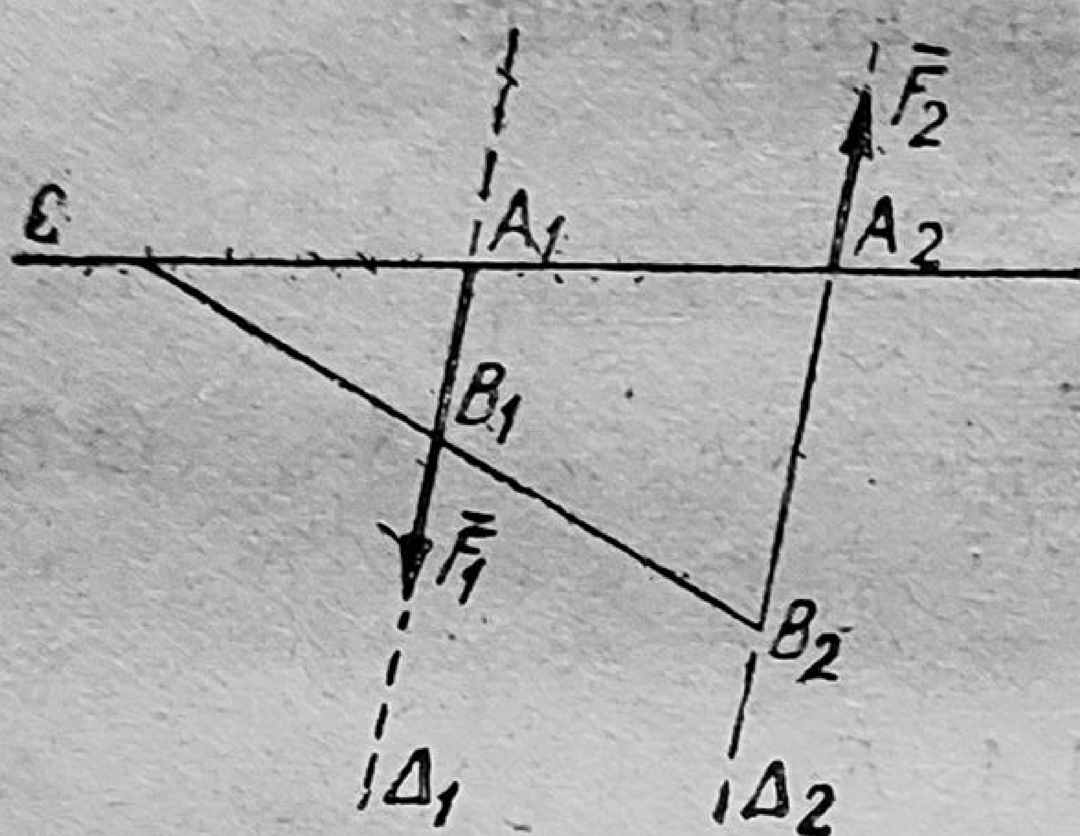


Fig. 46

Să presupunem acum că diferența $F_1—F_2$ tinde către zero. Atunci modulul rezultantei $F=$ $=F_1—F_2$ va tinde către zero, dar punctul ei de aplicație C, conform formulei (5.7) va tinde către infinit. Astfel, două forțe antiparalele și egale între ele, au o rezultantă cu modul egal cu zero și care este aplicată într-un punct situat la infinit. Fără a introduce forțe situate la infinit și egale cu zero, trebuie să concludem că *două forțe antiparalele și egale nu au rezultantă;* acest sistem de două forțe se numește cuplu de forțe sau pur și simplu cuplu și reprezintă în același timp cu forța, un element mecanic primordial. Studiul cuplurilor face obiectul capitolului VIII al prezentului curs de mecanică.

Este evident că în cazul forțelor antiparalele, rezultanta $\bar{F}$ a forțelor este egală cu suma geometrică a forțelor, adică avem $\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2$.

Avînd un sistem oarecare de forțe paralele și adunînd succesiv forțele fie cu ajutorul teoremei compunerii forțelor paralele de același sens fie cu teorema compunerii a două forțe antiparalele, vom obține în general rezultanta $\bar{F}$ care va fi egală cu suma geometrică a forțelor componente.

$$\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3+\ldots=\sum_n \bar{F}_n. \qquad (5.9)$$

Totuşi, în acest caz general, deoarece nu toţi vectorii $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... sînt de acelaşi sens, se poate întîmpla să avem $\overline{F}=0$. Este necesar de observat că această egalitate nu este o condiţie suficientă a echilibrului forţelor paralele, deoarece pentru cazul cuplului de forţe avem de asemenea $\overline{F}=0$, însă, din cauza existenţei cuplului care tinde să rotească corpul, nu se poate realiza echilibrul. Astfel, egalitatea $F=0$ este o condiţie necesară dar nu suficientă a echilibrului unui sistem general de forţe paralele.

Din formulele (5.9) cu acelaşi procedeu ca şi din prima formulă (5.2), din care s-au dedus formulele (5.3), obţinem:

$$\left.\begin{aligned} X&=X_1+X_2+X_3+\ldots\sum_n X_n\,,\\ Y&=Y_1+Y_2+Y_3+\ldots\sum_n Y_n\,,\\ Z&=Z_1+Z_2+Z_3+\ldots\sum_n Z_n\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

În acest fel, şi pentru cazul general al forţelor paralele, proiecţia rezultantei este egală cu suma proiecţiilor forţelor componente, dar în formulele (5.10) prin sumă se subînţeleg sumele algebrice, deoarece proiecţiile forţelor componente pot avea semne diferite, pe cînd în formulele (5.3) proiecţiile componentelor pe orice axă, au fost toate de acelaşi semn. Formulele (5.2) şi (5.3) se pot extinde şi asupra unui sistem arbitrar şi forţe paralele, introducînd următoarea condiţie; anume, vom înţelege prin mărimile F_1, F_2, F_3, ... nu mărimi aritmetice ci algebrice, adică luate cu semnele plus şi minus. Pentru aceasta, alegînd unul din cele două sensuri al forţelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... ca pozitiv şi altul ca negativ, vom socoti pozitive valorile acelor forţe care sînt dirijate în sens pozitiv, şi negative valorile acelor forţe care au un sens negativ. Atunci, pentru cazul general al forţelor paralele, va avea loc relaţia:

$$F=F_1+F_2+F_3+\ldots=\sum_n F_n\,, \tag{5.11}$$

în care suma poate fi egală cu zero, deoarece elementele ei sînt mărimi algebrice. Introducînd această condiţie la efectuarea proiecţiilor forţelor paralele pe axele de coordonate, prin unghiuri (α, β, γ) ale direcţiei forţelor cu axele de coordonate, putem

subînțelege unghiurile cu axele de coordonate ale acelei direcții care este considerată pozitivă; ca factori ai cosinușilor acestor unghiuri, să nu luăm modulele F_n ale forțelor, ci mărimile algebrice F_n ale căror semne se stabilesc prin condiția arătată mai sus.

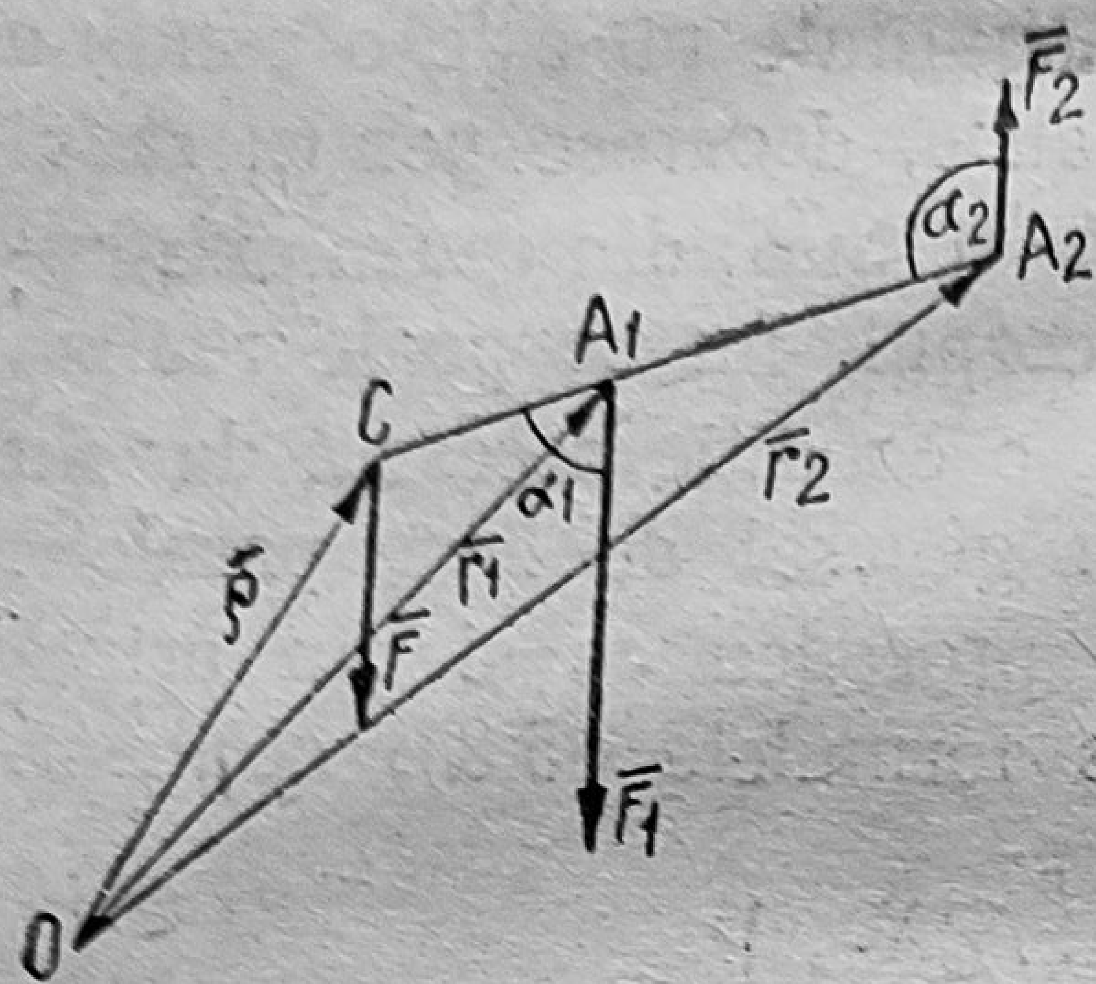


Fig. 47

Să demonstrăm că teorema lui Varignon este valabilă și în cazul general al unui sistem de forțe paralele. Să o demonstrăm mai întîi pentru două forțe antiparalele. Fie două forțe antiparalele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ cu rezultanta $\bar{F}$ (fig. 47). Să luăm un punct arbitrar în spațiu și să ducem vectorii $\overline{OA}_1=\bar{r}_1$, $\overline{OA}_2=\bar{r}_2$, $\overline{OC}=\bar{\rho}$. Să calculăm momentul rezultant $\bar{M}$ al forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, după formula:

$$\bar{M}=\bar{r}_1\times\bar{F}_1+\bar{r}_2\times\bar{F}_2.$$

Din fig. 47 se deduce că

$$\bar{\rho}+\overline{CA}_1=\bar{r}_1, \quad \bar{\rho}+\overline{CA}_2=\bar{r}_2;$$

de aceea obținem

$$M=(\bar{\rho}+\overline{CA}_1)\times\bar{F}_1+(\bar{\rho}+\overline{CA}_2)\times\bar{F}_2=\bar{\rho}\times\bar{F}_1+\bar{\rho}\times\bar{F}_2+\overline{CA}_1\times\bar{F}_1+\overline{CA}_2\times\bar{F}_2 .$$

Ca și în § 23 se poate demonstra că suma ultimilor doi termeni este egală cu zero. În adevăr, ambii vectori $\overline{CA}_1\times\bar{F}_1$ și $\overline{CA}_2\times\bar{F}_2$ reprezentînd momentele forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ în raport cu punctul C, au aceeași direcție, sînt de sens contrar, iar modulele acestor vectori sînt egale între ele, deoarece avem:

$$|\overline{CA}_1\times\bar{F}_1|=CA_1\cdot F_1\sin\alpha_1=CA_1\cdot F_1\sin(\pi-\alpha_2)=$$
$$=CA_1\cdot F_1\sin\alpha_2\ |\overline{CA}_2\times\bar{F}_2|=CA_2\cdot F_2\sin\alpha_2 ,$$

și după formula (5.8) trebuie să avem $CA_1\cdot F_1=CA_2\cdot F_2$. Astfel rezultă

$$\bar{M}=\bar{\rho}\times\bar{F}_1+\bar{\rho}\times\bar{F}_2=\bar{\rho}\times(\bar{F}_1+\bar{F}_2)=\bar{\rho}\times\bar{F}.$$

Prin același procedeu ca și pentru cazul forțelor paralele dirijate în același sens, această formulă se poate extinde asupra oricărui număr de forțe paralele între ele, astfel că în general, vom avea:

$$\bar{M}=\sum_n \bar{r}_n\times\bar{F}_n=\bar{\rho}\times\bar{F}. \tag{5.12}$$

Astfel, am ajuns *la teorema lui Varignon pentru orice sistem de forțe paralele, a căror rezultantă nu este egală cu zero.*

In cazul indicat, momentul rezultantei este egal cu momentul rezultant al sistemului dat de forțe.

Pentru proiecțiile (M_x, M_y, M_z) ale momentului rezultant $\bar{M}$, vom obține formulele (5.13):

$$\left.\begin{aligned} M_x&=\sum_n M_{nx}=\sum_n(y_nZ_n-z_nY_n)=\eta Z-\zeta Y,\\ M_y&=\sum_n M_{ny}=\sum_n(z_nX_n-x_nZ_n)=\zeta X-\xi Z,\\ M_z&=\sum_n M_{nz}=\sum_n(x_nY_n-y_nX_n)=\xi Y-\eta X.\end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Dacă rezultanta $\bar{F}$ a sistemului general de forțe paralele va fi egală cu zero, din formula (5.12) sau (5.13), nu se poate încă trage concluzia că trebuie să avem $\bar{M}=0$, întrucît vom vedea că în acest caz $\rho=\infty$ și teorema lui Varignon duce la nedeterminare. Pentru a evita aceste nedeterminări, este mai simplu în acest caz, pentru calculul momentului rezultant $\bar{M}$, să nu ne servim de teorema lui Varignon ci să calculăm momentul rezultant direct din formula:

$$M=\sum_n \bar{M}_n=\sum_n \bar{r}_n\times\bar{F}_n.$$

Bazîndu-ne pe teorema lui Varignon, am dedus expresia (5.4) pentru coordonatele centrului forțelor paralele dirijate în același sens. Este evident că același procedeu se poate folosi și la studiul cazului general al forțelor paralele. Totuși, cînd vom roti forțele în jurul punctului lor de aplicație, ca ele să devină, de exemplu, paralele cu axa Oz, în cazul general unele din forțe vor fi dirijate în sensul axei Oz, iar celelalte în sens opus, și proiecțiile forțelor pe axa Oz vor fi egale cu modulele forțelor luate cu semnele lor, adică mărimi algebrice. Evident că pentru păstrarea formei formulelor (5.4) și (5.5) și în cazul general este suficient de a înțelege prin F_1, F_2, F_3..., mărimi algebrice

la fel cum s-a procedat la deducerea formulei (5.11). Vedem că, dacă avem:

$$F=F_1+F_2+F_3+\ldots=0,$$

atunci, din formulele (5.4) obținem $\xi=\eta=\zeta=\infty$, iar din formulele (5.5), că $\bar{\rho}=\infty$; am obținut deja aceasta în cazul particular al cuplurilor de forțe. Dar, dacă în același timp

$$F=\sum_n F_n=0,\quad \sum_n F_n x_n=0,\quad \sum_n F_n y_n=0,\quad \sum_n F_n z_n=0,\qquad (5.14)$$

atunci expresiile coordonatelor ξ, η, ζ capătă o formă nedeterminată; în acest caz se spune că are loc *echilibru indiferent*. Aceasta înseamnă că sistemul forțelor paralele rămîne în echilibru, oricum am roti forțele în jurul punctelor lor de aplicație, păstrînd condiția de paralelism a forțelor și neschimbînd valorile lor algebrice.

§ 25. Variația momentului rezultant al forțelor paralele. Momentul cuplului. Fie un sistem arbitrar de forțe paralele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \ldots$ Momentul rezultant $\bar{M}$ al acestui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare O din spațiu, după definiție (v. § 18), este:

$$\bar{M}=\bar{M}_1+\bar{M}_2+\bar{M}_3+\cdots=\sum_n \bar{M}_n=\bar{r}_1\times\bar{F}_1+\bar{r}_2\times\bar{F}_2+\bar{r}_3\times\bar{F}_3+\cdots=$$
$$=\sum_n \bar{r}_n\times\bar{F}_n\,.$$

Să calculăm momentul rezultant $\bar{M}'$ în raport cu un alt punct oarecare din spațiu O' (fig. 48). Să ducem vectorii $\overline{O'A_1}=\bar{r}_1'$, $\overline{O'A_2}=\bar{r}_2'$, $\overline{O'A_3}=\bar{r}_3'\ldots$ și vectorul $\overline{OO'}=\bar{d}$. Avem:

$$\bar{M}'=\bar{M}_1'+\bar{M}_2'+\bar{M}_3'+\cdots=\sum_n \bar{M}_n'\,.$$

Aplicînd la partea dreaptă a acestei formule relația (2.22) vom obține:

$$\bar{M}'=\bar{M}_1-\bar{d}\times\bar{F}_1+\bar{M}_2-\bar{d}\times\bar{F}_2+\bar{M}_3-\bar{d}\times\bar{F}_3+\ldots,$$

sau

$$\bar{M}'=\bar{M}_1+\bar{M}_2+\bar{M}_3+\ldots-\bar{d}\times(\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3+\ldots).$$

De aici ajungem la formula:

$$\bar{M}'=\bar{M}-\bar{d}\times\bar{F}.\qquad (5.15)$$

Să presupunem acum că rezultanta sistemului de forțe paralele este egală cu zero, adică $F=0$, atunci formula (5.15) devine:

$$\overline{M'}=\overline{M}; \tag{5.16}$$

astfel obținem următoarea teoremă:

Momentul rezultant al sistemului de forțe paralele, a căror rezultantă este egală cu zero, este constant în raport cu oricare punct din spațiu.

Vedem că în acest caz momentul rezultant al unui sistem de forțe paralele, este un vector *liber.*

Cazul cel mai simplu al unui asemenea sistem este cazul unui cuplu de forțe. De aici deducem teorema:

Momentul rezultant al unui cuplu de forțe este constant în raport cu oricare punct din spațiu.

Momentul rezultant al unui cuplu de forțe se numește mai pe scurt *momentul cuplului;* prin urmare *momentul cuplului nu depinde de punctul din spațiu în raport cu care îl determinăm.*

Astfel, momentul unei forțe în raport cu un punct reprezintă un exemplu de vector legat, forța — un exemplu de vector alunecător, iar momentul cuplului — un exemplu de vector liber.

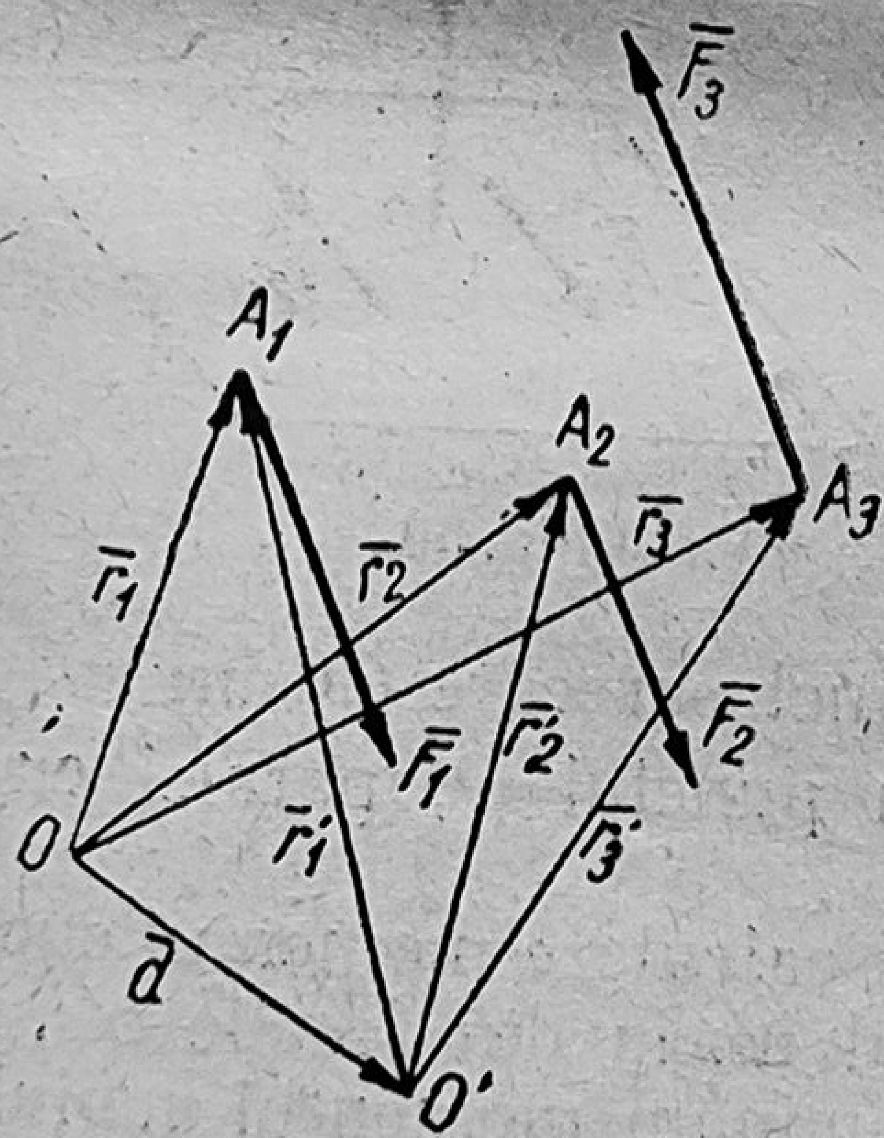


Fig. 48

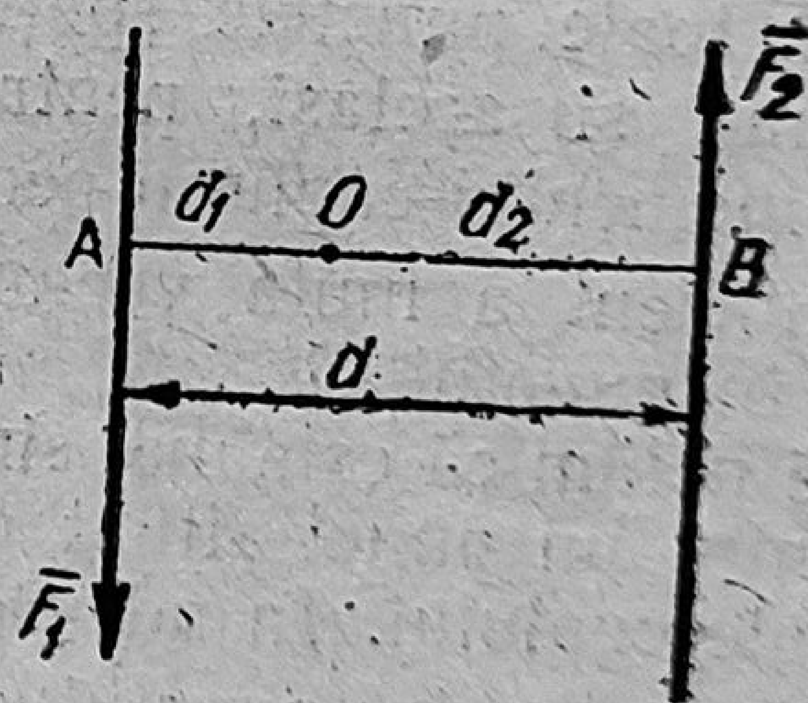


Fig. 49

Să calculăm momentul $\overline{M}$ al cuplului. Să presupunem că ni se dă cuplul compus din forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ care au modulul comun F; să luăm planul cuplului drept plan al desenului și vom determina momentul $\overline{M}$ în raport cu un punct oarecare O din planul cuplului (fig. 49). Coborîm perpendicularele OA și OB, respectiv pe

forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ și fie $OA=d_1$ și $OB=d_2$. Deoarece momentele $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$ ale forțelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt ambele dirijate perpendicular în sus pe planul desenului, tot astfel va fi dirijat momentul $\overline{M}$ al cuplului, egal cu:

$$\overline{M}=\overline{M}_1+\overline{M}_2,$$

sau

$$M=Fd_1+Fd_2=F(d_1+d_2),$$

adică

$$M=Fd. \tag{5.17}$$

Distanța dintre suporturile forțelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ se numește *brațul cuplului*. Astfel, obținem următoarea teoremă:

Momentul cuplului este egal ca mărime cu produsul modulului forței prin brațul cuplului, are direcția normală pe planul cuplului și sensul astfel încît un observator așezat pe planul cuplului între forțe în lungul vectorului moment să vadă forțele cuplului dirijate de la dreapta spre stînga.

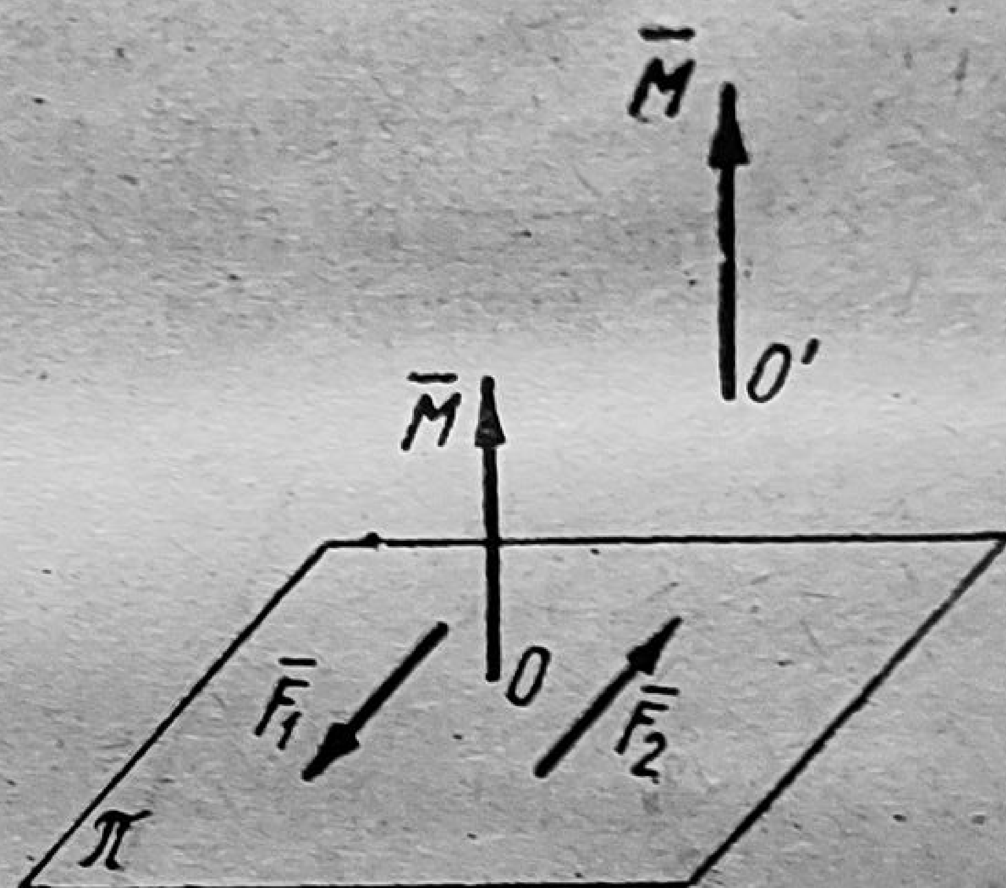


Fig. 50

Este util să se memoreze reprezentarea cuplului și a momentului său, arătate în fig. 50. Deoarece momentul cuplului în raport cu toate punctele spațiului este unul și același, pentru a obține momentul cuplului pentru un punct oarecare O' din spațiu, este suficient a muta vectorul $\overline{M}$ din punctul O, paralel cu el însuși în punctul O'.

Să notăm că este mai simplu să se calculeze momentul cuplului pentru un punct situat pe suportul uneia din forțele componente ale cuplului. În adevăr, să determinăm momentul cuplului, de exemplu, pentru punctul A situat pe suportul forței $\overline{F}_1$ (fig. 49). Atunci momentul forței $\overline{F}_1$ în raport cu punctul A va fi egal cu zero și aflarea momentului cuplului se reduce la aflarea momentului forței $\overline{F}_2$ în raport cu punctul A, adică se ajunge direct la formula (5.17).

§ 26. Exemple. 14. Doi oameni duc cu brațele de capetele A_1 și A_2 o bară dreaptă a cărei greutate se poate neglija; în punctul C este atîrnată de bară o încărcătură cu greutatea $P=35$ kg. Se dă $A_1A_2=1$ m și

$A_1C=40$ cm. Să determinăm presiunea barei pe mîinile oamenilor care o poartă. Să notăm prin P_1 presiunea la capătul A_1 şi prin P_2 presiunea la capătul A_2. Deoarece $A_2C=60$ cm, vom avea:

$$P_1+P_2=35, \quad P_1 : P_2=60 : 40=3 : 2.$$

De aici găsim că $P_1=21$ kg şi $P_2=14$ kg.

15. Cum putem măsura precis greutatea pe o balanţă cu braţe inegale? Să presupunem că braţele pîrghiei balanţei sînt l_1 şi l_2. Să notăm prin P greutatea exactă a încărcăturii. Să punem iniţial încărcătura P pe talerul stîng al balanţei corespunzător braţului l_1 şi să echilibrăm balanţa punînd pe talerul drept greutăţi echivalente cu greutatea P_1; vom avea conform formulei (5.1):

$$Pl_1=P_1l_2.$$

Să mutăm apoi încărcătura P pe talerul drept al balanţei corespunzător braţului l_2 şi să echilibrăm balanţa punînd pe talerul stîng greutăţi echivalente cu P_2; din cauza inegalităţii braţelor balanţei vom avea:

$$P_2\neq P_1$$

Vom obţine:

$$Pl_2=P_2l_1.$$

Inmulţind între ei termenii egalităţilor obţinute, vom găsi:

$$P^2l_1l_2=P_1P_2l_1l_2,$$

sau

$$P=\sqrt{P_1P_2}.$$

Astfel, greutatea reală este egală cu media geometrică a greutăţilor indicate. Dacă P_1 se apropie de P_2, atunci, în loc de media geometrică $\sqrt{P_1P_2}$ se poate lua media aritmetică $\frac{P_1+P_2}{2}$, care cu toate că este cu ceva mai mare decît P, totuşi se apropie de valoarea sa reală.

16. Cîntarul decimal. In expunerea modului de funcţionare a cîntarului decimal, vom neglija greutatea proprie a cîntarului. Pîrghia dreaptă $ACBD$ de ordinul întîi are punctul de sprijin fixat în punctul C, astfel încît $AC=10\ BC$. Platforma HGF are punctul de sprijin fixat în punctul H; în punctul F această platformă este legată prin bara FD de pîrghia $ACBD$ astfel încît în punctele D şi F bara FD să se sprijine pe pîrghia $ACBD$ şi pe platforma HGF cu muchiile cuţitelor fixate de ea. A doua platformă $EG'\pi$ se sprijină prin muchia cuţitului G pe platforma HGF. Aceasta a doua platformă $EG'\pi$ este legată de pîrghia $ACBD$ prin bara BE, astfel încît, în punctele B şi E bara BE să se sprijine pe pîrghia $ACBD$ şi platforma $EG'\pi$ prin muchiile cuţitelor fixate de ea (fig. 51). Pe platforma $EG'\pi$ se aşază într-un loc oarecare încărcătura de cîntărit Q. După regula compunerii forţelor paralele îndreptate în acelaşi sens, forţa $\overline{Q}$ se poate descompune în două forţe $\overline{Q}_1$ şi $\overline{Q}_2$ aplicate respectiv în punctele E şi G';

prin intermediul cuțitului G asupra platformei HGF acționează forța Q_2. Pentru ca platforma HGF să fie în echilibru, forța Q_2 aplicată în punctul G

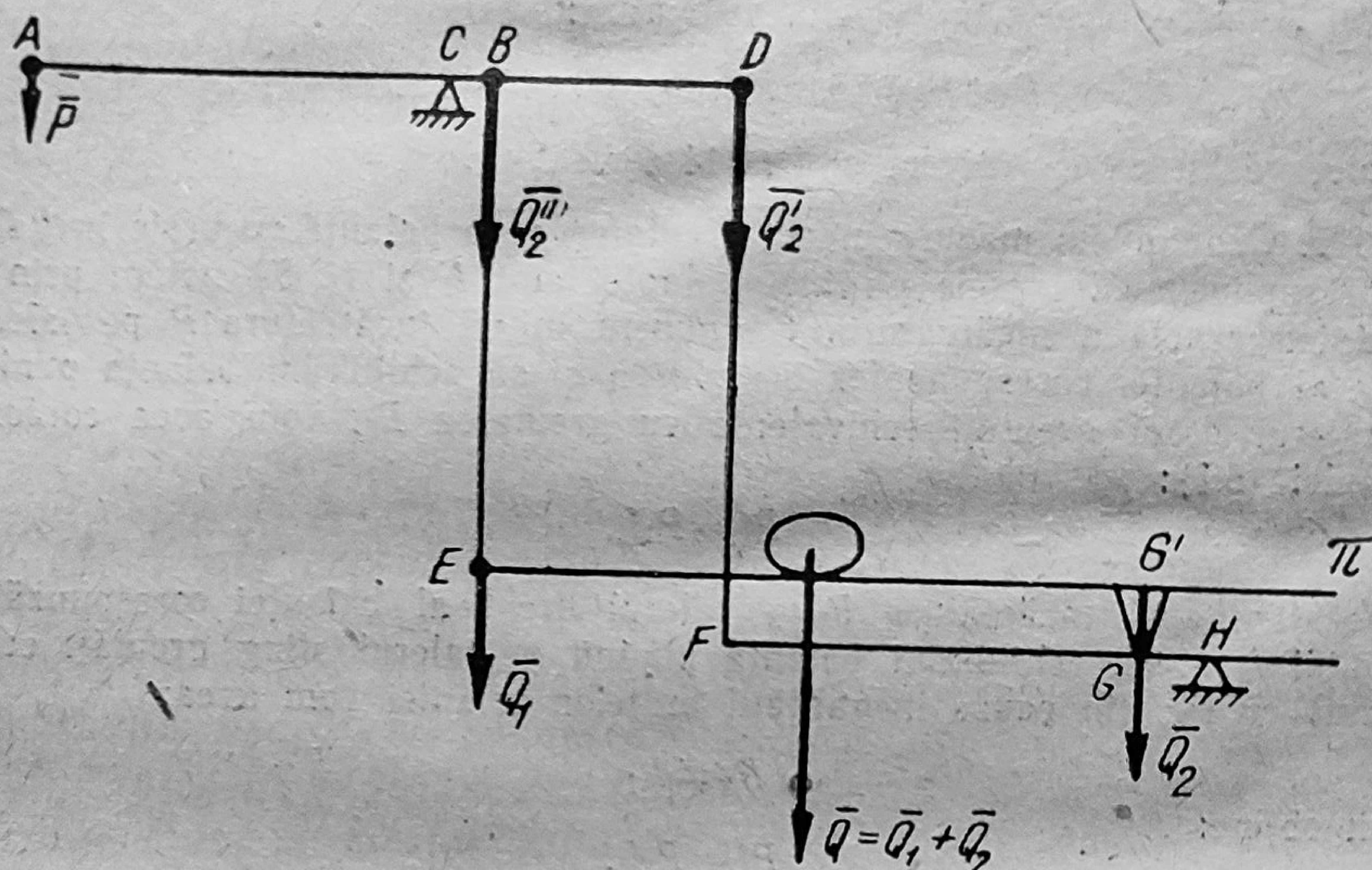


Fig. 51

trebuie să fie echilibrată prin forța de întindere $\overline{Q}_2'$ dezvoltată de bara FG în punctul F. Pentru aceasta, conform regulii compunerii forțelor antiparalele, trebuie să avem:

$$Q_2' : Q_2 = GH : FH,$$

sau

$$Q_2' = Q_2 \frac{GH}{FH}.$$

Este evident că bara FD trebuie să tragă pîrghia $ACBD$ cu forța $\overline{Q}_2'$ în punctul D. Această forță Q_2' aplicată în punctul D se poate înlocui printr-o forță oarecare $\overline{Q}_2''$ aplicată în punctul B; pentru a găsi valoarea acestei forțe $\overline{Q}_2''$ vom nota că forța $-\overline{Q}_2''$ dirijată în sus, trebuie să echilibreze forța $\overline{Q}_2'$ dirijată în jos, adică trebuie să avem:

$$Q_2'' : Q_2' = DC : BC,$$

sau

$$Q_2'' = Q_2' \frac{DC}{BC}.$$

Introducînd în această egalitate valoarea Q_2' din relația precedentă, vom avea:

$$Q_2'' = Q_2 \frac{GH}{FH} \cdot \frac{DC}{BC}.$$

Astfel, forțele care acționează pe brațul CBD al pîrghiei $ABCD$ se reduc la forța aplicată în punctul B și egală ca valoare cu

$$Q_1+Q_2''=Q_1+Q_2\frac{GH}{FH}\cdot\frac{DC}{BC}.$$

Dacă

$$\frac{GH}{FH}\cdot\frac{DC}{BC}=1,$$

adică

$$\frac{GH}{FH}=\frac{BC}{DC},$$

atunci, în punctul B pe pîrghie, va acționa forța cu mărimea egală cu $Q_1+Q_2=Q$, adică greutatea întregii încărcături care se cîntărește. Deoarece brațul AC este de 10 ori mai mare decît brațul BC, această greutate Q este echilibrată în punctul A prin greutatea $P=0{,}1\ Q$, din care cauză cîntarul a fost denumit decimal. Nu este greu de dovedit că micile deplasări ale platformei $EG'\pi$ datorită încărcăturii Q, nu influențează rezultatul deoarece prin deplasări mici platforma $EG'\pi$ rămîne paralelă cu ea însăși. In adevăr, să presupunem că sub acțiunea încărcăturii Q, brațul CBD se lasă în jos, rotindu-se în jurul punctului C cu un unghi foarte mic α. Atunci punctul B și împreună cu el și punctul E se vor deplasa în jos cu un segment foarte mic $CB\cdot\alpha$. La fel, punctul D și împreună cu el și punctul F se vor deplasa în jos cu un segment foarte mic $CD\cdot\alpha$; deoarece punctul H este fix, deplasarea punctului G și împreună cu el și a punctului G' provocată de deplasarea punctului F, va fi egală cu:

$$CD\cdot\alpha\frac{GH}{FH}.$$

Dar mai sus am avut relația:

$$\frac{GH}{FH}=\frac{BC}{DC}$$

de unde urmează că

$$CD\frac{GH}{FH}=CB.$$

Astfel, cele două puncte E și G' ale platformei $EG'\pi$ se deplasează în jos cu același segment mic $CB\cdot\alpha$, adică platforma $EG'\pi$ se deplasează paralel cu ea însăși.

17. Se dau patru forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ și $\overline{F}_4$ cu proiecțiile $\overline{F}_1$ (2, 2, 3), $\overline{F}_2$(4, 4, 6), $\overline{F}_3$(—2, —2, —3), $\overline{F}_4$(6, 6, 9), aplicate în punctele A_1, A_2, A_3 și A_4, cu coordonatele:

$$A_1(0,\ 0,\ 1),\ A_2(1,\ 2,\ 1),\ A_3(2,\ 1,\ 1),\ A_4(5,\ 2,\ 7);$$

să se studieze acest sistem de forțe și să se reducă la cel mai simplu sistem. In primul rînd din proporționalitatea proiecțiilor acestor forțe, pe axele respective, concludem că forțele sînt paralele între ele. Să considerăm

direcţia forţei $\bar{F}_1$ ca pozitivă; atunci cantităţile F_1, F_2, F_4, vor fi pozitive, iar cantitatea F_3 negativă. Vom avea:

$$F_1 = +\sqrt{2^2+2^2+3^2} = +\sqrt{17}, \quad F_2 = +\sqrt{4^2+4^2+6^2} = +2\sqrt{17},$$
$$F_3 = -\sqrt{2^2+2^2+3^2} = -\sqrt{17}, \quad F_4 = +\sqrt{6^2+6^2+9^2} = +3\sqrt{17}.$$

Direcţia pozitivă adică direcţia forţei $\bar{F}_1$ formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ ale căror cosinusuri sînt egale cu:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{17}}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{17}}, \qquad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{17}};$$
$$\alpha = \beta = 60°58'58'', \qquad \gamma = 43°18'50''.$$

Să găsim rezultanta $\bar{F}(X, Y, Z)$ şi coordonatele (ξ, η, ζ) ale centrului acestor forţe paralele, vom avea:

$$F = +\sqrt{17} + 2\sqrt{17} - \sqrt{17} + 3\sqrt{17} = +5\sqrt{17} = 20{,}616;$$
$$X = 2+4-2+6 = 10,$$
$$Y = 2+4-2+6 = 10,$$
$$Z = 3+6-3+9 = 15.$$

Ca să determinăm coordonatele centrului acestor forţe paralele, vom apela la prima formulă (5.6) şi la cele similare ei; din ele vom avea:

$$\xi = \frac{X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 + X_4x_4}{X},$$
$$\eta = \frac{Y_1y_1 + Y_2y_2 + Y_3y_3 + Y_4y_4}{Y},$$
$$\zeta = \frac{Z_1z_1 + Z_2z_2 + Z_3z_3 + Z_4z_4}{Z},$$

sau numeric:

$$\xi = \frac{2\cdot 0 + 4\cdot 1 - 2\cdot 2 + 6\cdot 5}{10} = 3,$$
$$\eta = \frac{2\cdot 0 + 4\cdot 2 - 2\cdot 1 + 6\cdot 2}{10} = \frac{9}{5},$$
$$\zeta = \frac{3\cdot 1 + 6\cdot 1 - 3\cdot 1 + 9\cdot 7}{15} = \frac{23}{5}.$$

In acest fel ecuaţia suportului Δ al rezultantei $\bar{F}$ va fi:

$$\frac{x-3}{\frac{2}{\sqrt{17}}} = \frac{y-\frac{9}{5}}{\frac{2}{\sqrt{17}}} = \frac{z-\frac{23}{5}}{\frac{3}{\sqrt{17}}}$$

sau

$$\frac{x-3}{2} = \frac{5y-9}{10} = \frac{5z-23}{15}.$$

Pentru calcularea momentului rezultant $\overline{M}(M_x, M_y, M_z)$ este convenabil a folosi teorema lui Varignon, vom avea:

$$M_x = \eta Z - \zeta Y = \frac{9}{5} \cdot 15 - \frac{23}{5} \cdot 10 = 27 - 46 = -19,$$

$$M_y = \zeta X - \xi Z = \frac{23}{5} \cdot 10 - 3 \cdot 15 = 46 - 45 = +1,$$

$$M_z = \xi Y - \eta X = 3 \cdot 10 - \frac{9}{5} \cdot 10 = 30 - 18 = +12.$$

De aici găsim:

$$M = \sqrt{19^2 + 1^2 + 12^2} = \sqrt{506} = 22,494.$$

Unghiurile a, b c formate de momentul M cu axele de coordonate, se determină cu ajutorul formulelor:

$$\cos a = -\frac{19}{\sqrt{506}}, \quad a = 147°38'5'';$$

$$\cos b = +\frac{1}{\sqrt{506}}, \quad b = 87°27'5'';$$

$$\cos c = +\frac{12}{\sqrt{506}}, \quad c = 57°45'44''.$$

Dacă am vrea să calculăm momentul rezultant al sistemului în mod arbitrar, şi nu pe baza teoremei lui Varignon, atunci ar trebui să calculăm momentele forţelor separate şi am obţine următoarea tabelă:

$$M_{1x} = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2 \qquad M_{1y} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 = +2$$

$$M_{2x} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 4 = +8 \qquad M_{2y} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = -2$$

$$M_{3x} = 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-2) = -1 \qquad M_{3y} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3) = +4$$

$$M_{4x} = 2 \cdot 9 - 7 \cdot 6 = -24 \qquad M_{4y} = 7 \cdot 6 - 5 \cdot 9 = -3$$

$$M_x = \quad = -19 \qquad M_y = \quad = +1$$

$$M_{1z} = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 2 = 0$$

$$M_{2z} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = -4$$

$$M_{3z} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = -2$$

$$M_{4z} = 5 \cdot 6 - 2 \cdot 6 = +18$$

$$M_z = \quad = +12$$

Vedem că am ajuns la rezultatele precedente, dar printr-un procedeu mai lung.

CAPITOLUL VI

CENTRE DE GREUTATE

§ 27. Definiții generale. Se știe că sub acțiunea forței de atracție universală numită și forța gravitației, fiecare particulă materială aflată pe suprafața pămîntului este atrasă de pămînt, iar forța gravitației este dirijată cu aproximație către centrul pămîntului. Să examinăm două direcții ale forței gravitației care formează între ele un unghi de 92’ și care corespund cu direcțiile forțelor de atracție, la pol și la ecuator (fig. 52). Pentru a trece din A în B, trebuie să ne deplasăm cu $^1/_4$ din meridianul pămîntului, adică cu 10 000 000 m. Ca unghiul dintre două drepte să fie egal cu 1″, trebuie să ne deplasăm cu

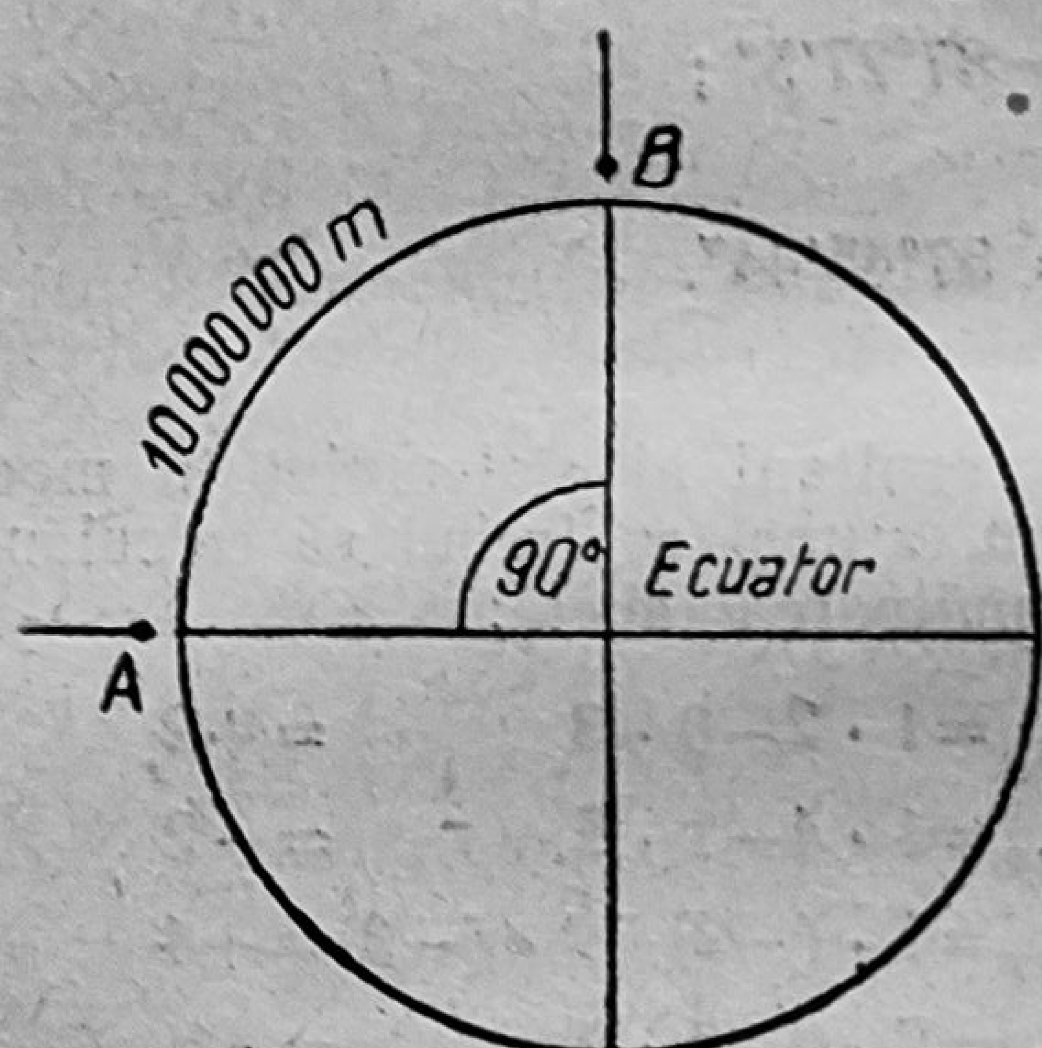


Fig. 52

$$\frac{10\,000\,000}{90 \cdot 60 \cdot 60} = 30{,}9 \text{ m}.$$

De aici rezultă că forțele de atracție a particulelor separate ale corpurilor cu dimensiuni mici se pot considera paralele între ele.

Fie dat un corp material oarecare. Să cercetăm la acest corp material particulele infinit mici. Fiecare particulă este atrasă de pămînt, iar, în conformitate cu cele afirmate anterior, forțele de atracție ale particulelor separate se pot considera paralele între ele. *Rezultanta forțelor paralele de atracție pămîntească a tuturor particulelor separate ale unui corp material, este greutatea acestui corp, iar centrul acestor forțe paralele este centrul de greutate al corpului material.*

Vom căuta centrele de greutate ale curbelor materiale, ale suprafețelor și ale solidelor, introducînd noi noțiuni convenționale: curba materială și suprafața materială.

Să examinăm un corp avînd forma unei bare (fig. 53) şi înăuntrul lui o curbă oarecare AB. Să presupunem că toată cantitatea de materie a corpului cuprinsă între două secţiuni perpendiculare pe curba interioară AB rămîne neschimbată şi se concentrează spre curba AB. În acest caz vom obţine, la limită, curba materială AB. Fie Δs un element de lungime al curbei materiale şi Δm masa acestui element de lungime, atunci raportul

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta s} \tag{6.1}$$

se numeşte *densitatea medie a curbei materiale în locul dat*. Trecînd la limită, vom obţine *densitatea reală* ρ *a curbei materiale* în punctul dat:

$$\rho = \lim \left(\frac{\Delta m}{\Delta s}\right)_{\Delta s \to 0}.$$

Tot astfel vom examina un corp avînd forma unei plăci şi o suprafaţă oarecare Σ în interiorul lui (fig. 54). Să presupunem că toată cantitatea de materie a corpului cuprinsă într-o suprafaţă cilindrică oarecare cu generatoarele perpendiculare pe su-

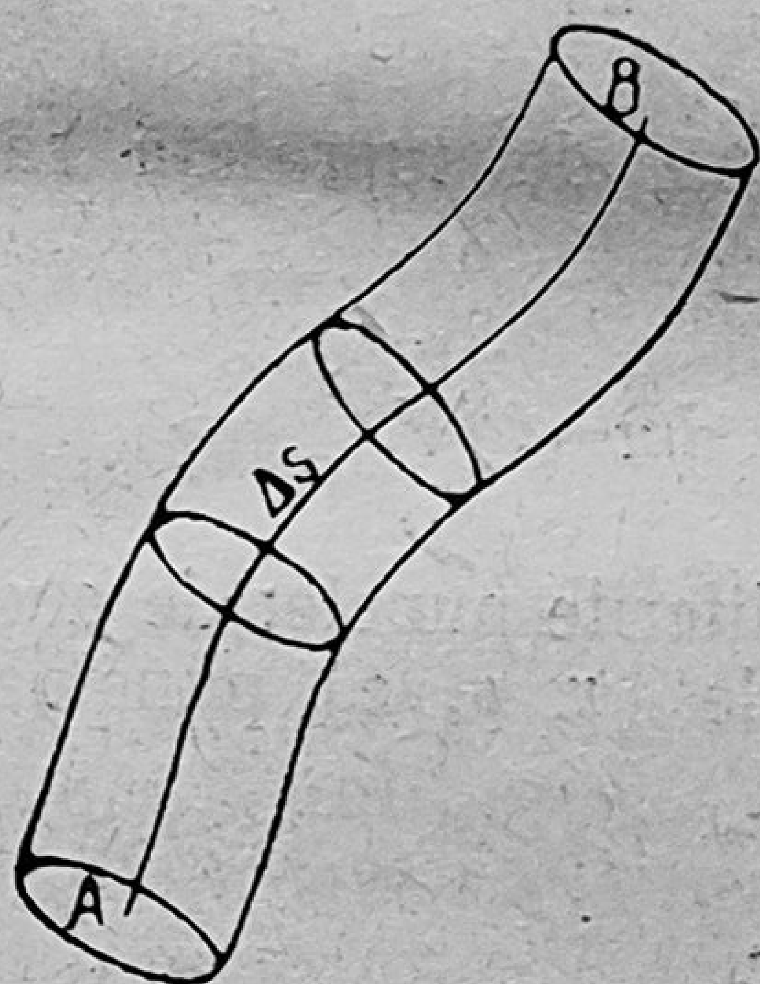


Fig. 53

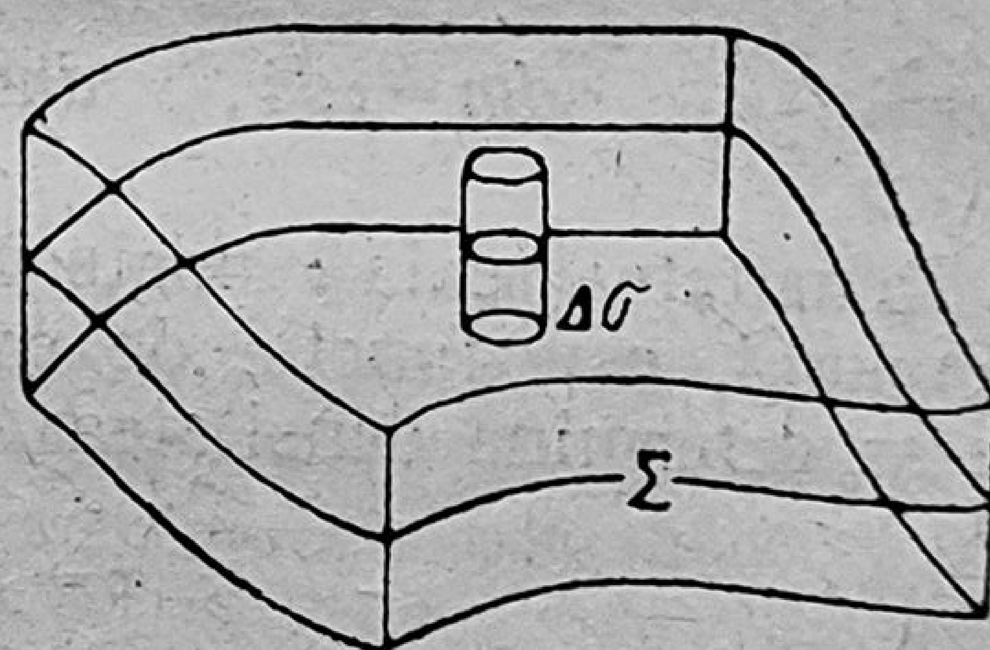


Fig. 54

prafaţa interioară cercetată Σ rămîne neschimbată şi se concentrează către suprafaţa Σ, vom obţine la limită suprafaţa materială Σ. Fie $\Delta\sigma$ un element al suprafeţei materiale Σ şi Δm masa lui, atunci raportul

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta \sigma} \tag{6.2}$$

se numeşte *densitate medie a suprafeţei materiale* în locul dat. Trecînd la limită vom obţine *densitatea reală a suprafeţei materiale* în punctul dat:

$$\rho = \lim \left(\frac{\Delta m}{\Delta \sigma}\right)_{\Delta \sigma \to 0}.$$

În sfîrșit fie ΔV elementul de volum al corpului și Δm — masa acestui element. Atunci raportul

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{6.3}$$

se numește *densitate medie a corpului* în locul dat, iar limita acestui raport

$$\rho = \lim \left(\frac{\Delta m}{\Delta V}\right)_{\Delta V \to 0}$$

se numește *densitate reală a corpului* în punctul dat.

Folosind notațiile din calculul diferențial, vom obține pentru densitatea reală a curbelor, suprafețelor și a solidelor respectiv expresiile

$$\rho = \frac{dm}{ds}, \quad \rho = \frac{dm}{d\sigma}, \quad \rho = \frac{dm}{dV}; \tag{6.4}$$

deci masa dm a unui element de curbă, de suprafață sau de volum va fi respectiv:

$$dm = \rho ds, \quad dm = \rho d\sigma, \quad dm = \rho dV. \tag{6.5}$$

Densitatea reală ρ poate varia în diferite puncte; de aceea ρ, în general, este funcție de coordonatele (x, y, z) punctului în care se determină densitatea

$$\rho = f\,(x, y, z). \tag{6.6}$$

Dacă în toate punctele densitatea reală este aceeași, atunci corpul material se numește *omogen*.

Observație. Este evident că noțiunile de suprafață materială sau curbă materială se pot utiliza în practică în toate cazurile cînd se poate neglija respectiv fie grosimea corpului material, fie grosimea și lățimea în raport cu lungimea lui. Astfel este de exemplu cazul unei foi mari de tablă subțire sau al unei bucăți de sîrmă subțire și lungă.

§ 28. Centrul de greutate și centrul maselor. Să trecem acum la definiția centrului de greutate al unui corp material oarecare. Să împărțim corpul dat în elemente infinit mici. No-

tăm prin m_n masa unui element oarecare; atunci greutatea lui F_n va fi:

$$F_n = m_n g\,,$$

unde g este modulul accelerației gravitației. Dacă $\bar{\rho}$ este vectorul de poziție OC al centrului C al forțelor paralele $\bar{F}_n$, determinat în ipoteza că forțele considerate acționează asupra solidului, atunci după formula (5.5), vom obține:

$$\bar{\rho} = \frac{m_1 g\bar{r}_1 + m_2 g\bar{r}_2 + m_3 g\bar{r}_3 + \ldots}{m_1 g + m_2 g + m_3 g + \ldots} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + m_3\bar{r}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_n m_n\bar{r}_n}{M} \qquad (6.7)$$

unde $M = \sum_n m_n$ este masa corpului material. Vedem din formula (6.7), că centrul C, determinat prin vectorul $\bar{\rho}$, există și în cazul cînd corpul material se găsește în afara acțiunii forței gravitației, deoarece accelerația g de care depinde greutatea, nu intervine în expresia vectorului de poziție. Astfel, poziția centrului C depinde numai de distribuția masei în corpul material, ceea ce ne permite să definim punctul C în modul următor:

Centrul maselor unui sistem de particule materiale este punctul avînd vectorul de poziție $\bar{\rho}$ definit prin formula:

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_n m_n\bar{r}_n}{M}\,,$$

unde m_n reprezintă masele particulelor elementare ale sistemului, r_n vectorii lor de poziție și M — masa întregului sistem.

Este evident că la fiecare sistem material, deformabil sau nedeformabil, în orice moment există un centru al maselor, indiferent dacă sistemul este greu sau nu. În cazul particular al unui sistem perfect rigid, greu, centrul de greutate al sistemului coincide cu centrul maselor precum s-a văzut la deducerea formulei (6.7).

Ca să trecem de la formulele vectoriale la cele analitice vom pune:

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} &= \bar{i}\xi + \bar{j}\eta + \bar{k}\zeta\,,\\
\bar{r}_1 &= \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1,\\
\bar{r}_2 &= \bar{i}x_2 + \bar{j}y_2 + \bar{k}z_2,\\
\bar{r}_3 &= \bar{i}x_3 + \bar{j}y_3 + \bar{k}z_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Introducînd aceste expresii și egalînd între ei coeficienţii vectorilor unitari cu același nume din partea stîngă și dreaptă a formulei (6.7) vom obține următoarele formule:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+\cdots}{m_1+m_2+m_3+\cdots}=\frac{\sum\limits_n m_nx_n}{M},\\ \eta&=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+\cdots}{m_1+m_2+m_3+\cdots}=\frac{\sum\limits_n m_ny_n}{M},\\ \zeta&=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3+\cdots}{m_1+m_2+m_3+\cdots}=\frac{\sum\limits_n m_nz_n}{M},\end{aligned}\right\}\tag{6.8}$$

Aplicăm separat formulele (6.8) în cazul curbelor materiale suprafeţelor materiale și corpurilor tridimensionale.

Curba materială. Fie dată o curbă materială oarecare a cărei lungime este egală cu l. Împărțim această curbă în elementele de lungime Δs cu masele $\Delta m=\rho_m\Delta s$. Aplicînd formulele (6.8) și trecînd la limită, avem

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\lim\sum x\,\Delta m}{M}=\frac{\lim\sum x\rho_m\Delta s}{\lim\sum\rho_m\Delta s},\\ \eta&=\frac{\lim\sum y\,\Delta m}{M}=\frac{\lim\sum y\rho_m\Delta s}{\lim\sum\rho_m\Delta s},\\ \zeta&=\frac{\lim\sum z\,\Delta m}{M}=\frac{\lim\sum z\rho_m\Delta s}{\lim\sum\rho_m\Delta s}.\end{aligned}\right\}\tag{6.9}$$

Pentru a simplifica scrierea formulelor indicele n a fost suprimat. Aceste formule se simplifică dacă curba este omogenă, adică dacă densitatea ei ρ este constantă. În acest caz avem: $\rho_m=\rho$, $M=\rho l$ și

$$\xi=\frac{\lim\sum x\Delta s}{l},\qquad \eta=\frac{\lim\sum y\Delta s}{l},\qquad \zeta=\frac{\lim\sum z\Delta s}{l}.\tag{6.10}$$

Vedem că în cazul curbelor omogene, poziția centrului maselor depinde exclusiv de forma geometrică a curbei.

Suprafața materială. Fie dată o suprafață materială oarecare a cărei arie este egală cu σ. Împărțim această suprafață în elementele avînd ariile $\Delta\sigma$ și masele $\Delta m=\rho_m\Delta\sigma$.

Introducînd aceste expresii și egalînd între ei coeficienții vectorilor unitari cu același nume din partea stîngă și dreaptă a formulei (6.7) vom obține următoarele formule:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+\cdots}{m_1+m_2+m_3+\cdots}=\frac{\sum_n m_nx_n}{M},\\ \eta&=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+\cdots}{m_1+m_2+m_3+\cdots}=\frac{\sum_n m_ny_n}{M},\\ \zeta&=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3+\cdots}{m_1+m_2+m_3+\cdots}=\frac{\sum_n m_nz_n}{M},\end{aligned}\right\} \quad (6.8)$$

Aplicăm separat formulele (6.8) în cazul curbelor materiale suprafețelor materiale și corpurilor tridimensionale.

Curba materială. Fie dată o curbă materială oarecare a cărei lungime este egală cu l. Împărțim această curbă în elementele de lungime Δs cu masele $\Delta m=\rho_m\Delta s$. Aplicînd formulele (6.8) și trecînd la limită, avem

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\lim\sum x\,\Delta m}{M}=\frac{\lim\sum x\rho_m\Delta s}{\lim\sum\rho_m\Delta s},\\ \eta&=\frac{\lim\sum y\,\Delta m}{M}=\frac{\lim\sum y\rho_m\Delta s}{\lim\sum\rho_m\Delta s},\\ \zeta&=\frac{\lim\sum z\,\Delta m}{M}=\frac{\lim\sum z\rho_m\Delta s}{\lim\sum\rho_m\Delta s}.\end{aligned}\right\} \quad (6.9)$$

Pentru a simplifica scrierea formulelor indicele n a fost suprimat. Aceste formule se simplifică dacă curba este omogenă, adică dacă densitatea ei ρ este constantă. În acest caz avem: $\rho_m=\rho$, $M=\rho l$ și

$$\xi=\frac{\lim\sum x\Delta s}{l},\qquad \eta=\frac{\lim\sum y\Delta s}{l},\qquad \zeta=\frac{\lim\sum z\Delta s}{l}. \quad (6.10)$$

Vedem că în cazul curbelor omogene, poziția centrului maselor depinde exclusiv de forma geometrică a curbei.

Suprafața materială. Fie dată o suprafață materială oarecare a cărei arie este egală cu σ. Împărțim această suprafață în elementele avînd ariile $\Delta\sigma$ și masele $\Delta m=\rho_m\Delta\sigma$.

Aplicînd formulele (6.8) și trecînd la limită, obținem:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\lim \sum x \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum x \rho_m \Delta\sigma}{\lim \sum \rho_m \Delta\sigma}, \\ \eta &= \frac{\lim \sum y \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum y \rho_m \Delta\sigma}{\lim \sum \rho_m \Delta\sigma}, \\ \zeta &= \frac{\lim \sum z \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum z \rho_m \Delta\sigma}{\lim \sum \rho_m \Delta\sigma}. \end{aligned}\right\} \quad (6.11)$$

Pentru simplificarea notațiilor indicele n a fost suprimat.

Aceste formule se simplifică dacă suprafața este omogenă adică, dacă densitatea ei ρ este constantă. In acest caz vom avea $\rho_m=\rho$, $M=\rho\sigma$ și formulele precedente capătă aspectul:

$$\xi=\frac{\lim \sum x \Delta\sigma}{\sigma}, \quad \eta=\frac{\lim \sum y \Delta\sigma}{\sigma}, \quad \zeta=\frac{\lim \sum z \Delta\sigma}{\sigma}. \quad (6.12)$$

Vedem că în cazul suprafețelor omogene, poziția centrului maselor depinde exclusiv de forma geometrică a suprafeței.

Corpul material. Fie dat un corp oarecare al cărui volum este egal cu V. Divizăm acest corp în volume elementare ΔV cu masele $\Delta m=\rho_m \Delta V$. Aplicînd formulele (6.8) și trecînd la limită, avem:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\lim \sum x \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum x \rho_m \Delta V}{\lim \sum \rho_m \Delta V}, \\ \eta &= \frac{\lim \sum y \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum y \rho_m \Delta V}{\lim \sum \rho_m \Delta V}, \\ \zeta &= \frac{\lim \sum z \Delta m}{M} = \frac{\lim \sum z \rho_m \Delta V}{\lim \sum \rho_m \Delta V}. \end{aligned}\right\} \quad (6.13)$$

Pentru simplificarea notațiilor indicele n a fost suprimat. Aceste formule se simplifică dacă corpul este omogen, adică dacă densitatea lui este constantă. In acest caz vom avea: $\rho_m=\rho$, $M=\rho V$ și formulele precedente iau forma:

$$\xi=\frac{\lim \sum x \Delta V}{V}, \quad \eta=\frac{\lim \sum y \Delta V}{V}, \quad \zeta=\frac{\lim \sum z \Delta V}{V}. \quad (6.14)$$

Vedem că în cazul corpurilor omogene poziția centrului maselor depinde exclusiv de forma geometrică a corpului.

Limitele sumelor din formulele precedente care ne determină coordonatele centrului maselor în cazul curbelor, suprafețelor și

corpurilor tridimensionale sînt integrale, definite pe lungimea curbelor, aria suprafeţelor şi volumul corpurilor. De aceea, folosindu-ne de notaţiile din calculul integral putem prezenta aceste formule sub forma:

Curbă neomogenă

$$\xi=\frac{\int x\rho\, ds}{M},\quad \eta=\frac{\int y\rho\, ds}{M},\quad \zeta=\frac{\int z\rho\, ds}{M}.$$

Curbă omogenă

$$\xi=\frac{\int x\, ds}{l},\quad \eta=\frac{\int y\, ds}{l},\quad \zeta=\frac{\int z\, ds}{l}.$$

Suprafaţă neomogenă

$$\xi=\frac{\iint x\rho\, d\sigma}{M},\quad \eta=\frac{\iint y\rho\, d\sigma}{M},\quad \zeta=\frac{\iint z\rho\, d\sigma}{M}.$$

Suprafaţă omogenă

$$\xi=\frac{\iint x\, d\sigma}{\sigma},\quad \eta=\frac{\iint y\, d\sigma}{\sigma},\quad \zeta=\frac{\iint z\, d\sigma}{\sigma}.$$

Corp neomogen

$$\xi=\frac{\iiint x\rho\, dV}{V},\quad \eta=\frac{\iiint y\rho\, dV}{V},\quad \zeta=\frac{\iiint z\rho\, dV}{V}.$$

Corp omogen

$$\xi=\frac{\iiint x\, dV}{V},\quad \eta=\frac{\iiint y\, dV}{V},\quad \zeta=\frac{\iiint z\, dV}{V}.$$

§ 29. Metode practice de determinare a coordonatelor centrului maselor. În paragraful precedent am văzut că determinarea coordonatelor centrului maselor, care în prezenţa forţei gravitaţiei coincide cu centrul de greutate, se reduce la calculul limitei cîtorva sume, adică propriu-zis la calculul unor integrale definite. Totuşi, în cazuri mai simple, centrul maselor poate fi găsit pe o cale elementară pentru care este bine să se folosească următoarele metode.

Folosirea planelor de simetrie. Să presupunem corpul cercetat că are un plan de simetrie, de exemplu planul Oxy, adică la fiecare element de masă situat deasupra planului Oxy corespunde un element avînd aceeași masă situată la aceeași distanță, dedesubtul planului Oxy. Atunci avem: $\sum_n m_n z_n = 0$ și deci $\zeta = 0$. Dacă prin urmare, corpul material are un plan de simetrie, atunci centrul maselor este situat în acest plan. Dacă acest corp material are două plane de simetrie, atunci centrul maselor este situat pe dreapta de intersecție a acestor plane; dacă corpul material are trei plane de simetrie, atunci centrul maselor este situat în punctul lor comun, și în acest fel, îl găsim fără nici un fel de calcul. De exemplu, centrul maselor unui elipsoid omogen cu trei axe, este situat în centrul lui geometric. În cazul unei figuri plane, în loc de plane de simetrie vom avea drept (axe) de simetrie; de exemplu, centrul maselor unei elipse omogene este situat în punctul de intersecție al axelor ei, adică în centrul geometric.

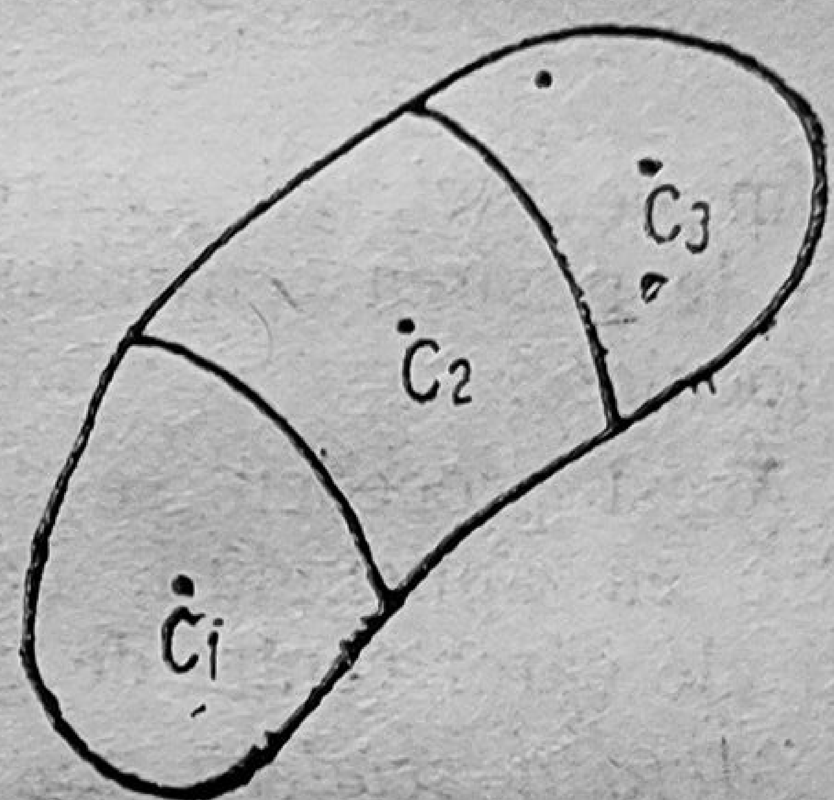


Fig. 55

Metoda adunării sau metoda punctelor echivalente. Să introducem noțiunea de punct echivalent. Vom numi punct echivalent, puncul material ce coincide cu centrul de greutate al corpului material și a cărui masă este egală cu masa acestui corp. Folosind formulele (6.8), rezultă că: $\sum m_n x_n = M\xi$, $\sum M_n y_n = M\eta$, $\sum m_n z_n = M\zeta$. Să examinăm un corp oarecare care se poate împărți de exemplu în trei părți, ale căror centre de greutate $C_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $C_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, $C_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$ și ale căror mase M_1, M_2, M_3 ne sînt cunoscute (fig. 55). Aplicînd corpului formulele (6.8), avem:

$$\xi = \frac{\sum m_n x_n}{M}.$$

Desfăcînd suma de la numărător în trei părți care se referă la partea *I*, *II* și *III*, a corpului și înlocuind aceste trei părți, în

baza observaţiilor precedente, respectiv cu valorile lor $M_1\xi_1$, $M_2\xi_2$ şi $M_3\xi_3$ vom avea:

$$\xi=\frac{M_1\xi_1+M_2\xi_2+M_3\xi_3}{M_1+M_2+M_3},$$

şi în mod analog

$$\left.\begin{aligned}\eta&=\frac{M_1\eta_1+M_2\eta_2+M_3\eta_3}{M_1+M_2+M_3},\\ \zeta&=\frac{M_1\zeta_1+M_2\zeta_2+M_3\zeta_3}{M_1+M_2+M_3},\end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Vedem de aici, că găsirea centrului maselor al unui corp s-a redus la găsirea centrului maselor a trei puncte echivalente care îl înlocuiesc.

Acest procedeu se numeşte de asemenea *metoda adunării* pentru că aplicîndu-l, ne imaginăm întregul corp format din părţi ale căror centre de greutate ne sînt cunoscute.

Metoda scăderii sau metoda maselor negative. Fie dat un corp, în care există, de exemplu, trei goluri (fig. 56). Să ne imaginăm că dacă aceste trei goluri ar fi şi ele umplute cu masă, atunci greutatea corpului ar fi egală cu P' şi centrul său de greutate s-ar găsi în punctul C'. Fie $\bar{P}$ greutatea reală a corpului cu goluri şi C centrul lui de greutate. Atunci P' este rezultanta forţelor paralele $\bar{P}$, P_1, P_2, P_3 aplicate respectiv în punctele C, C_1, C_2, C_3 şi punctul C' este centrul acestor forţe paralele. Prin urmare, forţa $\bar{P}$ este diferenţa dintre forţa $\bar{P}'$ şi forţele P_1, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$. Putem înlocui scăderea prin adunare, considerînd în locul forţelor P_1, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ forţele opuse $-\bar{P}_1$, $-\bar{P}_2$, $-\bar{P}_3$. Astfel, problema se reduce la găsirea centrului forţelor paralele $\bar{P}'$, $-\bar{P}_1$, $-\bar{P}_2$, $-\bar{P}_3$. Notăm masa întregului corp (presupunînd că golurile sînt pline cu masă) cu M', coordonatele punctului C' cu ξ', η', ζ', masa

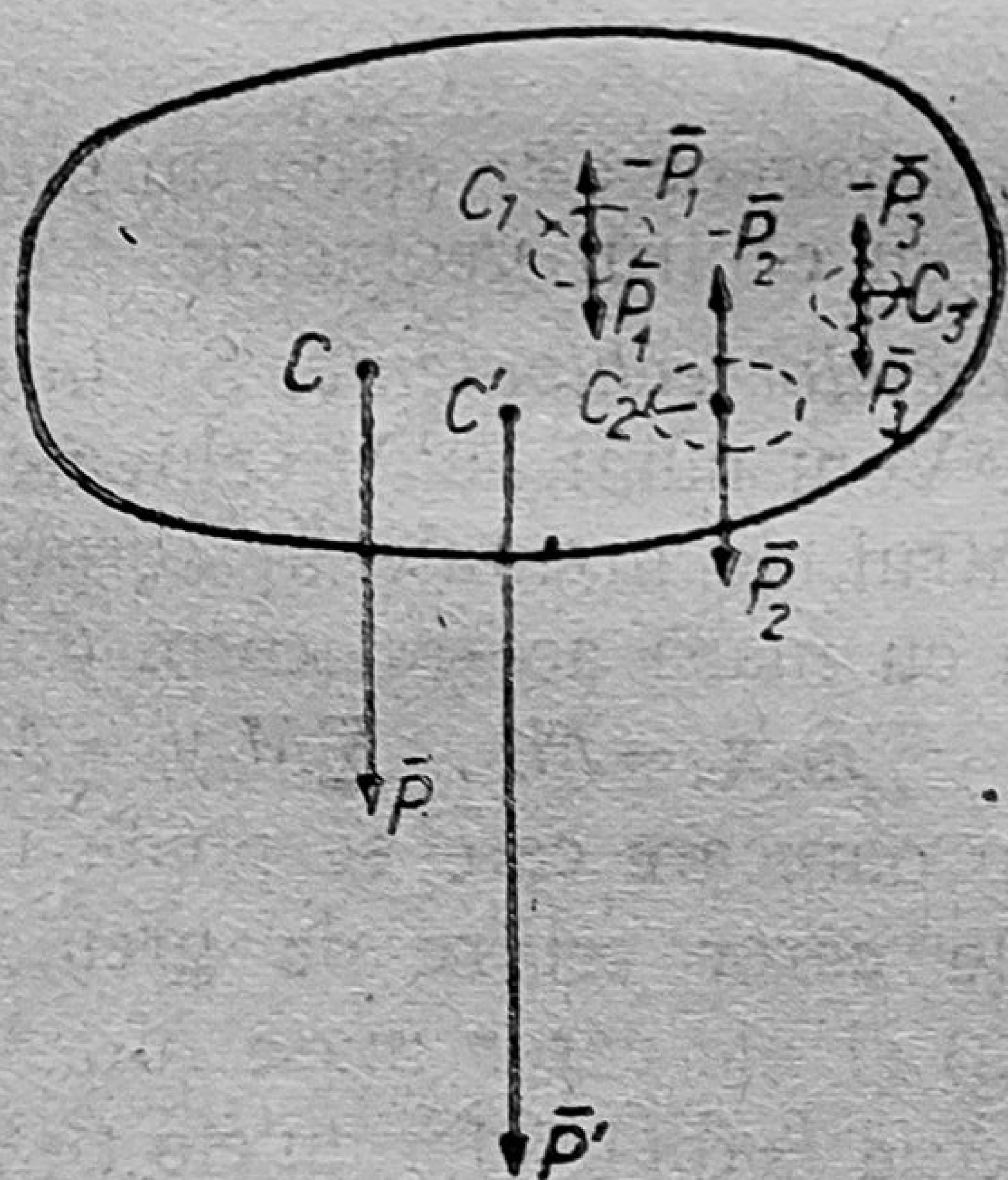


Fig. 56

substanței care umple primul gol cu M_1, coordonatele punctului C_1 cu ξ_1, η_1 și ζ_1 etc.; este evident că vom avea:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{M'\xi'-M_1\xi_1-M_2\xi_2-M_3\xi_3}{M'-M_1-M_2-M_3},\\ \eta&=\frac{M'\eta'-M_1\eta_1-M_2\eta_2-M_3\eta_3}{M'-M_1-M_2-M_3},\\ \zeta&=\frac{M'\zeta'-M_1\zeta_1-M_2\zeta_2-M_3\zeta_3}{M'-M_1-M_2-M_3}.\end{aligned}\right\} \quad (6.16)$$

Din formulele (6.16) se vede că problema se reduce la aflarea poziției centrelor maselor pentru masa pozitivă M' și pentru masele negative M_1, M_2, M_3.

§ 30. Cele mai simple cazuri de determinare a centrului de greutate. Să examinăm cazurile cele mai simple, cînd centrul de greutate se poate determina pe cale elementară.

1. *Centrul de greutate al unui segment omogen de dreaptă.* Fie dat un segment omogen de dreaptă AB, și fie punctul C mijlocul segmentului. Deoarece punctul C este centrul de simetrie, centrul de greutate se găsește în punctul C.

2. *Centrul de greutate al unei linii frînte și omogene.* Fie dată linia frîntă omogenă $ABCDEF$ tangentă unui cerc și fie O — centrul cercului înscris în ea. Presupunem că linia frîntă $ABCDEF$ cuprinde cel mult jumătate din circumferință (fig. 57). Ducînd axa de simetrie Ox concludem pe baza raționamentului făcut la § 29, că centrul de greutate trebuie să se găsească pe această axă. Să determinăm coordonata lui ξ. Înlocuim fiecare latură (AB, ...) a liniei frînte cu punctul echivalent corespunzător (G, ...) și notăm prin l lungimea laturii liniei frînte, prin R — raza cercului înscris, prin n — numărul laturilor liniei frînte. Aplicînd metoda punctelor echivalente și servindu-ne de

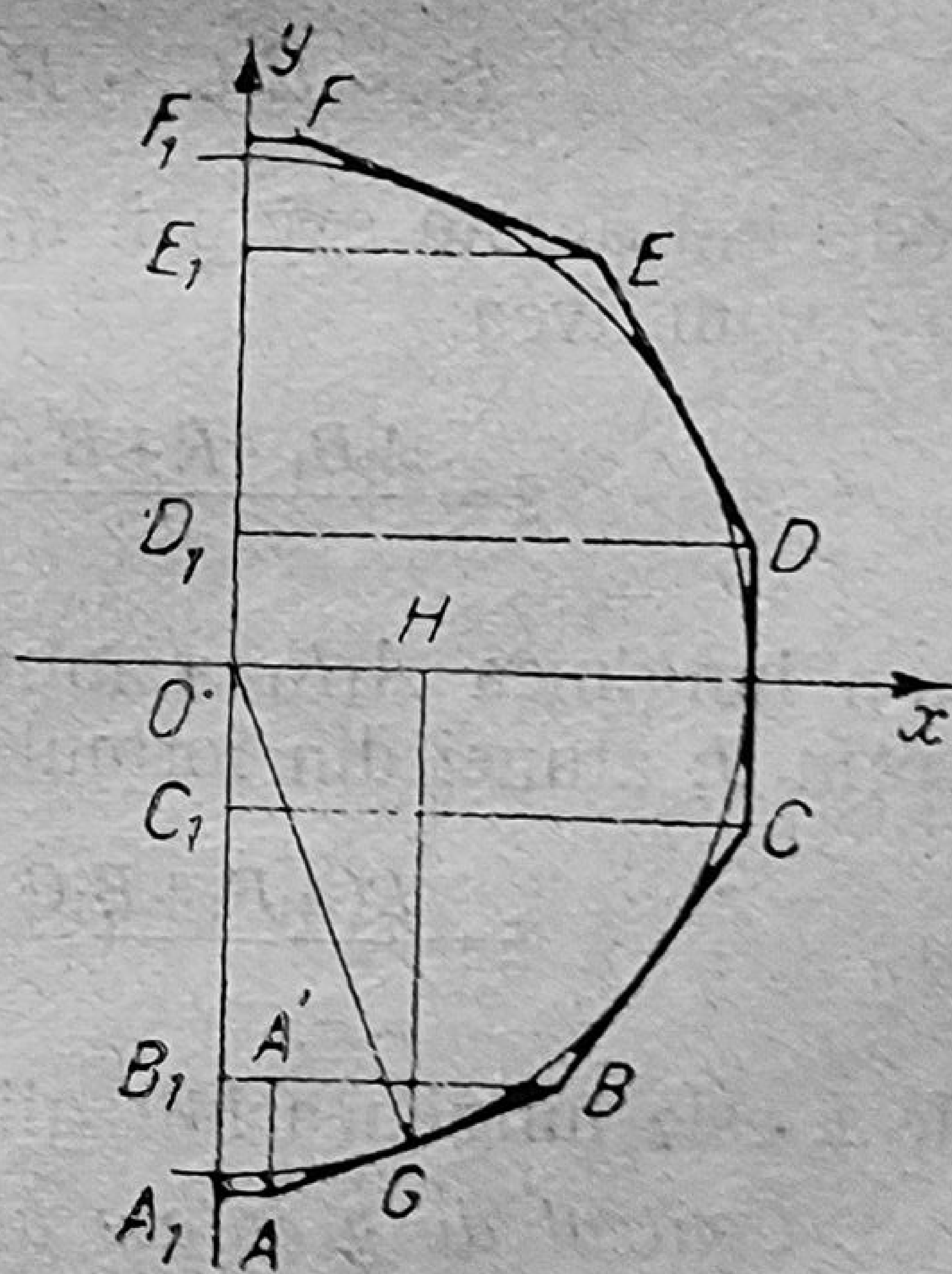


Fig. 57

formulele (6.15), după ce le vom simplifica cu densitatea constantă a liniei frînte, vom obține:

$$\xi = \frac{AB \cdot \xi_1 + BC \cdot \xi_2 + \cdots}{AB + BC + \cdots} = \frac{l\xi_1 + l\xi_2 + \cdots}{nl}$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sînt abscisele centrelor de greutate ale laturilor AB, $BC, \ldots$ Să examinăm, de exemplu, latura AB. Coborînd din punctul echivalent G perpendiculara GH pe axa Ox, rezultă $OH = \xi_1$. Proiecția laturii AB pe axa Oy, perpendiculară pe axa Ox, este segmentul A_1B_1; construim segmentul AA' perpendicular pe BB_1; din asemănarea triunghiurilor $AA'B$ și OGH rezultă:

$$\frac{OH}{AA'} = \frac{OG}{AB},$$

și cum $OG = R$

$$\frac{\xi_1}{A_1B_1} = \frac{R}{l}, \quad l\xi_1 = A_1B_1 \cdot R.$$

În mod analog vom obține

$$l\xi_2 = B_1C_1 \cdot R, \quad l\xi_3 = C_1D_1 \cdot R \ldots$$

Introducînd aceste expresii în formula precedentă pentru coordonata ξ vom avea:

$$\xi = \frac{A_1B_1 \cdot R + B_1C_1 \cdot R + C_1D_1 \cdot R + \cdots}{nl}.$$

Notăm lungimea A_1F_1 a întregii proiecții a liniei frînte, pe axa Oy prin d; atunci din formula precedentă vom găsi:

$$\xi = \frac{R(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \cdots)}{nl} = R\frac{d}{L} \qquad (6.17)$$

unde L este lungimea întregii linii frînte.

3. *Centrul de greutate al unui arc de cerc omogen.* Fie dat un arc de cerc ABC cu unghiul la centru mai mic de 180° (fig. 58). Ducem axa de simetrie Ox și notăm cu α jumătatea unghiului la centru AOC, care corespunde arcului ABC. Centrul de greutate al arcului ABC se va găsi pe axa lui de simetrie Ox, și, pentru a-l găsi, trebuie să ne folosim de formula (6.17), considerînd arcul ABC ca limită a unei linii frînte regulate la care

numărul laturilor creşte nelimitat, iar lungimea fiecărei laturi tinde către zero. La limită vom avea:

$$d=AC=2DC=2R\sin\alpha,\quad L=\overset{\frown}{ABC}=R\cdot 2\alpha,$$

şi din formula (6.17) obţinem:

$$\xi=R\frac{2R\sin\alpha}{R\cdot 2\alpha}=R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{6.18}$$

Aplicînd această formulă la semicircumferinţă, cînd $\alpha=\frac{\pi}{2}$, vom avea:

$$\xi=R\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}R\approx 0{,}63662\,R.$$

4. *Centrul de greutate al unui paralelogram omogen.* Să examinăm paralelogramul $ABCD$ (fig. 59). Să-l împărţim, prin drepte paralele la baza AB, în fîşii infinit de înguste. Deoarece centrul de greutate al fiecărei fîşii este situat în mijlocul ei, locul geometric al punctelor echivalente va fi dreapta EF. Astfel am redus problema la găsirea centrului de greutate al unei drepte omogene EF. Centrul ei de greutate se află în punctul O, punctul

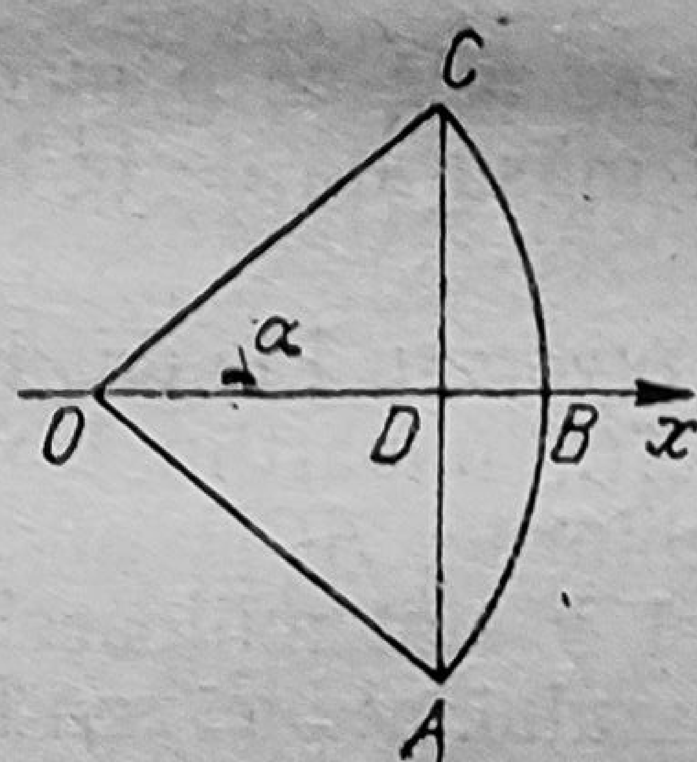


Fig. 58

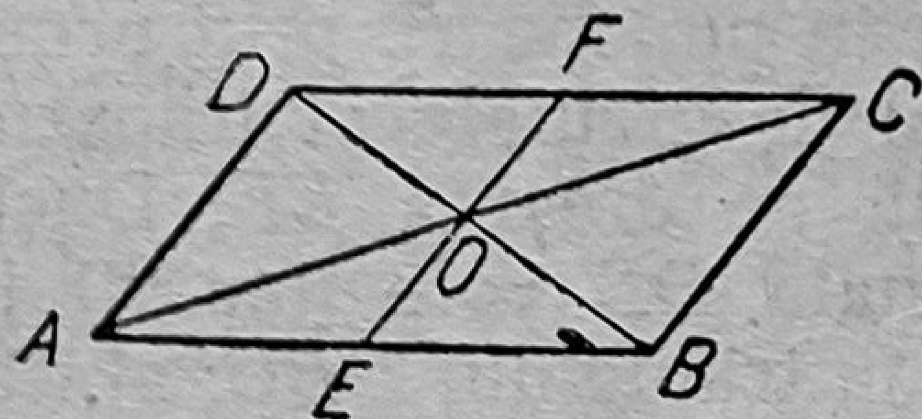


Fig. 59

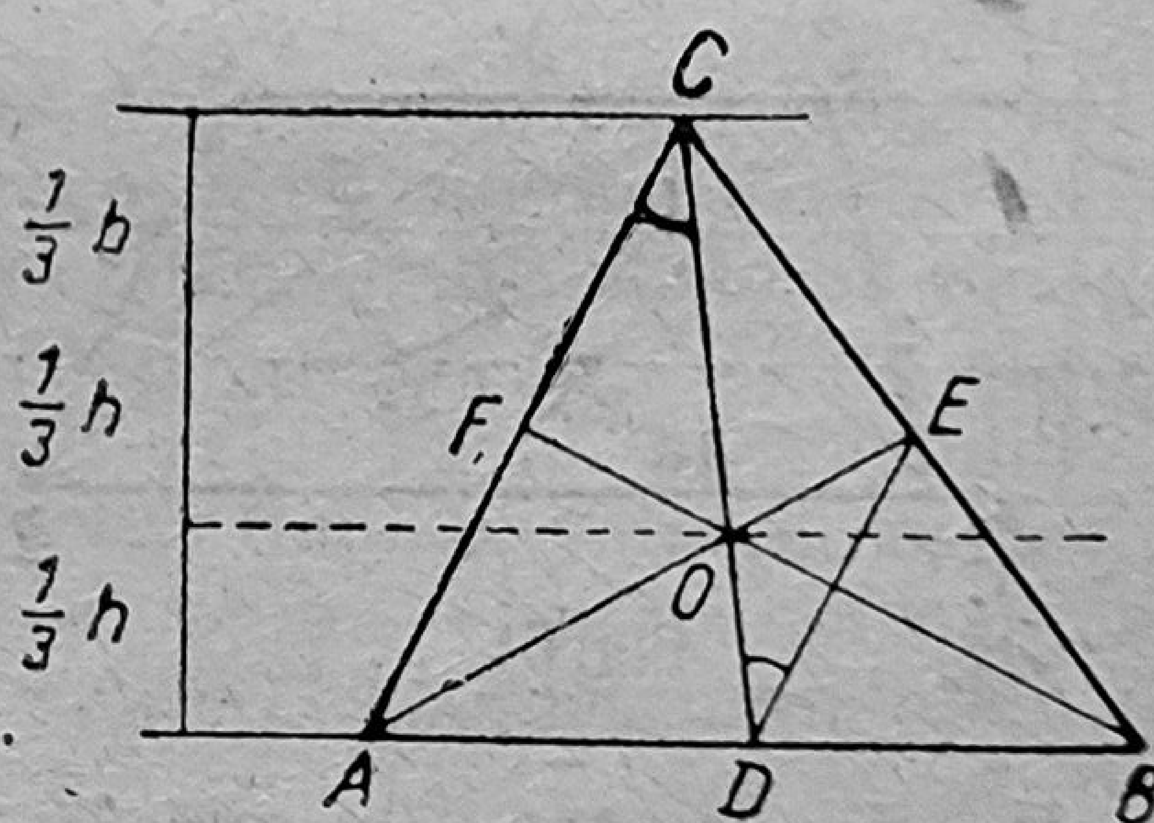


Fig. 60

de intersecţie al diagonalelor AC şi DB. Prin urmare, centrul de greutate al unui paralelogram se află în punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului.

5. *Centrul de greutate al unui triunghi omogen.* Să examinăm triunghiul ABC (fig. 60). Împărţindu-l prin drepte paralele

cu baza AB, în fîșii infinit de înguste, și înlocuind fiecare fîșie printr-un punct echivalent, vom găsi că locul geometric al punctelor echivalente este dreapta CD, mediana triunghiului. Centrul de greutate se va găsi pe mediana CD și astfel, problema s-a redus la găsirea centrului de greutate al unei drepte neomogene, a cărei densitate crește pe măsură ce ne apropiem de punctul D. Ducînd o altă mediană AE vom găsi de asemenea că ea este locul punctelor echivalente pentru triunghi. Deci, centrul de greutate al triunghiului ABC se află în punctul O de intersecție al medianelor CD și AE. De aici, rezultă că toate trei medianele triunghiului se întretaie într-un punct. Să unim printr-o dreaptă punctele D și E, adică mijlocul laturilor BA și BC ale triunghiului ABC; dreapta DE va fi paralelă la latura AC și egală cu jumătatea ei Deoarece $\triangle AOC \sim \triangle DOE$, vom găsi:

$$\frac{CO}{DO}=\frac{AC}{DE}=2.$$

Astfel, centrul de greutate al triunghiului se află pe o mediană a triunghiului la o treime din lungimea ei măsurată de la latura corespunzătoare medianei.

6. *Centrul de greutate al unui trapez omogen.* Fie dat trapezul $ABCD$ (fig. 61). Ducînd diagonala AC, împărțim trapezul în triunghiurile ACD și ACB. Dacă M și N sînt mijloacele bazelor trapezului, atunci centrul de greutate al primului triunghi se află în punctul E, al celui de-al doilea în punctul F, prin urmare centrul de greutate al trapezului se află pe dreapta EF. Ducînd diagonala DB vom împărți trapezul în triunghiul DBC. al cărui centru de greutate se află în punctul G și în triunghiul DBA al cărui centru de greutate se află în punctul H; deci centrul de greutate al trapezului se află de asemenea pe dreapta GH. Astfel, centrul de greutate al trapezului este situat în punctul O de intersecție al dreptelor EF și GH.

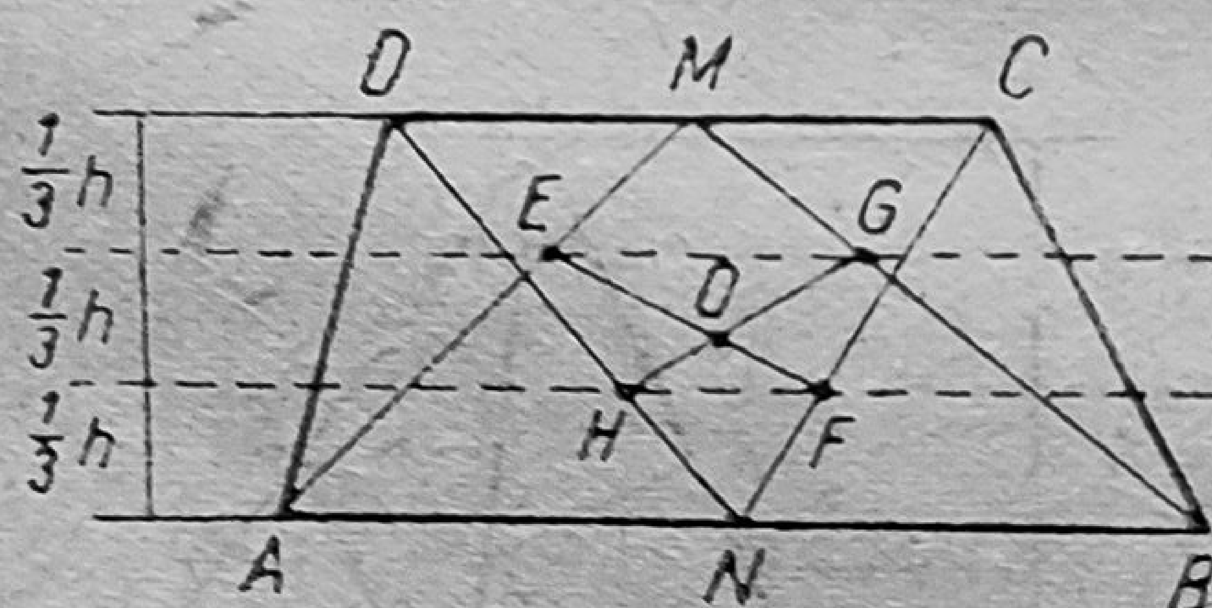


Fig. 61

7. *Centrul de greutate al unui sector circular omogen.* Fie sectorul circular $OABCO$, de rază R și unghi la centru 2α

(fig. 62). Ducînd raze foarte apropiate putem împărți segmentul considerat în sectoare infinit de înguste, care se pot compara cu o infinitate de triunghiuri isoscele. Deoarece centrul de greutate al fiecărui triunghi se află pe mediana lui la o treime din lungimea ei considerată de la bază, locul geometric al punctelor echivalente va fi arcul DEF, a cărui rază $OD = \frac{2}{3}R$. Astfel, problema s-a redus la găsirea centrului de greutate al unui arc de cerc omogen DEF cu raza egală cu $\frac{2}{3}R$. Centrul lui de greutate, care este totodată și centrul de greutate al sectorului, se află pe axa Ox și are conform formulei (6.18) abscisa:

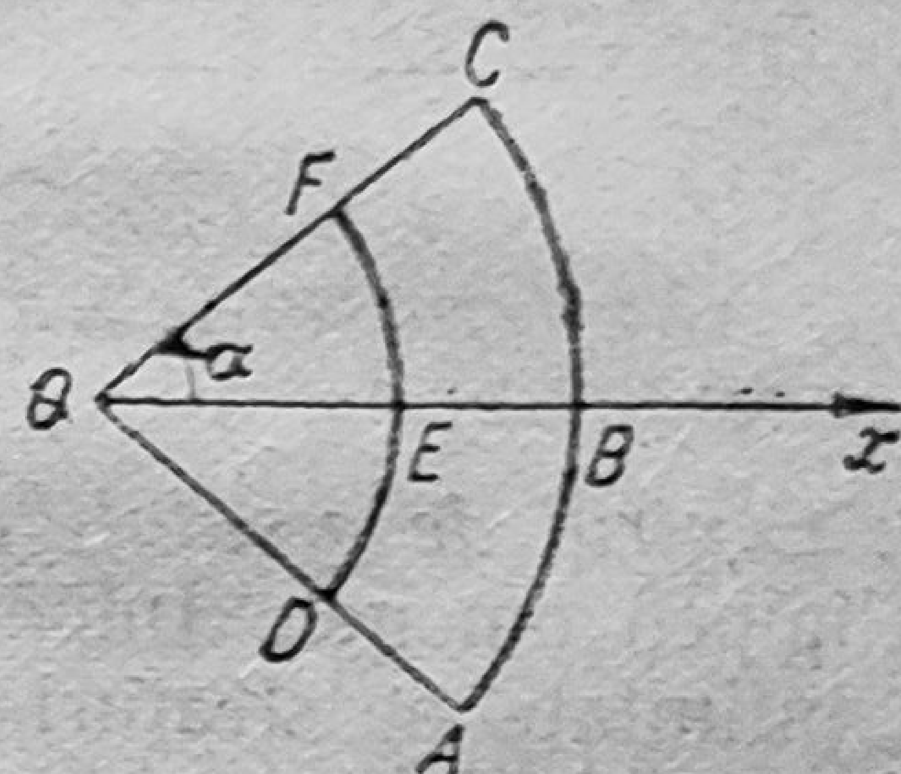


Fig. 62

$$\xi = OD\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{6.19}$$

Să folosim această formulă pentru găsirea centrului de greutate al semicercului cu raza egală cu R; deoarece în acest caz $\alpha = \frac{\pi}{2}$, vom obține:

$$\xi = \frac{2}{3}R\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}R \approx 0{,}42441\,R.$$

8. *Centrul de greutate al unui segment de cerc omogen.* Fie segmentul de cerc $ABCDA$ de rază R și unghi la centru 2α (fig. 58). Acest segment este diferența dintre sectorul circular $OABCO$ cu aria S' și triunghiul OAC cu aria S_1. Notînd abscisa centrului de greutate a sectorului prin ξ', și al triunghiului prin ξ_1, pe baza primei formule (6.16) după simplificarea fracției din partea stîngă cu densitatea vom obține următoarea expresie pentru abscisa ξ a centrului de greutate al segmentului:

$$\xi = \frac{S'\xi' - S_1\xi_1}{S' - S_1}.$$

Dar noi avem:

$$S' = R^2\alpha, \qquad \xi' = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

$$S_1 = \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha = R^2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \xi_1 = \frac{2}{3}R\cos\alpha.$$

Prin urmare:

$$\xi=\frac{R^2\alpha\cdot\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}-R^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{2}{3}R\cos\alpha}{R^2\alpha-R^2\sin\alpha\cos\alpha},$$

sau

$$\xi=\frac{2}{3}R\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}. \tag{6.20}$$

9. *Centrul de greutate al unui paralelipiped omogen.* Fie un paralelipiped omogen. Împărţindu-l prin plane paralele cu baza, într-o infinitate de straturi subţiri, şi înlocuind fiecare strat cu un punct echivalent care se află în centrul său de greutate, vom găsi că locul geometric al punctelor echivalente este dreapta ce uneşte centrele de greutate a ambelor baze. Astfel, problema se reduce la aflarea centrului de greutate a acestei drepte omogene, deci centrul de greutate al paralelipipedului se află în mijlocul ei care coincide cu punctul de intersecţie al diagonalelor paralelipipedului.

10. *Centrul de greutate al unui tetraedru omogen.* Fie tetraedrul $SABC$ (fig. 63). Ducînd plane paralele la baza ABC, tetraedrul se împarte în straturi triunghiulare infinit de subţiri. Să înlocuim fiecare strat cu punctul echivalent aflat în centrul său de greutate. Locul geometric al acestor puncte echivalente este dreapta SF care uneşte vîrful S al tetraedrului cu centrul de greutate F al bazei ABC. Astfel, problema se reduce, la aflarea centrului de greutate al dreptei neomogene SF, a cărei densitate creşte cu cît ne apropiem de punctul F. Unind alt vîrf A al tetraedrului cu centrul de greutate E al bazei BCS, vom obţine alt loc geometric AE al punctelor echivalente. Deci, centrul de greutate al tetraedrului se află în punctul de intersecţie O al acestor drepte SF şi AE. Să observăm că dreptele SF şi AE sînt în adevăr concurente, deoarece ele se află în planul triunghiului ASD. Să examinăm cele două triunghiuri ASD şi FED; ele au cîte un unghi egal cuprins între laturi proporţionale, deoarece avem:

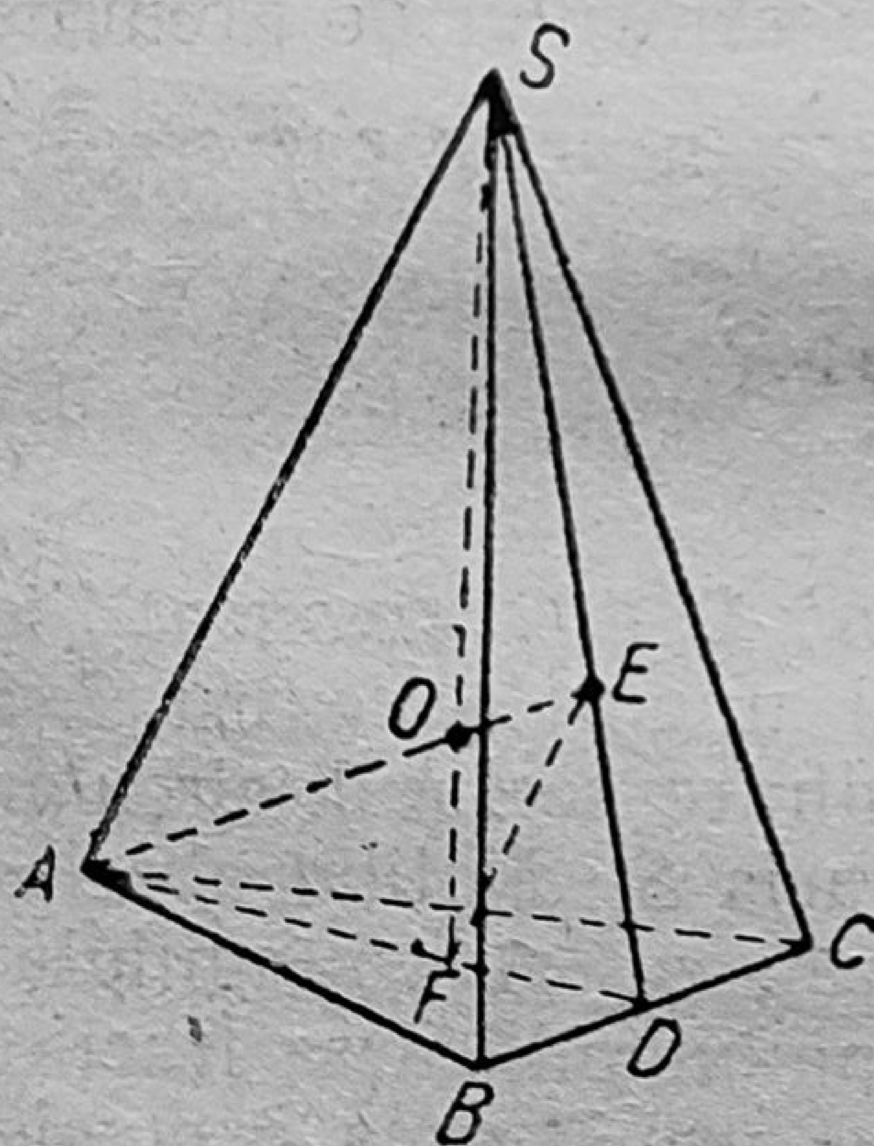


Fig. 63

$$\frac{AD}{FD}=\frac{SD}{ED}=3.$$

De aceea, aceste triunghiuri sînt asemenea și trebuie să avem $FE \parallel AS$. Din paralelismul laturilor FE și AS urmează că $\triangle ASO \sim \triangle FEO$, de unde:

$$\frac{SO}{OF}=\frac{AS}{EF}=3.$$

Prin urmare, centrul de greutate al unui tetraedru omogen se află pe dreapta care unește vîrful tetraedrului cu centrul de greutate al bazei sale la distanța de un sfert din lungimea ei măsurată de la bază.

Acest adevăr este valabil pentru orice piramidă omogenă și pentru conul omogen.

§ 31. Teoremele lui Guldin. Teoremele următoare care aparțin lui Guldin (1577—1643), și lui Pappus (sec. III î.e.n.), dau posibilitatea să se determine aria unei suprafețe de rotație și volumul unui corp de rotație dacă se cunoaște poziția centrului de greutate al arcului plan și a centrului de greutate al suprafeței plane, care generează prin rotirea lor în jurul unei axe, aflate în planul lor, această suprafață și acest corp.

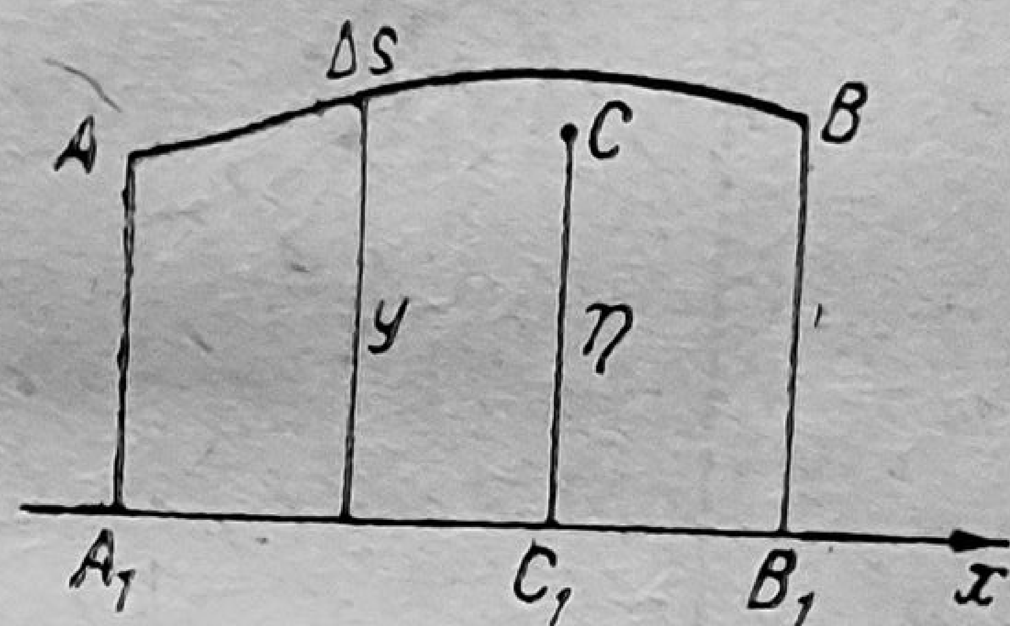


Fig. 64

Prima teoremă a lui Guldin. Suprafața laterală a unui corp de rotație descris de un arc de curbă plan care se rotește în jurul unei axe aflate în planul curbei și care nu intersectează arcul, este egală cu lungimea arcului înmulțită cu lungimea circumferinței descrisă de centrul de greutate al acelui arc.

Fie AB un arc de curbă plan și fie x axa de rotație pe care o luăm drept axă a absciselor (fig. 64). Ca un caz extrem, unul din punctele A și B sau amîndouă punctele pot fi situate pe axa x. Să luăm axa y perpendiculară pe axa de rotație. Coborîm din punctele A și B perpendicularele AA_1 și BB_1 pe axa de rotație; fie C centrul de greutate al arcului AB și $\eta = CC_1$ ordonata lui. Notăm prin Δs elementul arcului AB, iar prin l — lungimea întregului arc. Neglijînd infiniți mici de ordin superior, se poate presupune că în timpul rotirii arcului în jurul axei x, elementul Δs al arcului AB va descrie suprafața laterală a unui triunghi de con a cărui generatoare este Δs și rază medie este y. Deoarece suprafața laterală a trunchiului de con este egală cu generatoarea înmulțită cu lungimea circumferinței descrisă de raza medie,

suprafaţa laterală a conului considerat va fi $2\pi y\Delta s$. Însumînd toate elementele suprafeţei, vom obţine la limită suprafaţa laterală σ:

$$\sigma=\lim\sum 2\pi y\,\Delta s=2\pi\lim\sum y\Delta s=2\pi\int yds.$$

Dar din formula (6.10) se vede că:

$$\lim\sum y\,\Delta s=\int yds=\eta l.$$

Prin urmare, vom obţine:

$$\sigma=2\pi\eta l, \tag{6.21}$$

ceea ce demonstrează teorema. De aici urmează că, dacă vom roti arcul AB în planul său în jurul centrului său de greutate C şi apoi vom roti arcul AB în jurul axei x, în diferite poziţii,

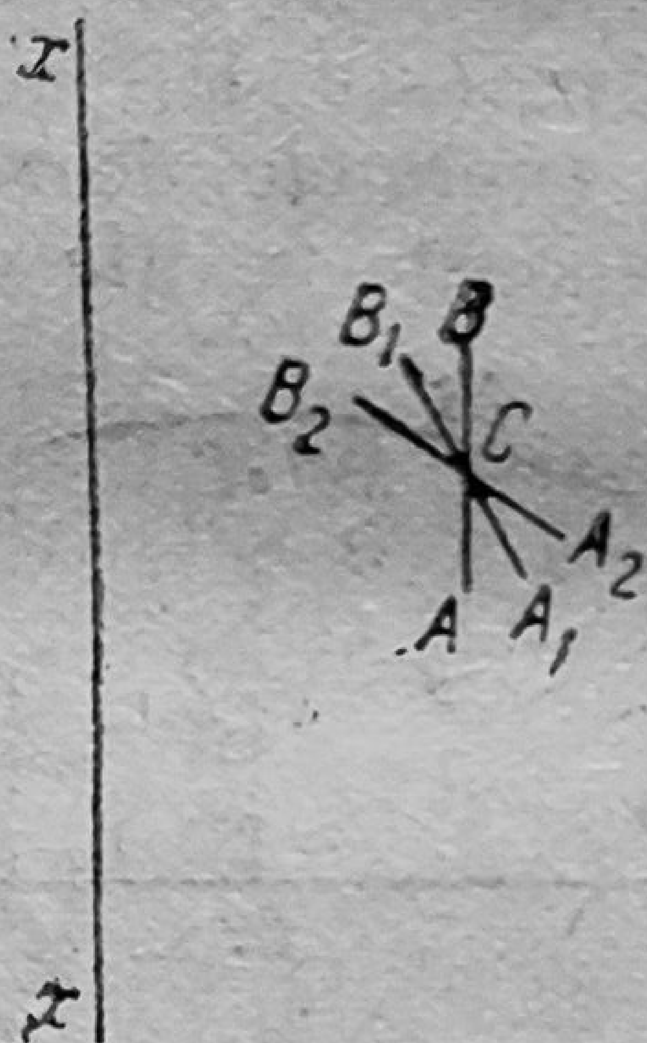


Fig. 65

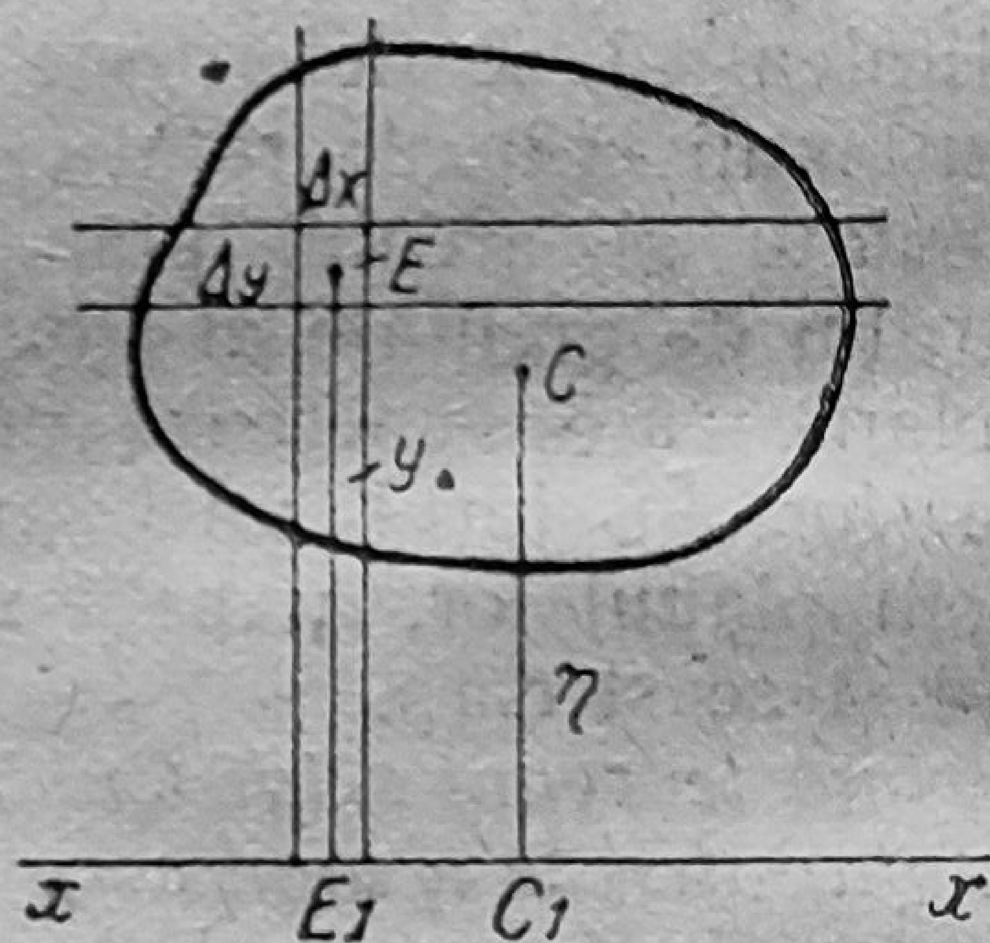


Fig. 66

atunci suprafeţele laterale ale tuturor corpurilor obţinute prin rotire vor fi egale între ele pentru că prin aceasta valorile η şi l nu se vor modifica. De exemplu, fie segmentul de dreaptă AB care se roteşte în jurul axei x aflată în acelaşi plan cu segmentul AB; fie C mijlocul acestui segment (fig. 65). Vom roti segmentul AB în jurul punctului C, lăsîndu-l în acelaşi plan şi dîndu-i poziţiile A_1B_1, A_2B_2, ...; atunci suprafeţele laterale formate prin rotirea în jurul axei x a segmentelor AB, A_1B_1, A_2B_2,..., vor fi toate egale între ele. Acest rezultat se poate verifica uşor prin geometria elementară.

A doua teoremă a lui Guldin. Volumul unui corp de rotaţie, obţinut prin rotirea unei figuri plane în jurul unei axe aflată în planul ei care nu intersectează figura, este egal cu suprafaţa acelei figuri, înmulţită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al acestei figuri.

Alegem axa de rotaţie drept axă a absciselor. Într-un caz extrem, axa de rotaţie poate fi una din laturile figurii plane. Fie C centrul de greutate al figurii plane şi η ordonata lui (fig. 66). Împărţim întreaga figură plană în elemente de suprafaţă infinit mici prin drepte paralele la axele de coordonate. Fie E centrul unuia dintre dreptunghiurile obţinute prin această diviziune şi $y=EE_1$ — ordonata lui. Volumul inelului care se formează prin rotirea acestui dreptunghi se poate obţine ca diferenţă a volumelor a doi cilindri cu aceeaşi înălţime Δx şi cu razele $y+\frac{\Delta y}{2}$ şi $y-\frac{\Delta y}{2}$; de aceea, volumul inelului va fi:

$$\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)^2\Delta x-\pi\left(y-\frac{\Delta y}{2}\right)^2\Delta x=2\pi y\,\Delta x\,\Delta y=2\pi\,y\Delta\sigma,$$

unde $\Delta\sigma$ este suprafaţa dreptunghiului elementar cercetat. Însumînd toate aceste volume, la limită vom obţine volumul V al corpului de rotaţie considerat:

$$V=\lim\sum 2\pi y\Delta\sigma=2\pi\lim\sum y\Delta\sigma=2\pi\iint y d\sigma$$

Dar din formula (6.12) avem:

$$\lim\sum y\Delta\sigma=\iint y d\sigma=\eta\sigma,$$

unde σ reprezintă suprafaţa figurii. Astfel, vom obţine:

$$V=2\pi\eta\sigma, \tag{6.22}$$

ceea ce demonstrează teorema. De aici urmează că dacă vom roti figura plană în planul ei în jurul centrului ei de greutate C şi apoi vom roti figura plană în jurul axei x în diferite poziţii, atunci volumele tuturor corpurilor obţinute prin rotire vor fi egale între ele, pentru că prin aceasta valorile η şi σ nu se vor schimba. De exemplu, avem elipsa cu semiaxele a şi b în două poziţii: în prima poziţie axa mică a elipsei este paralelă la axa x, în a doua poziţie axa mare a elipsei este paralelă la axa x. Centrul elipsei se găseşte în ambele cazuri la distanţă egală cu d de axa de rotaţie (fig. 67). Vom roti aceste elipse în jurul axei x, atunci, pe baza celor expuse, volumele celor două inele elipsoidale obţinute vor fi egale între ele, şi anume vor fi egale cu $2\pi^2 abd$.

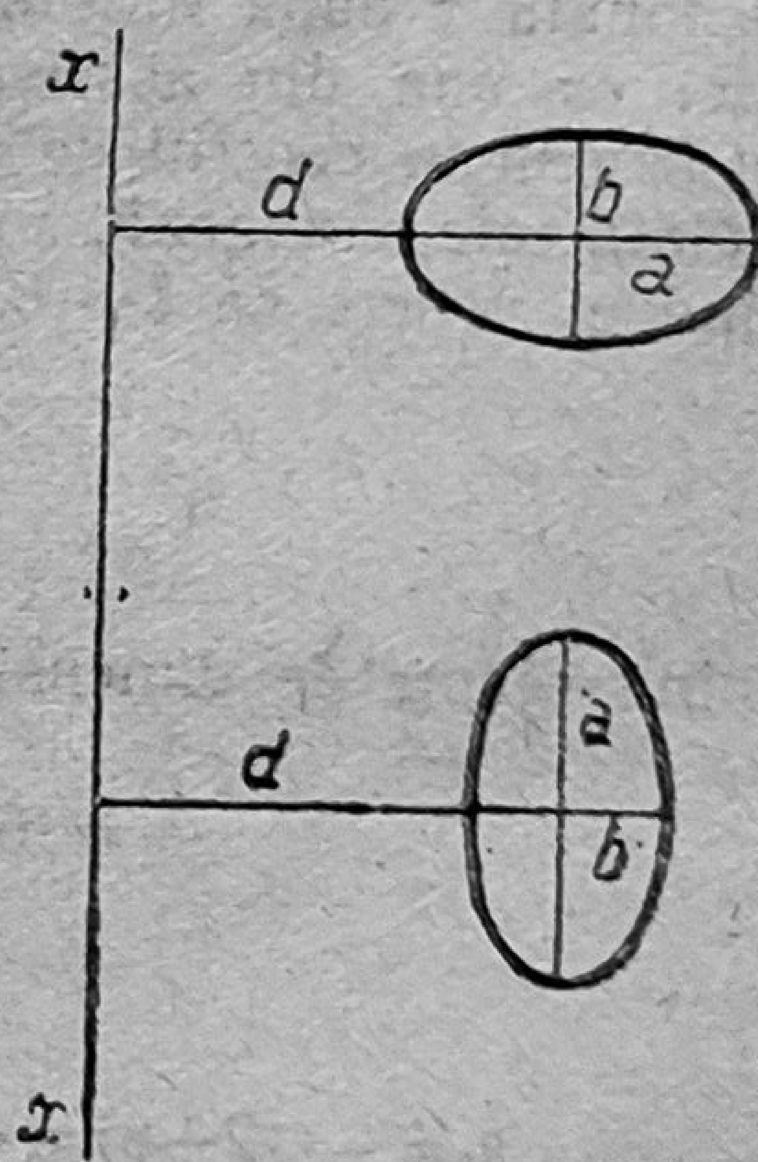


Fig. 67

Observaţie. Axa de rotaţie nu trebuie să întretaie arcele sau suprafeţele, deoarece porţiunile care vor fi situate sub axa de rotaţie (v. fig. 66) vor da, din cauza ordonatelor negative, elemente negative în sumele calculate şi vom obţine ca rezultat diferenţa suprafeţelor sau volumelor. Pentru a evita aceasta, trebuie să se execute separat calculele pentru părţile aflate deasupra şi dedesubtul axei de rotaţie.

§ 32. **Exemple. 18.** Să examinăm figura plană reprezentată în fig. 68 compusă din două dreptunghiuri şi un semicerc pe care le vom nota respectiv prin cifrele *1, 2* şi *3*. Deoarece figura considerată are o axă de simetrie, centrul ei de greutate se va afla pe acea axă; luînd axa de simetrie ca axă a absciselor, vom reduce problema găsirii centrului de greutate al

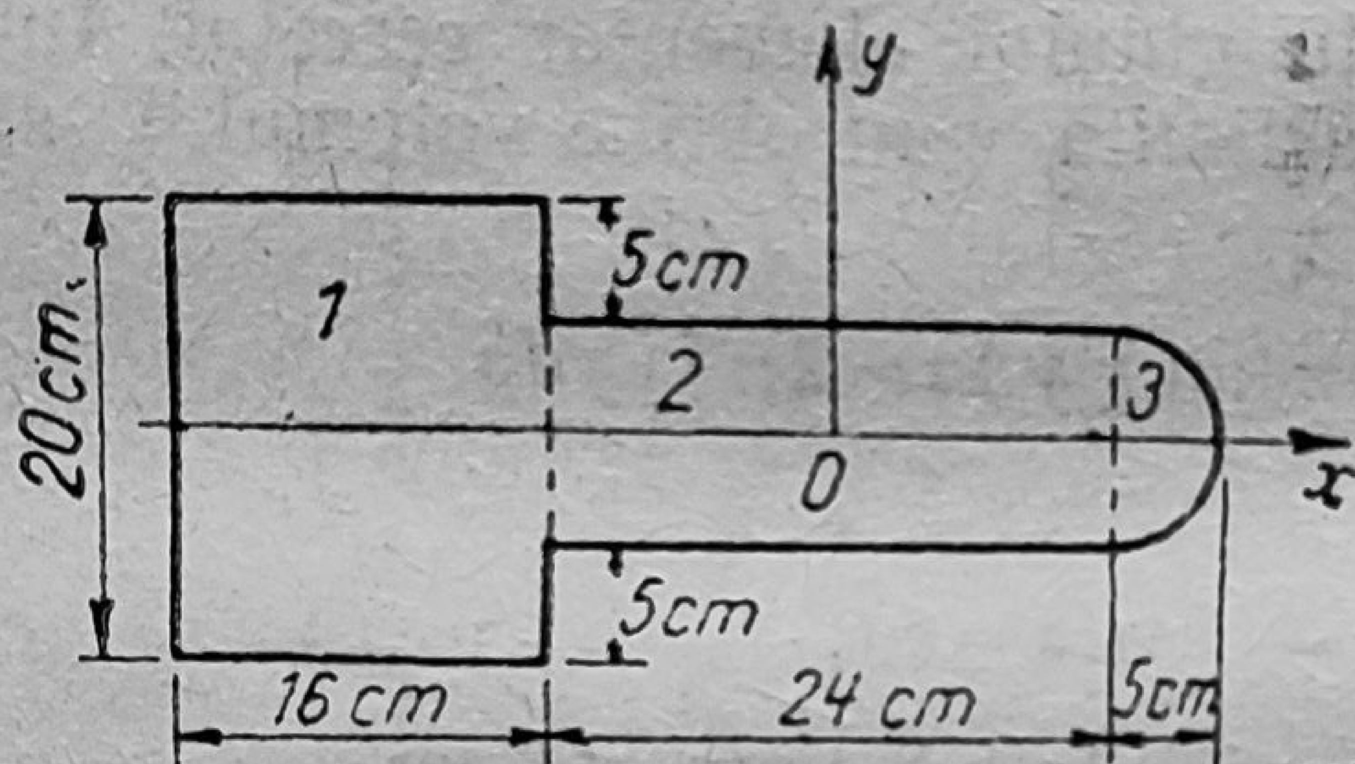


Fig. 68

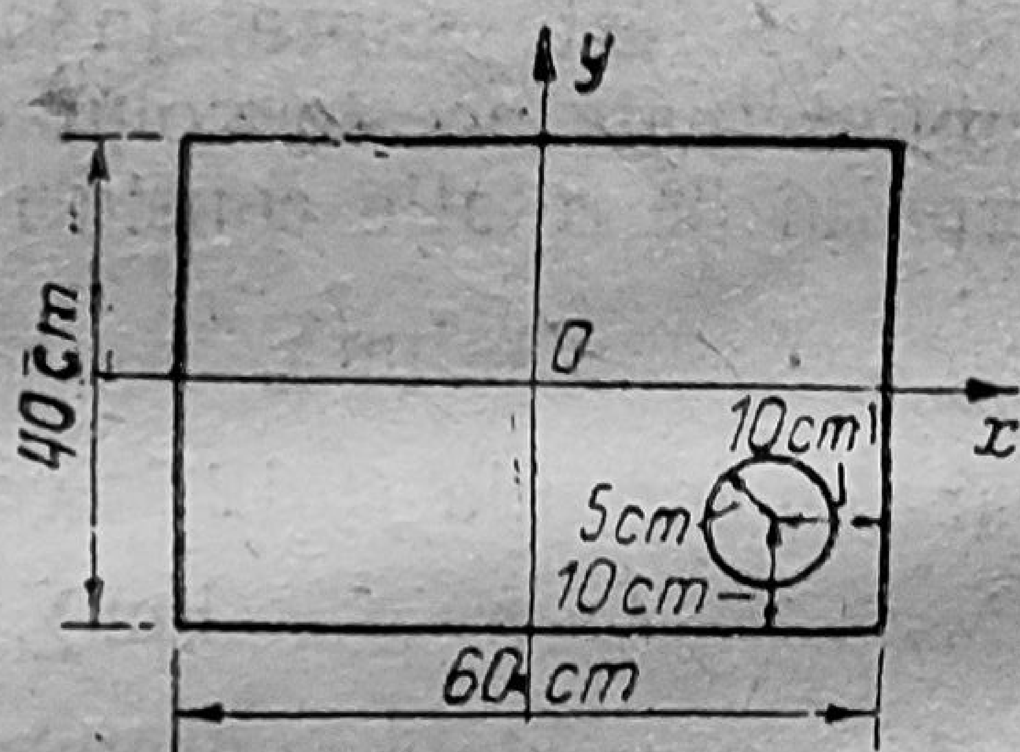


Fig. 69

figurii la găsirea numai a abscisei ξ. Este uşor de văzut că putem înlocui părţile *1, 2* şi *3* ale figurii studiate, prin puncte echivalente şi putem calcula coordonata ξ după formula (6.15). Să alegem originea axelor de coordonate astfel ca una din abscisele punctelor echivalente să fie zero, de exemplu, s-o alegem în centrul de greutate al dreptunghiului *2*. Deoarece figura plană studiată este omogenă, putem simplifica în formula (6.15) cu densitatea şi, avînd în vedere că $\xi_2=0$, vom obţine:

$$\xi=\frac{\sigma_1\xi_1+\sigma_3\xi_3}{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}.$$

Ţinînd seama de dimensiunile indicate pe desen, vom avea:

$$\sigma_1=16\cdot 20,\quad \sigma_2=10\cdot 24,\quad \sigma_3=\frac{1}{2}\pi 5^2,$$

$$\xi_1=-(12+8)=-20,\quad \xi_2=0,\quad \xi_3=12+\frac{2}{3}\cdot 5\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=12+\frac{20}{3\pi}.$$

Prin urmare, formula precedentă devine:

$$\xi=\frac{-16\cdot 20\cdot 20+\frac{1}{2}\pi 5^2\left(12+\frac{20}{3\pi}\right)}{16\cdot 20+10\cdot 24+\frac{1}{2}\pi 5^2},$$

sau

$$\xi=\frac{-16\cdot 20\cdot 20\cdot 6+25(36\pi+20)}{16\cdot 20\cdot 6+10\cdot 24\cdot 6+25\cdot\pi\cdot 3}.$$

De aici obținem:

$$\xi=\frac{(9\pi-379)\,20}{(5\pi+224)\,3},$$

sau

$$\xi=-9{,}75\ \text{cm}.$$

19. Să se găsească poziția centrului de greutate al unui dreptunghi omogen din care s-a tăiat o gaură rotundă (fig. 69). Laturile dreptunghiului sînt 60 și 40 cm, raza găurii este egală cu 5 cm și centrul găurii se găsește la cîte 10 cm de laturile dreptunghiului.

Aplicînd la această problemă metoda scăderii, trebuie să determinăm ambele coordonate ξ și η, deoarece, în această problemă nu există axă de simetrie. Luînd originea coordonatelor în centrul de greutate al dreptunghiului (pentru a elimina coordonatele ξ' și η', ale centrului său de greutate) și simplificînd în formulele (6.16) cu densitatea, vom obține:

$$\xi=-\frac{\sigma_1\xi_1}{\sigma'-\sigma_1},\qquad \eta=-\frac{\sigma_1\eta_1}{\sigma'-\sigma_1}.$$

Avem:

$$\sigma'=40\cdot 60,\qquad \sigma_1=\pi\cdot 5^2,$$

$$\xi_1=20,\qquad \eta_1=-10.$$

In acest fel găsim

$$\xi=-\frac{\pi\cdot 5^2\cdot 20}{4\cdot 60-\pi\cdot 5^2},\qquad \eta=+\frac{\pi\cdot 5^2\cdot 10}{40\cdot 60-\pi\cdot 5^2}$$

adică

$$\xi=-\frac{20\pi}{96-\pi},\qquad \eta=\frac{10\pi}{96-\pi}$$

sau:

$$\xi=-0{,}68\ \text{cm},\qquad \eta=+0{,}34\ \text{cm}.$$

20. Să se găsească volumul și suprafața unui inel circular (tor) care rezultă din rotirea cercului de rază a în jurul axei Δ care se află în planul acestui cerc la distanța R de centru (fig. 70).

Pentru calculul volumului vom aplica formula (6.22), și, deoarece avem:

$$\eta=R,$$

$$\sigma=\pi a^2,$$

atunci:

$$V=2\pi^2a^2R.$$

Pentru a calcula suprafaţa vom aplica formula (6.21) la părţile dinăuntru şi dinafară ale inelului; vom avea:

$$\sigma=2\pi(R+\xi_0)\pi a+2\pi(R-\xi_0)\pi a,$$

unde ξ_0 este distanţa centrului de greutate al semicercului pînă la centrul cercului. De aici găsim:

$$\sigma=4\pi^2 aR.$$

21. Să considerăm o dreaptă neomogenă OA, a cărei lungime este l; să luăm axa Ox de-a lungul acestei drepte (fig. 71). Să se afle poziţia centrului de greutate al acestei drepte dacă se ştie că $\rho=\rho_0-kx^\mu$ unde ρ_0, k, μ sînt constante.

După prima din formulele (6.9) rezultă:

$$\xi=\frac{\int_0^l x\rho dx}{\int_0^l \rho dx}=\frac{\rho_0\int_0^l xdx-k\int_0^l x^{\mu+1}dx}{\rho_0\int_0^l dx-k\int_0^l x^\mu dx}.$$

Calculînd aceste integrale definite vom obţine:

$$\xi=\frac{\frac{\rho_0 l^2}{2}-\frac{k}{\mu+2}l^{\mu+2}}{\rho_0 l-\frac{k}{\mu+1}l^{\mu+1}},\quad \text{sau:}\quad \xi=\frac{l}{2}\frac{\rho_0-\frac{2k}{\mu+2}l^\mu}{\rho_0-\frac{k}{\mu+2}l^\mu}.$$

Această formulă poate fi utilizată pentru găsirea centrului de greutate al unui trunchi de copac.

22. Fie dat solidul compus dintr-un cilindru de rază R şi înălţime $2a$ şi un cilinlru coaxial de rază r şi înălţime $2b$ (fig. 72). Aceşti doi cilindri sînt confecţionaţi din acelaşi material care are densitatea ρ. C_1 este centrul de greutate al primului cilindru şi O este centrul de greutate al celui de-al doilea cilindru. In partea dreaptă a cilindrului este turnat un dop cilindric coaxial cu el cu densitatea $\rho_2(\rho_2>\rho)$ cu raza egală cu r_2. Să se afle înălţimea $2h$ a acestui dop cilindrc, astfel ca centrul de greutate al întregului sistem să se găsească în punctul C situat la dreapta punctului O, unde abscisa $\xi_0=OC$ este dată.

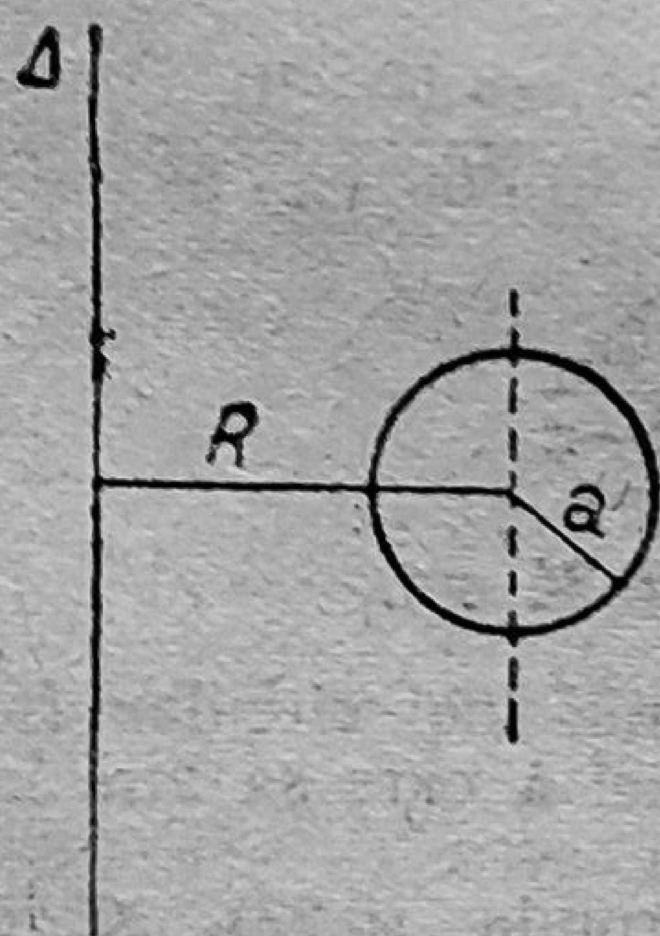


Fig. 70



Fig. 71

Pentru rezolvarea problemei vom considera sistemul dat format din cei doi cilindri şi din dopul cilindric cu densitatea $\rho_2-\rho$, şi vom lua originea coordonatelor în punctul O. Este evident că centrul de greutate al sistemului

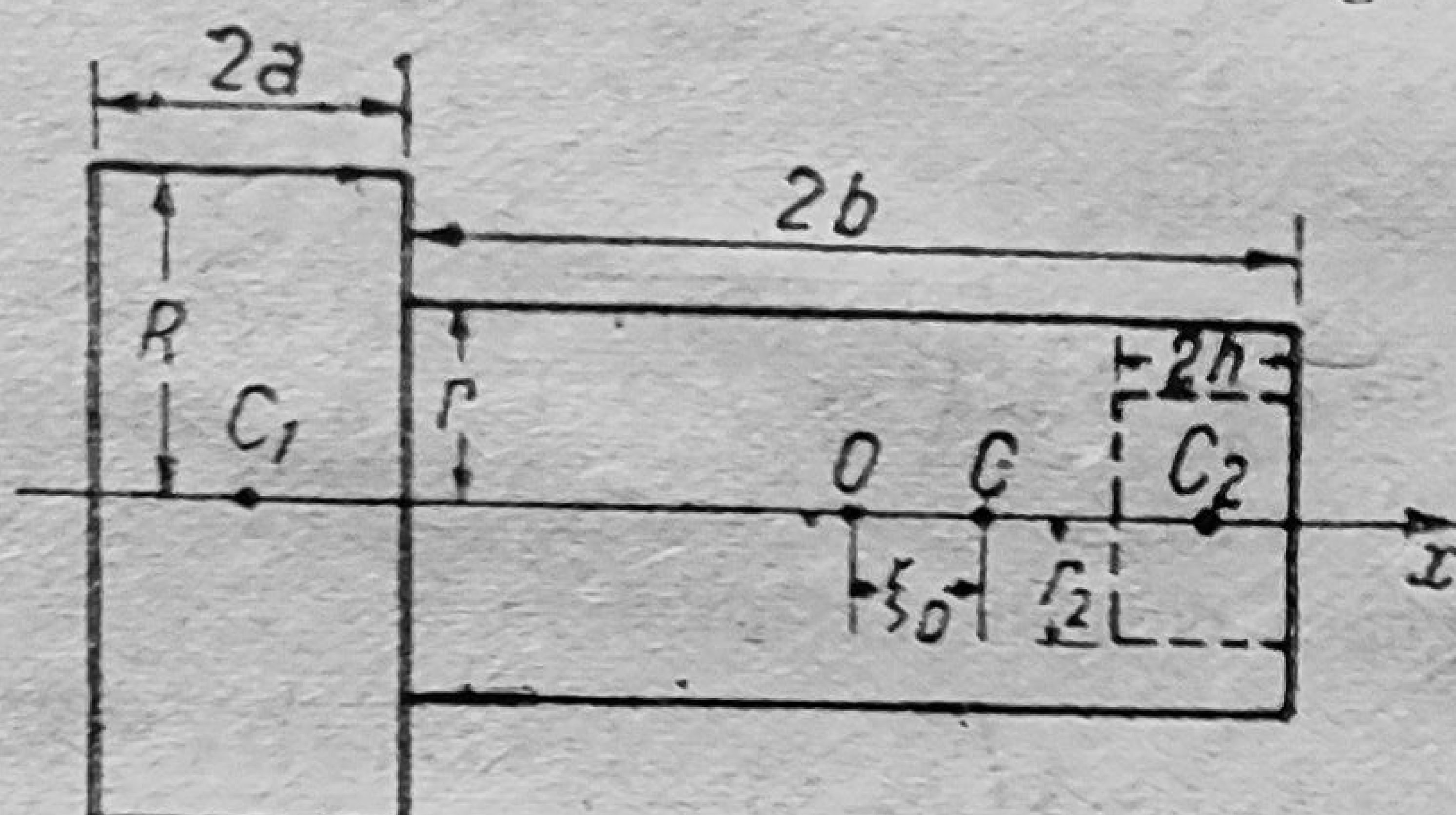


Fig. 72

trebuie să se afle pe axa de simetrie Ox care trece prin punctele C_1, O, C şi C_2, unde C_2 este centrul de greutate al dopului turnat. Avem:

(primul cilindru) $M_1=2\pi R^2 a\rho$, $\xi_1=-(a+b)$;
(al doilea cilindru) $M=2\pi r^2 b\rho$, $\xi=0$;
(dop) $M_2=2\pi r_2^2 h(\rho_2-\rho)$, $\xi_2=b-h$.

Aplicînd formula (6.15) obţinem:

$$\xi_0=\frac{M_1\xi_1+M\xi+M_2\xi_2}{M_1+M+M_2},$$

sau:

$$\xi_0=\frac{\xi+\frac{M_2}{M_1}\xi_2}{1+\frac{M}{M_1}+\frac{M_2}{M_1}}.$$

Introducînd aici valorile date mai sus pentru mase şi coordonate, vom avea:

$$\xi_0=\frac{-(a+b)+\frac{r_2^2}{R^2}\left(\frac{\rho_2}{\rho}-1\right)\frac{h}{a}(b-h)}{1+\frac{r^2}{R^2}\frac{b}{a}+\frac{r_2^2}{R^2}\left(\frac{\rho_2}{\rho}-1\right)\frac{h}{a}}.$$

Presupunem pentru simplificare:

$$\frac{r_r^2}{R^2}\left(\frac{\rho_2}{\rho}-1\right)\frac{1}{a}=n, \qquad \frac{r^2}{R^2}\frac{b}{a}=k;$$

atunci:

$$\xi_0=\frac{-(a+b)+nh(b-h)}{1+k+nh}.$$

De aici obținem pentru h ecuația de gradul doi

$$h^2-(b-\xi_0)h+\frac{a+b+(1+k)\xi_0}{n}=0,$$

de unde găsim:

$$h=\frac{b-\xi_0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b-\xi_0}{2}\right)^2-\frac{a+b+(1+k)\xi_0}{n}}.$$

Prin urmare, lungimea dopului cilindrului va fi:

$$2h=b-\xi_0\pm\sqrt{(b-\xi_0)^2-\frac{4a+4b+4(1+k)\xi_0}{n}}.$$

Existența a două valori pentru lungimea h se explică ușor.

În adevăr, în loc de dopul cilindru cu lungimea $2h<b$ arătată în fig. 72, se poate lua un dop, al cărui capăt se găsește în stînga punctului C, distanța de la punctul C la capătul dopului fiind egală cu distanța de la punctul C la primul dop. Să notăm această distanță prin d; în cazul figurii 72 vom avea:

$$\xi_0+d+2h=b,$$

adică

$$2h=b-\xi_0-d.$$

Este ușor să ne convingem geometric că în cazul cînd capătul dopului se va găsi în stînga punctului C atunci

$$2h=b-\xi_0+d.$$

Astfel, existența celor două soluții este justificată și se dă chiar o interpretare fizică a rădăcinii pătrate ce intervine în expresia lui $2h$, și anume:

$$d=\sqrt{(b-\xi_0)^2-\frac{4a+4b+4(1+k)\xi_0}{n}}$$

Nu vom analiza cazurile nerezolvabile.

23. Se dă parabola $y^2=2px$, raportată la un sistem ortogonal de coordonate Oxy. În punctul C axa Ox se intersectează cu coarda AB a parabolei perpendiculară pe axa Ox și situată la distanța $OC=h$, de la vîrful O. Să se găsească centrul de greutate al segmentului $OACBO$ al parabolei, presupunîndu-l omogen. Deoarece centrul de greutate căutat se află pe axa de simetrie Ox a parabolei, pentru găsirea lui este suficient să cunoaștem abscisa lui ξ, care se determină din formula:

$$\xi=\frac{\iint x d\sigma}{\sigma}$$

de la sfîrşitul § 28. Reprezentînd elementul de suprafaţă $d\sigma$ al parabolei prin: $2y\,dx = 2\sqrt{2px}\,dx = 2\sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx$, vom înlocui integralele duble cu integrale simple şi vom obţine:

$$\sigma = 2\sqrt{2p}\int_0^h x^{\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{2p}\,\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{2ph}\cdot h,$$

$$\iint x\,d\sigma = 2\sqrt{2p}\int_0^h x^{\frac{3}{2}}dx = 2\sqrt{2p}\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2ph}\cdot h^2.$$

De aici, pentru coordonata ξ, găsim:

$$\xi = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{2ph}\cdot h^2}{\frac{4}{3}\sqrt{2ph}\cdot h} = \frac{3}{5}h = 0{,}6\,h.$$

Dacă vîrful O se uneşte cu capetele A şi B ale coardei AB prin dreptele OA şi OB, atunci triunghiul isoscel obţinut AOB va avea centrul său de greutate, de asemenea, pe axa Ox la o distanţă de $\frac{2}{3}\,h$ de la punctul O. Prin urmare, centrul de greutate al segmentului de parabolă va fi mai aproape de punctul O decît centrul de greutate al triunghiului isoscel considerat, aşa cum era de aşteptat, şi distanţa dintre ambele centre de greutate va fi egală cu $\frac{2}{3}h - \frac{3}{5}h = \frac{1}{15}h$.

CAPITOLUL VII

ECHILIBRUL FORȚELOR PARALELE

§ 33. Ecuațiile de echilibru. Fiind dat un sistem de forțe paralele aplicate unui solid rigid, știm că aplicînd succesiv teorema compunerii forțelor paralele dirijate în același sens și teorema compunerii forțelor antiparalele, sistemul de forțe considerat se reduce, fie la o rezultantă, fie la un cuplu. Determinarea pe cale geometrică a cazului care are loc nu întîmpină dificultăți. Ca să dăm o rezolvare analitică a acestei probleme, să facem mai întîi cîteva observații. Fie dat sistemul de forțe paralele $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots$, al căror moment rezultant în raport cu un punct oarecare din spațiu este egal cu $\overline{M}$. Presupunem că în conformitate cu teoremele compunerii forțelor paralele vom înlocui cîteva forțe ale sistemului dat, prin rezultanta lor $\overline{F}'$; fie C' punctul de aplicare al forței $\overline{F}'$, iar vectorul $\overline{OC'}=\overline{\rho}'$.

Nu este greu de observat că prin această înlocuire a cîtorva forțe cu o singură rezultantă a lor $\overline{F}'$ momentul rezultant al sistemului nu se poate schimba, deoarece conform teoremei lui Varignon momentul $\overline{\rho}'\times\overline{F}'$ al forței $\overline{F}'$ este egal cu suma momentelor forțelor componente și toate aceste momente ale componentelor intră în expresia momentului rezultant $\overline{M}$. De aici urmează că, dacă sistemul de forțe paralele se reduce la un cuplu de forțe, atunci momentul cuplului este egal cu momentul rezultant al acestui sistem de forțe paralele.

Să trecem acum la determinarea ecuațiilor de echilibru ale sistemului de forțe paralele. In primul rînd acest sistem de forțe nu trebuie să aibă rezultantă, adică trebuie ca $\sum_n F_n=0$, unde F_n sînt mărimi algebrice. In acest caz, conform formulei (5.16) momentul rezultant al sistemului trebuie să fie constant pentru toate punctele din spațiu, deci sistemul de forțe se poate reduce la un cuplu cu momentul egal cu momentul rezultant al sistemului. Pentru a nu avea cuplul de forțe, momentul rezultant

$\overline{M}=\sum_n \overline{M}_n$ al sistemului trebuie să fie egal cu zero. Astfel, ecuațiile de echilibru ale sistemului de forțe paralele, în formă vectorială, au următoarea expresie:

$$\sum_n \overline{F}_n=0, \quad \sum_n \overline{M}_n=0. \tag{7.1}$$

Deoarece forțele $\overline{F}_n$ sînt paralele, toți vectorii $\overline{M}_n$ avînd punctul de aplicație în punctul O se vor găsi într-un plan care trece prin punctul O și este perpendicular pe direcția forțelor $\overline{F}_n$. Pentru a obține ecuațiile de echilibru sub formă analitică, vom alege un sistem ortogonal de axe de coordonate $Oxyz$, a cărui axă Oz va fi paralelă cu forțele $\overline{F}_n$; deoarece proiecțiile tuturor forțelor pe axele Ox și Oy vor fi egale cu zero, din cele trei ecuații de proiecții:

$$\sum_n X_n=0, \quad \sum_n Y_n=0, \quad \sum_n Z_n=0$$

primele două se vor transforma în identități, iar a treia va deveni $\sum_n F_n=0$. Din cele trei ecuații de momente:

$$M_x=0, \quad M_y=0, \quad M_z=0$$

ultima se va transforma într-o identitate deoarece toate forțele sînt paralele cu axa Oz, iar primele două:

$$M_x=\sum_n (y_n Z_n-z_n Y_n)=0, \quad M_y=\sum_n (z_n X_n-x_n Z_n)=0$$

vor avea forma:

$$\sum_n y_n F_n=0, \quad \sum_n x_n F_n=0.$$

Astfel, obținem următoarele trei ecuații de echilibru sub formă analitică

$$\sum_n F_n=0, \quad \sum_n x_n F_n=0, \quad \sum_n y_n F_n=0, \tag{7.2}$$

axa Oz coincizînd cu unul din cele două sensuri ale forțelor $\overline{F}_n$; condițiile exprimate prin ecuațiile (7.2) sînt condiții necesare și suficiente. Deoarece ecuațiile de echilibru sînt numai în număr de trei, orice probleme de echilibru a forțelor paralele care conțin mai mult decît trei reacțiuni, va fi o problemă static nedeterminată.

§ 34. Exemple. 24. O grindă de greutate P este așezată pe două reazeme A_1 și A_2; în punctele A și B ale grinzii acționează forțele $\bar{P}_1$ și $\bar{P}_2$; să se determine reacțiunile $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$ din reazeme fig. 73).

Deoarece grinda nu este articulată în reazemele A_1 și A_2, neglijînd frecarea, vom admite că forțele $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$ sînt normale la grindă. Se dă $A_1A_2=2l$, $A_1C=l$, $CA=a$, $AB=b$. Alegem axa z normal pe grindă în sensul reacțiunii reazemelor, axa y de-a lungul grinzii și originea coordonatelor, o vom alege în punctul A_1, pentru a elimina din ecuația momentelor momentul forței $\bar{R}_1$. Din ecuațiile (7.2) rămîn ecuațiile:

$$\sum_n F_n=0, \quad \sum_n y_n F_n=0.$$

Aplicate la problema noastră, ele capătă forma:

$$R_1+R_2-P-P_1-P_2=0,$$
$$R_2 2l-Pl-P_1(l+a)-P_2(l+a+b)=0.$$

Din ecuația a doua avem:

$$R_2=\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}P_1\left(1+\frac{a}{l}\right)+\frac{1}{2}P_2\left(1+\frac{a}{l}+\frac{b}{l}\right).$$

Introducînd această valoare a lui R_2 în prima ecuație, avem:

$$R_1=P+P_1+P_2-\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}P_1\left(1+\frac{a}{l}\right)-\frac{1}{2}P_2\left(1+\frac{a}{l}+\frac{b}{l}\right),$$

sau:

$$R_1=\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}P_1\left(1-\frac{a}{l}\right)+\frac{1}{2}P_2\left(1-\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\right).$$

Metoda de rezolvare poate fi simplificată, făcînd ca fiecare ecuație de echilibru să conțină numai cîte o singură reacțiune necunoscută. Pentru aceasta vom raționa în felul următor: Vom pune condiția ca momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu punctul A_1 să fie egal cu zero; această condiție este echivalentă cu condiția ca să nu existe cuplu. S-ar putea însă ca să existe o rezultantă care trece prin punctul A_1 al cărui moment în raport cu punctul A_1 ar fi egal cu zero. Vom pune apoi condiția ca momentul rezultant al sistemului de forțe, în raport cu punctul A_2 să fie de asemenea egal cu zero. Deoarece rezultanta care trebuie să fie perpendiculară pe grindă nu poate să treacă concomitent prin punctele A_1 și A_2,

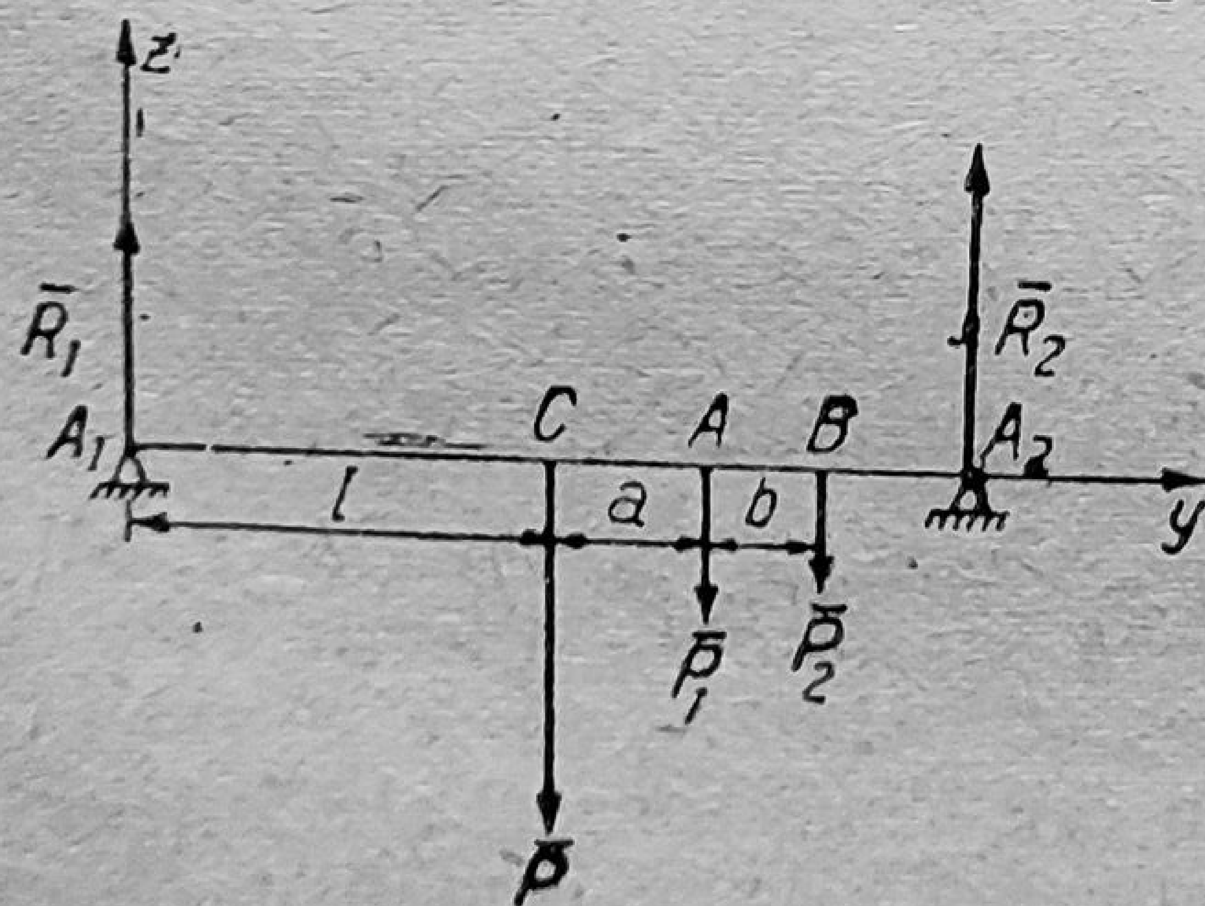


Fig. 73

această rezultantă trebuie să fie egală cu zero și grinda este în echilibru. Scriind aceste două ecuații de momente, vom avea:

$$+R_2 2l - Pl - P_1(l+a) - P_2(l+a+b) = 0,$$

$$-R_1 2l + Pl + P_1(l-a) + P_2(l-a-b) = 0;$$

vedem că în fiecare din ecuațiile precedente intervine numai cîte una din reacțiunile necunoscute R_1 și R_2. Determinînd de aici mărimile R_1 și R_2 ajungem la valorile găsite anterior.

25. Să se determine reacțiunile $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ și $\bar{R}_3$ care apar pe cele trei picioare ale unei mese grele care se găsește în repaus pe o pardoseală orizontală lucie (fig. 74).

Luăm un sistem ortogonal de axe de coordonate $Oxyz$, astfel încît planul Oxy coincide cu planul pardoselii iar axa Oz este dirijată după verticală în sus. Notăm coordonatele capetelor picioarelor mesei A_1, A_2, A_3

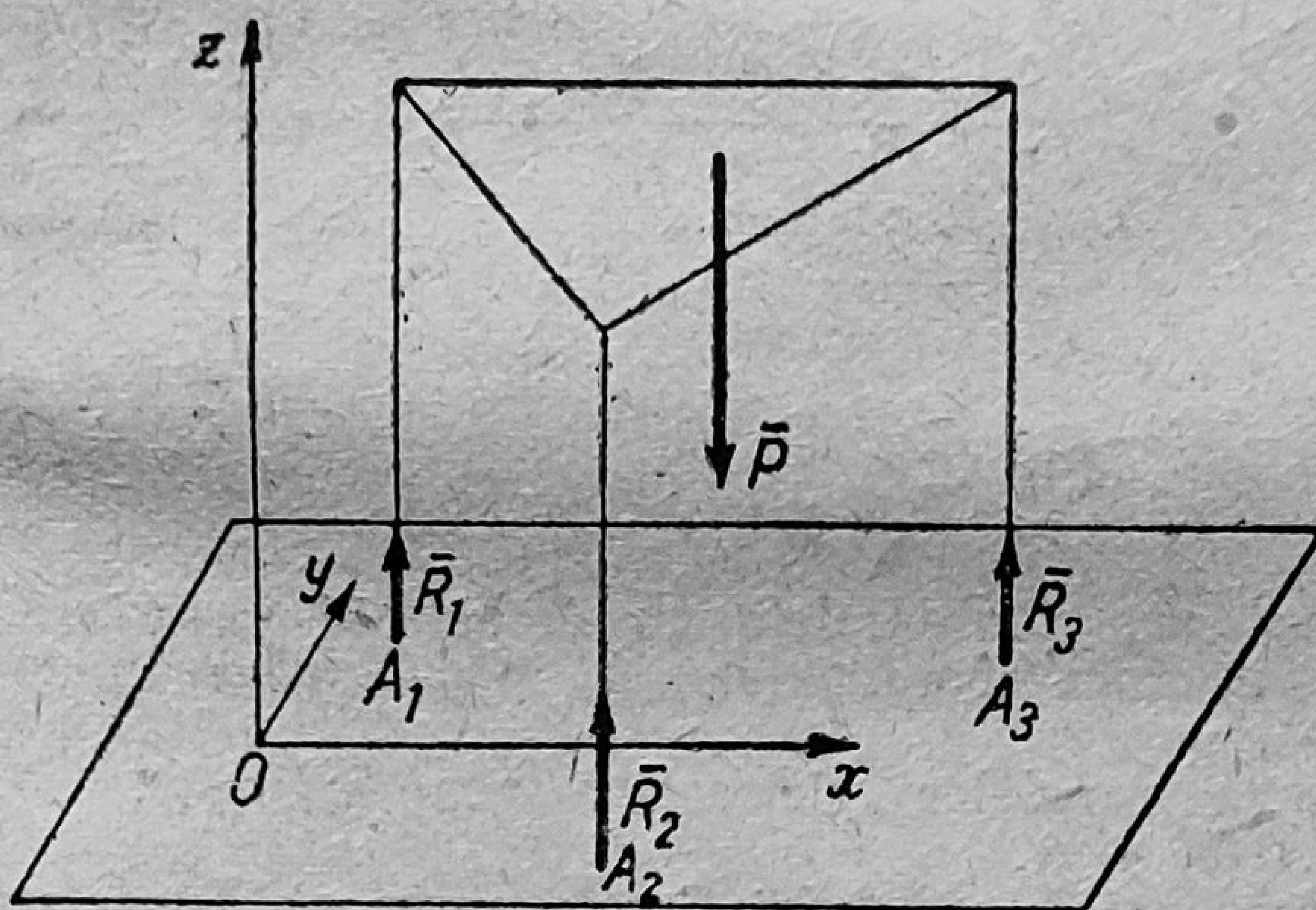


Fig. 74

prin (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), iar coordonatele centrului de greutate C în care se aplică greutatea $\bar{P}$ a mesei prin (x, y, z). Deoarece nu există frecare, rezultă că reacțiunile $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$ trebuie să fie normale pe planul pardoselii, adică paralele la axa Oz. Aplicînd ecuațiile (7.2) obținem:

$$R_1 + R_2 + R_3 - P = 0,$$

$$x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3 - xP = 0,$$

$$y_1R_1 + y_2R_2 + y_3R_3 - yP = 0,$$

sau:

$$R_1 + R_2 + R_3 = P,$$

$$x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3 = xP,$$

$$y_1R_1 + y_2R_2 + y_3R_3 = yP.$$

Din aceste trei ecuații de gradul întîi cu trei necunoscute vom determina valoarea acestor necunoscute.

26. Să se determine reacțiunile $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$ și $\bar{R}_4$ pe cele patru picioare ale unei mese dreptunghiulare grele, care se găsește în repaus pe o pardoseală orizontală lucie (fig. 75).

Presupunem că distanțele între picioarele mesei sînt respectiv egale cu $2a$ și $2b$ și că greutatea mesei aplicată în punctul C este egală cu P. Luăm axele de coordonate cum se arată în fig. 75, axa Oz dirijată pe

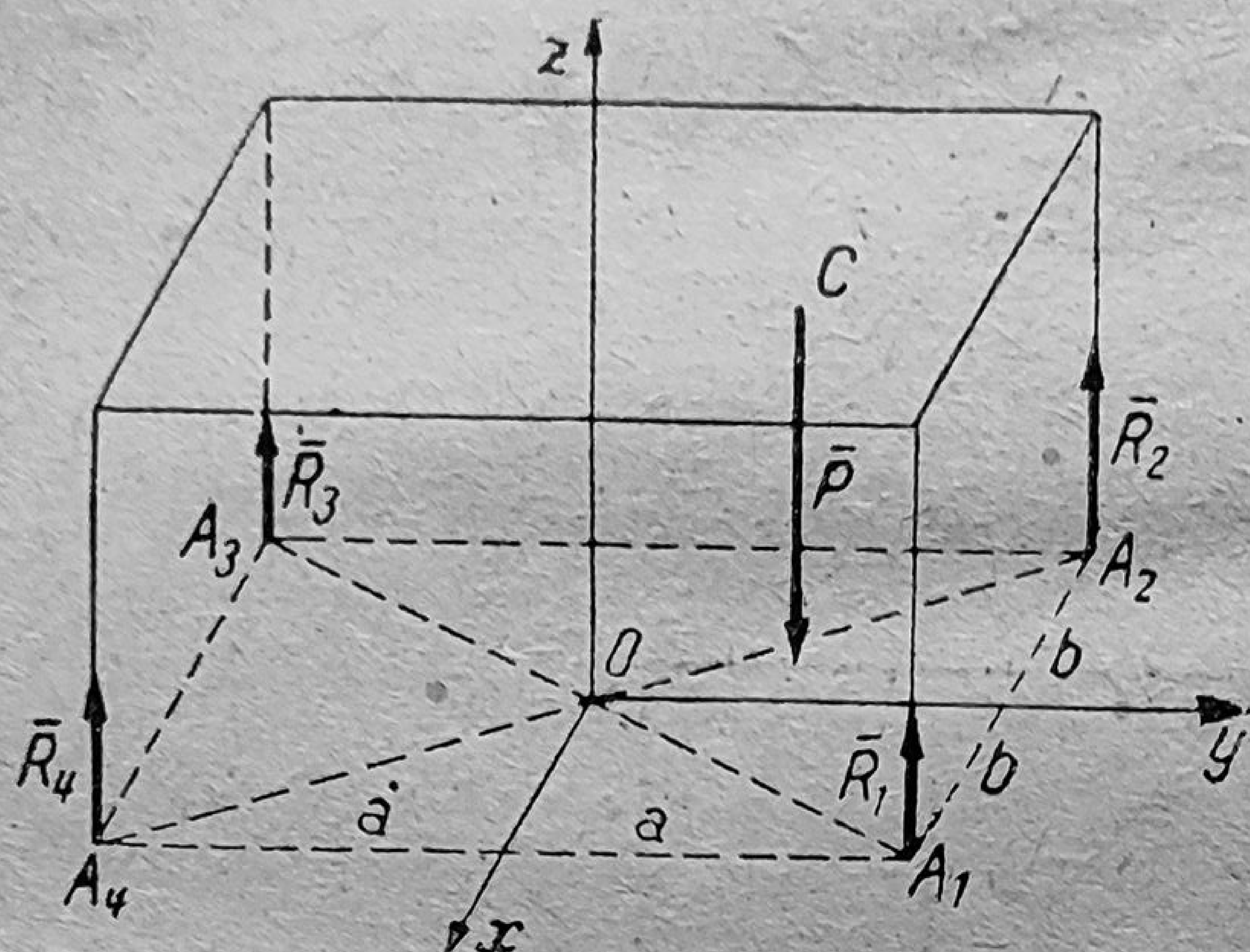


Fig. 75

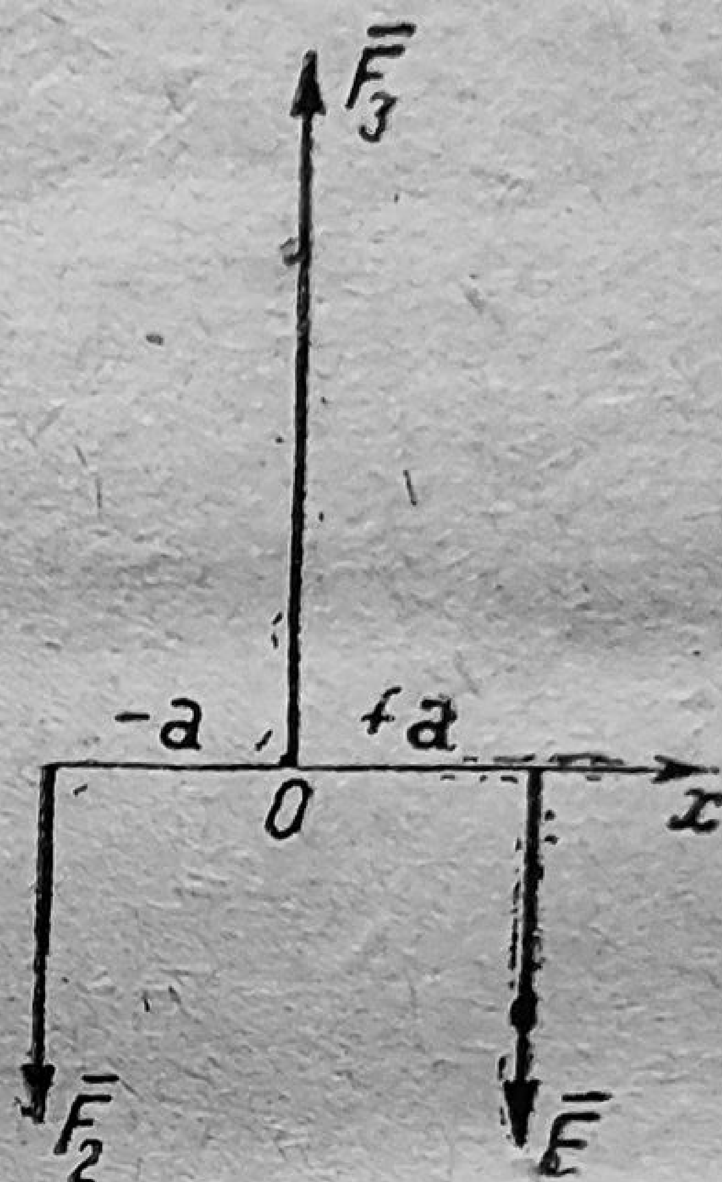


Fig. 76

verticală în sus, axa Ox paralelă cu dreapta A_1A_2, axa Oy paralelă cu dreapta A_4A_1 și originea coordonatelor O, în punctul de intersecție al dreptelor A_1A_3 și A_2A_4.

Coordonatele capetelor picioarelor vor fi: $A_1(b, a)$, $A_2(-b, a)$, $A_3(-b, -a)$, $A_4(b, -a)$.

Notăm coordonatele punctului C prin (x, y, z). Din cauză că nu există frecare, reacțiunile R_1, R_2, R_3, R_4 sînt normale la pardoseală, adică sînt paralele cu axa Oz. Din ecuațiile (7.2) avem:

$$R_1+R_2+R_3+R_4-P=0,$$
$$bR_1+bR_2-bR_3+bR_4-xP=0,$$
$$aR_1+aR_2-aR_3-aR_4-yP=0.$$

După cum era de așteptat, conform indicației de la sfîrșitul § 33, această problemă va fi static nedeterminată. Dacă ținem însă seama de deformațiile elastice ale pardoselii, se poate obține o ecuație suplimentară. Să presupunem că picioarele A_1, A_2, A_3, A_4 ale mesei deformează pardoseala, iar deplasările lor în jos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ sînt proporționale cu presiunea pe pardoseală, adică:

$$\varepsilon_1=kR_1,$$
$$\varepsilon_2=kR_2,$$
$$\varepsilon_3=kR_3,$$
$$\varepsilon_4=kR_4,$$

(presupunem că proprietățile elastice ale pardoselii sînt aceleași în dreptul tuturor picioarelor). Presupunem că după deformarea pardoselii, punctele

A_1, A_2, A_3, A_4 vor ocupa pozițiile A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, iar cele patru puncte A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 vor fi situate din nou în același plan.

Să examinăm diagonala A_1A_3; după deformație ea va ocupa poziția $A'_1A'_3$, iar punctul O se va deplasa în poziția O' la distanța $\varepsilon = OO'$, unde

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}$$

este lungimea unui segment ce unește mijloacele laturilor trapezului $A_1A_3A'_3A'_1$. Exact la fel, pornind de la trapezul $A_2A_4A'_4A'_2$ vom obține:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}{2}$$

De aici vom avea:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4,$$

sau:

$$R_1 - R_2 + R_3 - R_4 = 0.$$

Sistemul de ecuații care rezolvă problema este:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = P,$$

$$R_1 - R_2 - R_3 + R_4 = P\frac{x}{b},$$

$$R_1 + R_2 - R_3 - R_4 = P\frac{y}{a},$$

$$R_1 - R_2 + R_3 - R_4 = 0.$$

Rezolvînd aceste ecuații, găsim:

$$R_1 = \frac{1}{4}P\left(1 + \frac{x}{b} + \frac{y}{a}\right), \quad R_2 = \frac{1}{4}P\left(1 - \frac{x}{b} + \frac{y}{a}\right),$$

$$R_3 = \frac{1}{4}P\left(1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{a}\right), \quad R_4 = \frac{1}{4}P\left(1 + \frac{x}{b} - \frac{y}{a}\right).$$

Vedem că ținînd seamă de proprietățile elastice ale legăturilor, am putut determina toate reacțiunile, așa cum s-a arătat în § 17 cap. III.

27. Să demonstrăm că sistemul forțelor paralele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ se găsește în echilibru, dacă avem:

$$F_1 = F_2 = P, \quad F_3 = -2P;$$

$$x_1 = +a, \quad x_2 = -a, \quad x_3 = 0;$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0;$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0.$$

Acest caz este reprezentat în fig. 76.

Aplicînd formulele (5.14), vedem că ele sînt satisfăcute, adică sistemul forțelor date se găsește în adevăr în echilibru. Evident că forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ prin compunere dau o rezultantă care trece prin punctul O și se echilibrează cu forța $\overline{F}_3$.

CAPITOLUL VIII

TEORIA CUPLURILOR

§ 35. Echivalența cuplurilor. Să considerăm un cuplu oarecare format din două forțe al căror modul este egal cu F aplicat unui solid rigid; vom folosi uneori pentru prescurtare notația convențională $(\bar{F}, -\bar{F})$. Deoarece într-un solid absolut rigid

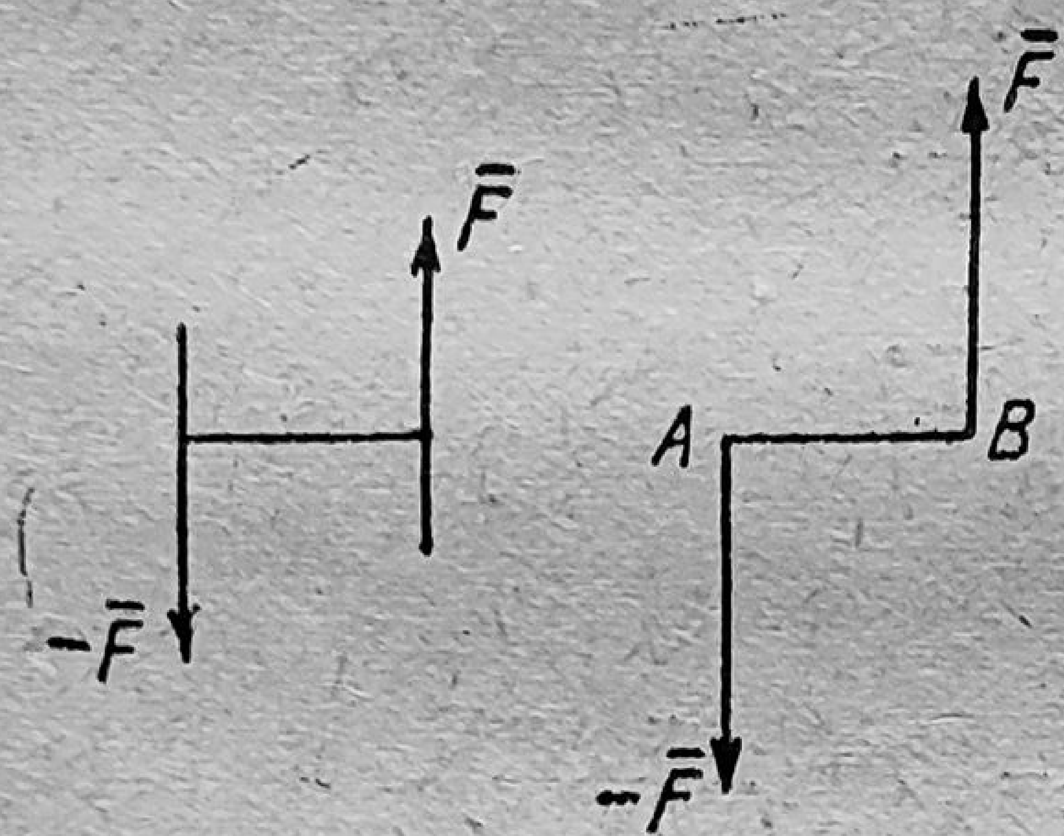


Fig. 77

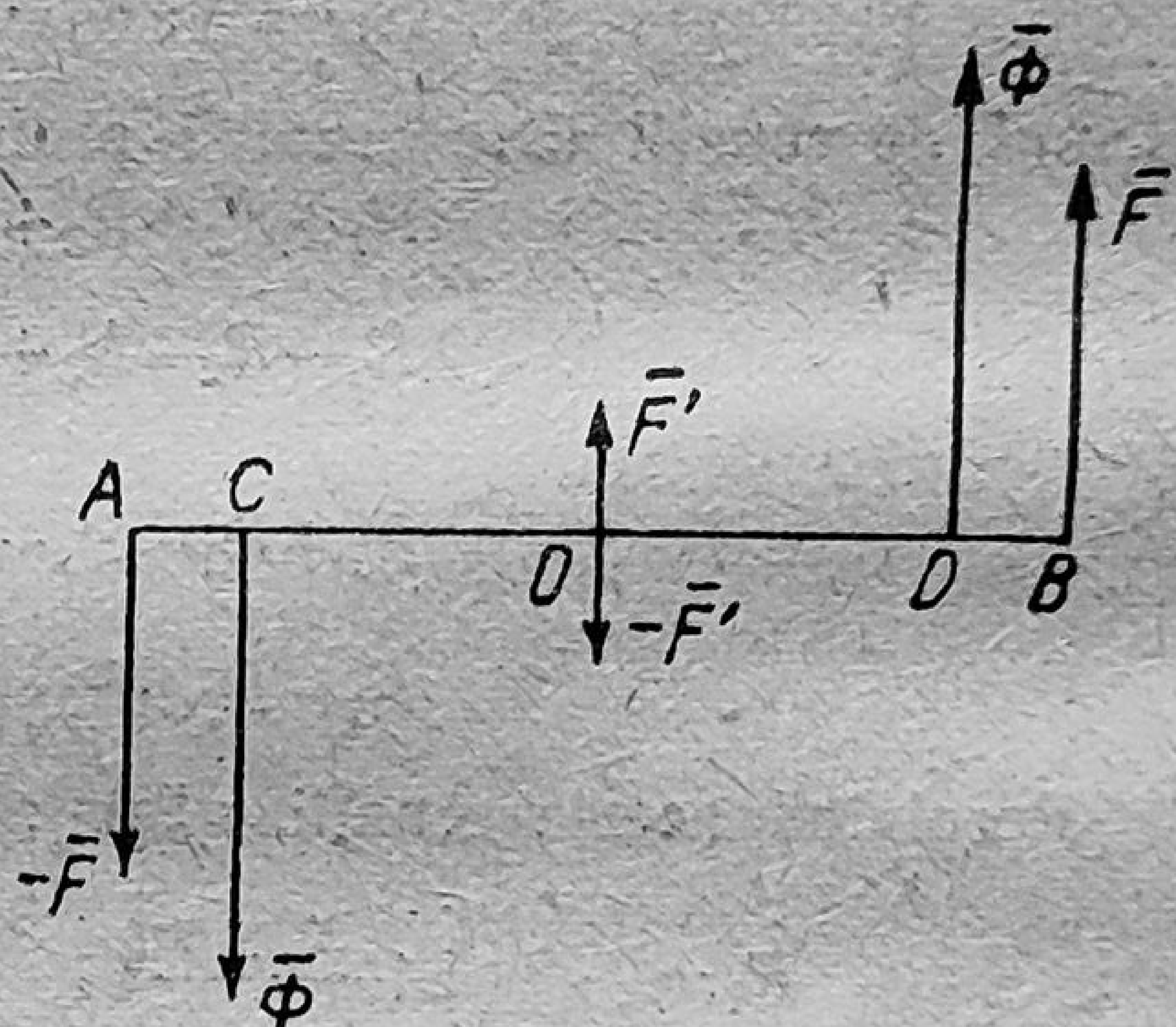


Fig. 78

forțele pot fi mutate de-a lungul suporturilor lor, se poate face totdeauna ca forțele ce alcătuiesc cuplul să fie aplicate la extremitățile brațului AB, așa cum se vede în fig. 77. În acest capitol vom presupune totdeauna cuplul redus la această formă. Să demonstrăm cîteva teoreme privind cuplurile.

1. *Putem modifica modulul forțelor cuplului și lungimea brațului cuplului astfel încît momentul cuplului să rămînă neschimbat.* Fie cuplul $(\bar{F}, -\bar{F})$ cu brațul AB (fig. 78), să transformăm cuplul într-un cuplu avînd modulul forțelor Φ; presupunem de exemplu $\Phi > F$. Aplicăm în mijlocul O al brațului AB două forțe egale și de sens contrar $\bar{F}'$ și $-\bar{F}'$ paralele la forța $\bar{F}$, cu modulul $F' = \Phi - F$. Compunînd forțele $\bar{F}$ și $\bar{F}'$ și apoi forțele $-\bar{F}$

și $-\bar{F}'$, vom obține cuplul $(\Phi, -\Phi)$ cu brațul CD. Din teorema compunerii forțelor paralele dirijate în același sens, se știe că trebuie să avem:

$$\frac{OD}{DB}=\frac{F}{F'}=\frac{F}{\Phi-F}.$$

De aici găsim:

$$OD\cdot(\Phi-F)=DB\cdot F,$$

sau

$$OD\cdot\Phi=OD\cdot F+DB\cdot F=OB\cdot F.$$

Inmulțind ambele părți ale acestei egalități cu 2, obținem:

$$\Phi\cdot CD=F\cdot AB,$$

adică momentul cuplului a rămas același. Astfel teorema este demonstrată. Reciproc este evident că se poate alege o lungime nouă a brațului cuplului schimbînd modulul forțelor astfel încît momentul cuplului să rămînă același.

2. *Cuplul poate fi deplasat paralel cu el însuși.* Fie cuplul $(\bar{F}, -\bar{F})$ situat în planul π. Să presupunem că vrem să transpor-

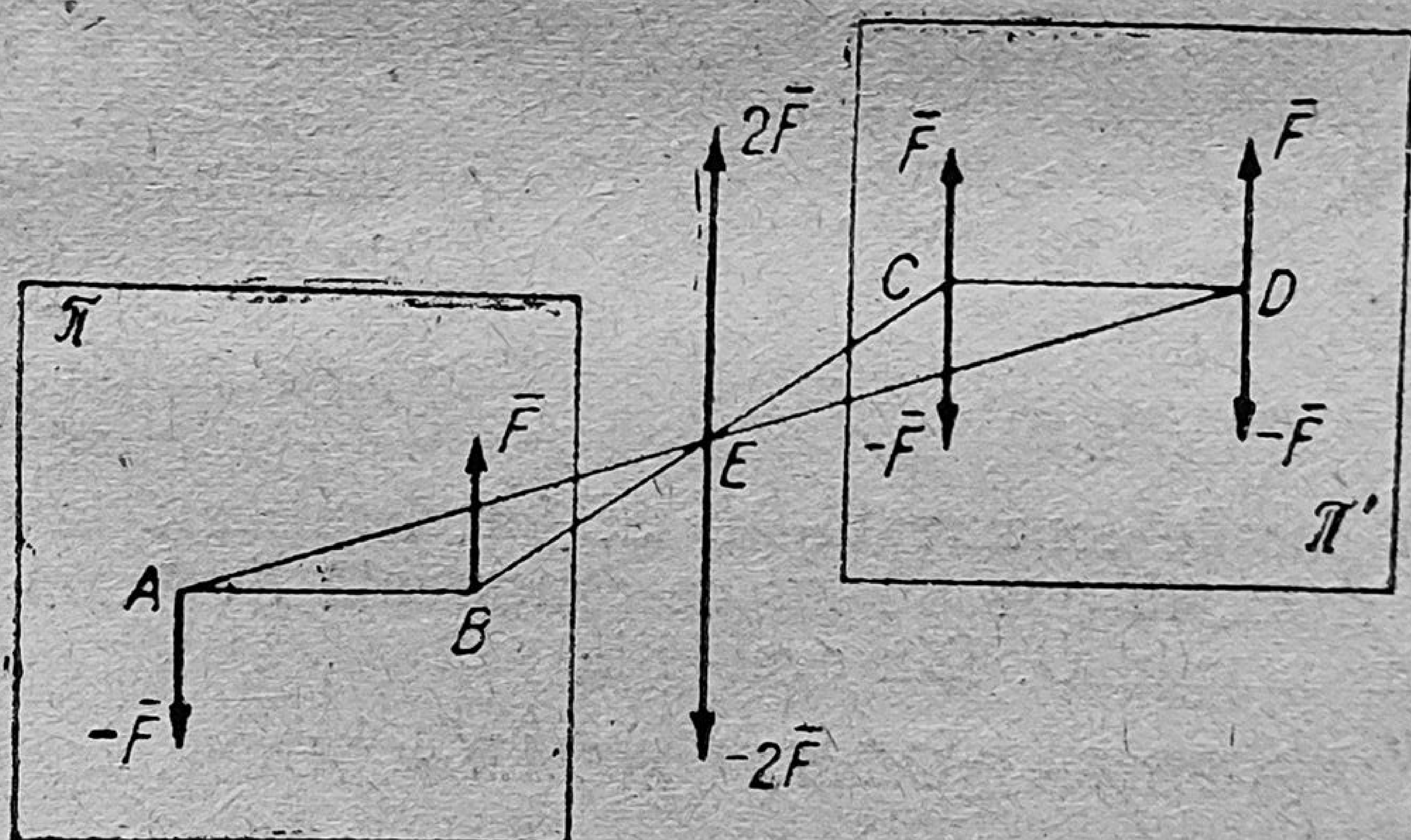


Fig. 79

tăm acest cuplu în planul π' iar $\pi' \parallel \pi$ (fig. 79). Să ducem în planul π' dreapta $CD \# AB$ și să aplicăm în punctele C și D cîte două forțe egale și de sens contrar avînd modulul F și perpendiculare pe CD. Deoarece $CD \# AB$, dreptele BC și AD, ca diagonale ale unui paralelogram, se intersectează într-un punct E împărțindu-se în două părți egale. Este evident că cele două forțe paralele $\bar{F}$ aplicate în punctele B și C vor da în punctul E

rezultanta $2\bar{F}$, iar cele două forțe paralele $-\bar{F}$, aplicate în punctele A și D vor da în punctul E, rezultanta $-2\bar{F}$. Ambele rezultante $+2\bar{F}$ și $-2\bar{F}$ aplicate în punctul comun E, se echilibrează, și rămîne cuplul $(\bar{F}, -\bar{F})$, situat în planul π'. Este evident că momentul acestui cuplu este egal cu momentul cuplului precedent. Ca un caz particular planul π' poate să coincidă cu planul π și vom avea deplasarea cuplului paralel cu el însuși în planul său.

3. *Cuplul poate fi rotit cu un unghi arbitrar în planul său.* Fie dat cuplul $(\bar{F}, -\bar{F})$. Să examinăm mai întîi un caz particular cînd cuplul se rotește în jurul mijlocului O al brațului AB. Ducem prin punctul O, dreapta $CD=AB$, care formează un unghi dat cu dreapta AB astfel ca să avem $CO=DO$. Aplicăm în punctele C și D cîte două forțe de sens contrar perpendiculare pe dreapta CD avînd modulele F. Mutăm forțele situate în interiorul unghiului BOD, în punctul lor de concurență M, iar forțele situate în interiorul unghiului AOC, în punctul lor de concurență N. Unim punctele M și N cu punctul O. Din egalitățile

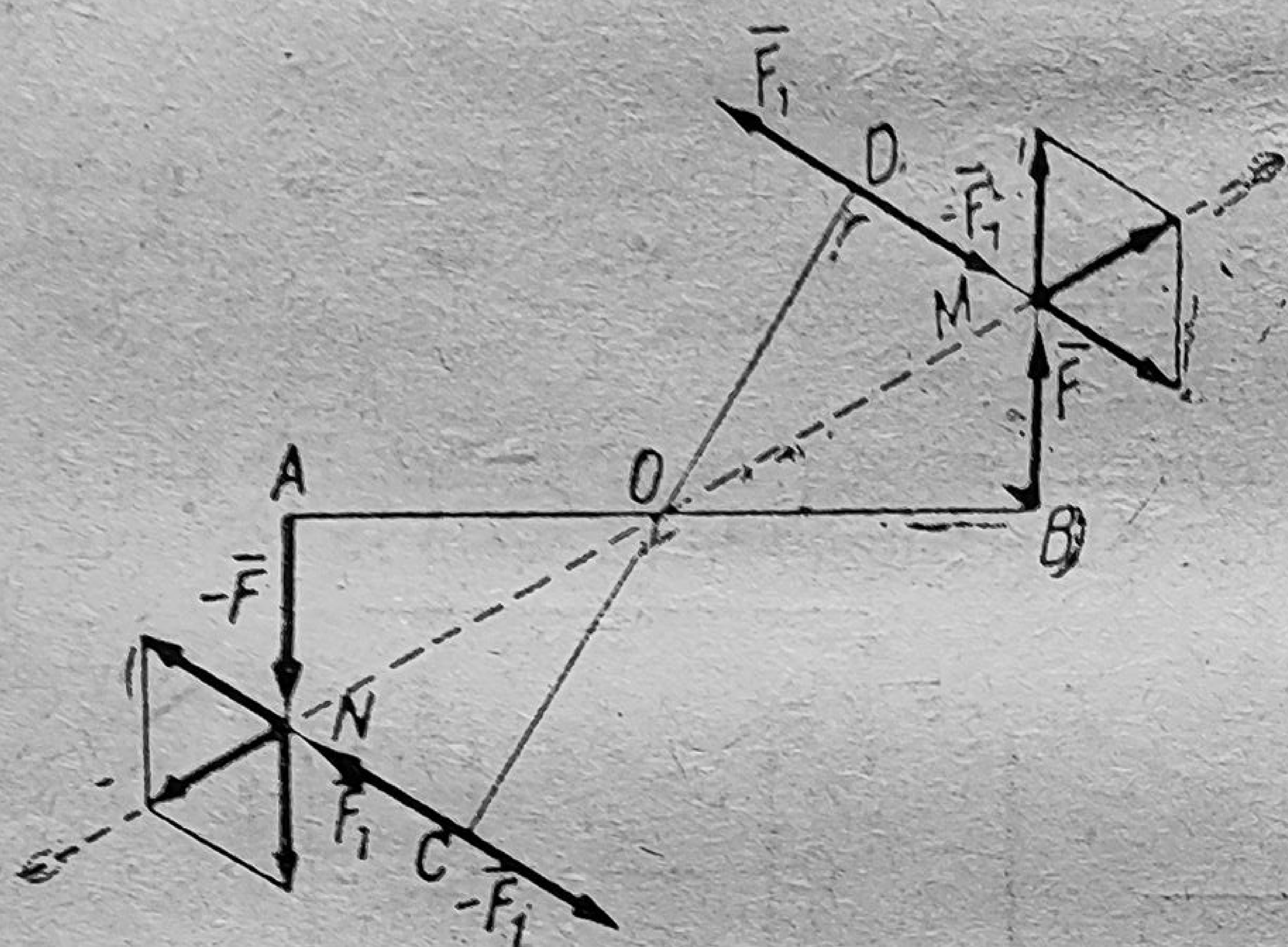


Fig. 80

$$\triangle OBM=\triangle ODM, \quad \triangle OAN=\triangle OCN,$$

rezultă că OM și ON sînt bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf AOC și BOD și, de aceea, dreptele ON și OM sînt în prelungire. Compunînd forțele aplicate în punctele M și N, după legea paralelogramului, vom obține romburi egale; rezultantele vor fi dirijate după diagonalele acestor romburi, situate în prelungirea dreptelor OM și ON. De aceea aceste rezultante se echilibrează între ele și rămîne numai cuplul forțelor $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$ cu brațul CD.

Combinînd rotirea în jurul punctului O cu o translație, putem roti cuplul în jurul oricărui punct din planul său. Este

evident că și în acest caz momentul cuplului rămîne neschimbat. De aici rezultă că:

Două cupluri cu momentele egale sînt echivalente, deoarece ele pot fi transformate unul în altul cu ajutorul celor trei operații arătate mai sus.

În adevăr, presupunem că sînt date două cupluri $(\overline{F}, -\overline{F})$ și $(\overline{F'} - \overline{F'})$ aplicate unui solid și că momentele lor $\overline{M}$ și $\overline{M}'$ sînt egale. Din egalitatea $\overline{M} = \overline{M}'$ tragem în primul rînd concluzia că cuplurile $(\overline{F}, -\overline{F})$ și $(\overline{F'}, -\overline{F'})$ sînt situate în plane paralele. Ca să ne convingem că cuplul $(\overline{F}', -\overline{F}')$ este echivalent cu cuplul $(\overline{F}, -\overline{F})$, rotim cuplul $(\overline{F}', -\overline{F}')$ în planul său, astfel încît brațul său să devină paralel cu brațul cuplului $(\overline{F}, -\overline{F}')$. Înlocuim forțele sale cu modulul $\overline{F}'$, prin forțele cu modulul $\overline{F}$; ca urmare a egalității $\overline{M}' = \overline{M}$ brațele ambelor cupluri vor deveni egale. Printr-o mișcare de translație, putem face ca un cuplu să coincidă cu celălalt, și astfel rezultă că aceste cupluri sînt echivalente.

Am arătat în § 25 că construcția vectorului moment al unui cuplu dat în raport cu un punct oarecare dat O, este o problemă complet determinată; ca rezultat al acestei construcții obținem un vector M bine determinat aplicat în punctul O. Invers, fie dat momentul $\overline{M}$ al unui cuplu aplicat în punctul O. Se cere să se găsească cuplul corespunzător lui. Pentru aceasta se poate duce un plan oarecare π perpendicular pe vectorul moment $\overline{M}$, oriunde, la alegere, în acest plan π, construim cuplul cu o pereche oarecare de forțe $\overline{F}$ și $-\overline{F}$ și cu un astfel de braț AB încît să aibă loc egalitatea $F \cdot AB = M$. În plus, va trebui ca sensul de rotație al cuplului $(\overline{F}, -\overline{F})$ să corespundă sensul vectorului $\overline{M}$. Vedem că această problemă inversă este nedeterminată, deoarece duce la o infinitate de cupluri, dar toate aceste cupluri sînt *echivalente*, adică se pot transforma unul într-altul aplicîndu-li-se operațiile expuse mai sus. Prin urmare, această varietate infinită de cupluri obținută este numai aparentă, căci fiind dat momentul $\overline{M}$, nu putem obține cupluri neechivalente. Astfel, ajungem la următoarea concluzie:

Cuplul este complet caracterizat prin momentul său.

De aceea, în mecanică, cuplul se determină totdeauna prin momentul lui și trebuie să ne deprindem ca în loc de cuplul dat,

să considerăm totdeauna momentul lui, adică vectorul moment $\overline{M}$, care este un vector liber, în timp ce vectorul forță $\overline{F}$ este un vector alunecător.

§ 36. Compunerea cuplurilor. Cuplul, ca și forța, este un element primar nereductibil. La fel ca în unele cazuri descrise mai înainte, unde am avut posibilitatea să înlocuim mai multe forțe printr-o singură forță rezultantă, tot așa se pot înlocui și mai multe cupluri printr-un singur cuplu. O asemenea reducere a unui sistem de cupluri la un singur cuplu, se numește *compunerea cuplurilor*.

Compunerea cuplurilor situate în plane paralele. Fie, de exemplu, trei cupluri $(\overline{F}_1, -\overline{F}_1)$, $(\overline{F}_2, -\overline{F}_2)$, $\overline{F}_3, -\overline{F}_3)$ situate în plane paralele. Din cele expuse în paragraful precedent vom putea deplasa aceste cupluri printr-o mișcare de translație într-un



Fig. 81

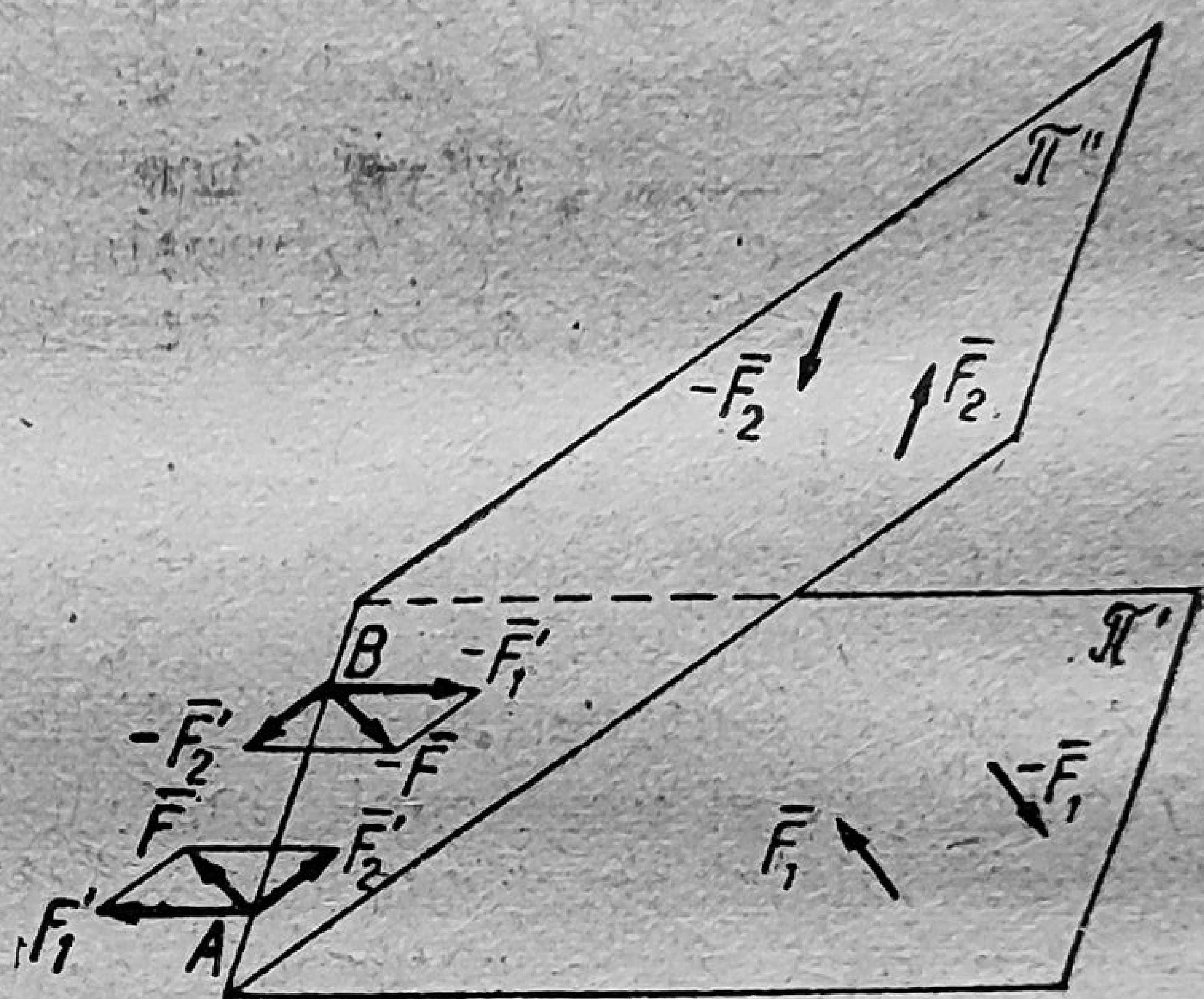


Fig. 82

plan paralel cu planele cuplurilor date. Tot din proprietățile expuse în paragraful precedent vom putea transforma aceste trei cupluri în cupluri avînd un braț comun, schimbînd într-un mod cuvenit modulele forțelor cuplurilor prin translații și rotații convenabile ale cuplurilor în planul lor. Astfel vom putea reduce cele trei cupluri date la cuplurile $(\overline{F}'_1, -\overline{F}'_1)$, $(\overline{F}'_2, -\overline{F}'_2)$, $(\overline{F}'_3, -\overline{F}'_3)$, cu brațul comun Ab, reprezentate în fig. 81. Compunînd forțele:

$$\overline{F}'_1+\overline{F}'_2+\overline{F}'_3=\overline{F},$$

obținem rezultanta lor $\overline{F}$; în același mod, vom avea:

$$-\overline{F}'_1-\overline{F}'_2-\overline{F}'_3=-\overline{F}.$$

Prin urmare, în loc de trei cupluri $(\overline{F}_1, -\overline{F}_1)$, $(\overline{F}_2, -\overline{F}_2)$, $(\overline{F}_3, -\overline{F}_3)$ vom obține un singur cuplu $(\overline{F}, -\overline{F})$. Astfel, am demonstrat posibilitatea compunerii cuplurilor situate în plane paralele. Rămîne de demonstrat că momentul $\overline{M}$ al cuplului $(\overline{F}, -\overline{F})$ este egal cu suma geometrică $\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3$ a momentelor celor trei cupluri date, sau, ceea ce este același lucru, a cuplurilor $(\overline{F}'_1, -\overline{F}'_1)$, $(\overline{F}'_2, -\overline{F}'_2)$, $(\overline{F}'_3, -\overline{F}'_3)$. Dar acest din urmă lucru este evident. În adevăr, deoarece momentul cuplului în raport cu un punct oarecare din spațiu este același, vom lua momentele tuturor cuplurilor în raport cu punctul A. Atunci momentul cuplului $(\overline{F}'_1, -\overline{F}'_1)$ în raport cu punctul A se va reduce la momentul forței $\overline{F}'_1$ în raport cu punctul A, momentul cuplului $(\overline{F}'_2, -\overline{F}'_2)$, la momentul forței $\overline{F}'_2$ în raport cu punctul A și așa mai departe. Dar după teorema lui Varignon pentru forțele concurente, momentul $\overline{M}$ al rezultantei $\overline{F}$ este egal cu suma geometrică a momentelor $\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3$ a forțelor $\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \overline{F}'_3$ și teorema este demonstrată. Este evident că în acest caz suma geometrică a momentelor se reduce la suma lor algebrică. Astfel, pentru a compune cuplurile situate în plane paralele, este suficient să se adune algebric momentele lor.

Cazul general de compunere a cuplurilor. Ca să ajungem la cazul general rămîne de examinat numai cazul cînd cuplurile sînt situate în plane secante. Fie două cupluri $(\overline{F}_1, -\overline{F}_1)$ și $(\overline{F}_2, -\overline{F}_2)$ situate în planele secante π' și π'' (fig. 82).

Prelungind aceste plane pînă la intersecția lor și modificînd forțele cuplurilor putem transforma și muta cuplurile astfel încît ele să aibă un braț comun AB situat pe dreapta de intersecție a planelor π' și π''. Astfel vom obține cuplurile $(\overline{F}'_1, -\overline{F}'_1)$ și $(\overline{F}'_2, -\overline{F}'_2)$. Vedem că pentru obținerea unui singur cuplu $(\overline{F}, -\overline{F})$ este suficient să adunăm geometric forțele:

$$\overline{F}'_1+\overline{F}'_2=\overline{F},$$
$$-\overline{F}'_1-\overline{F}'_2=-\overline{F},$$

aplicate în punctele A și B; prin urmare, posibilitatea compunerii cuplurilor situate în plane secante este demonstrată. Rămîne de demonstrat că momemntul $\overline{M}$ al cuplului $(\overline{F}, -\overline{F})$ este egal cu suma geometrică a momentelor $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$ ale cuplurilor $(\overline{F}_1, -\overline{F}_1)$ și $(\overline{F}_2, -\overline{F}_2)$ sau ceea ce este același lucru ale cuplurilor

$(\overline{F}_1', -\overline{F}_1')$ şi $(\overline{F}_2', -\overline{F}_2')$. Folosindu-ne de faptul că momentul cuplului în raport cu oricare punct din spaţiu este constant, luăm momentele tuturor cuplurilor în raport cu punctul B (v. § 25). Atunci momentul $\overline{M}$ al cuplului $(\overline{F}, -\overline{F})$ în raport cu punctul B se reduce la momentul forţei $\overline{F}$ în raport cu punctul B, momentul $\overline{M}_1$ al cuplului $(\overline{F}_1', -\overline{F}_1')$, la momentul forţei $\overline{F}_1'$ în raport cu punctul B şi momentul $\overline{M}_2$ al cuplului $(\overline{F}_2', -\overline{F}_2')$ la momentul forţei $\overline{F}_2'$ în raport cu punctul B. Dar conform teoremei lui Varignon pentru forţe concurente, momentul $\overline{M}$ al forţei $\overline{F}$ este egal cu suma geometrică a momentelor $\overline{M}_1$ şi $\overline{M}_2$, şi teorema este demonstrată.

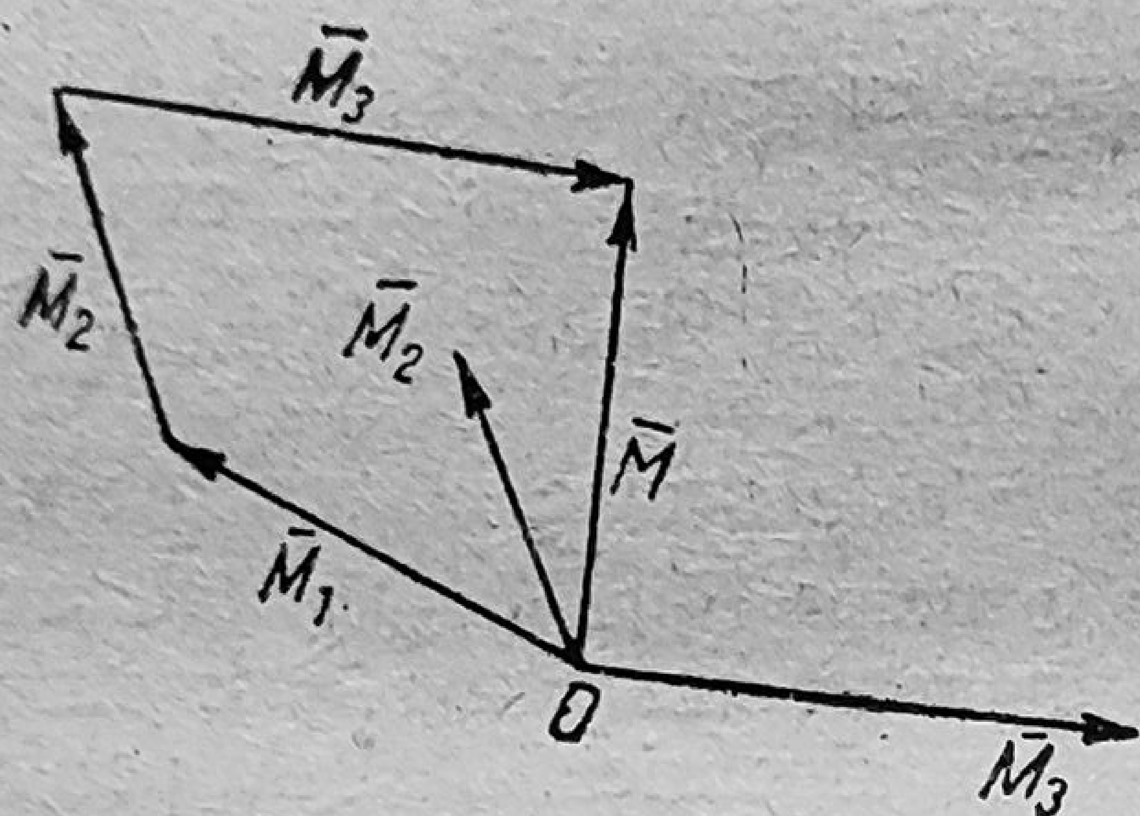


Fig. 83

De aici obţinem o teoremă generală aplicabilă în toate cazurile:

Pentru compunerea cuplurilor este suficient să se adune geometric momentele lor.

Fie date de exemplu trei cupluri arbitrare: $(\overline{F}_1, -\overline{F}_1)$, $(\overline{F}_2, -\overline{F}_2)$ şi $(\overline{F}_3, -\overline{F}_3)$. Deoarece momentul cuplului în raport cu un oricare punct din spaţiu este constant, vom considera un punct arbitrar din spaţiu O şi vom construi în el vectorii moment $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ şi $\overline{M}_3$ ai cuplurilor considerate (fig. 83). Adunînd geometric aceste momente vom obţine momentul $\overline{M}$:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3$$

al cuplului unic care poate înlocui cele trei cupluri date.

§ 37. Aparatul lui Tepler. Cele expuse în capitolul de faţă şi în cele precedente se pot verifica cu aparatul lui Tepler (fig. 84).

Aparatul se compune dintr-o masă cu trei picioare pe care este instalat pe trei şuruburi de reglaj un disc circular cu faţa superioară foarte bine lustruită. Cu ajutorul celor trei şuruburi, faţa superioară a discului poate fi aşezată perfect orizontal. Pe acest disc se aşează trei bile de oţel cu diametrul de circa 1,5 cm, deasupra cărora se aşază un al doilea disc rotund cu faţa lustruită, care prin urmare poate să se deplaseze foarte uşor pe acele bile. Pe partea superioară a suprafeţei acestui de-al doilea disc sînt făcute o serie de găuri în care se pot introduce ştifturi mici.

De aceste știfturi se pot prinde fire ce sînt petrecute peste scripeți, care pot fi fixați cu ajutorul unor dispozitive, în orice punct de pe periferia primului disc; la capetele firelor se atîrnă greutăți. Să se verifice, de exemplu, pe cale experimentală, legea paralelogramului. Introducem un știft într-una din găurile discului superior; prindem de știft trei fire dintre care primele două le întindem de exemplu, sub un unghi de 90° unul față de celălalt, agățînd de ele greutăți de 300 g și 400 g. Atunci rezultanta acestor forțe va fi egală cu 500 g, deoarece $300^2+400^2=500^2$ și va fi dirijată după diagonala dreptunghiului construit pe suporturile forțelor de 300 g și 400 g. Îndreptînd al treilea fir în sens opus acestei rezultante și atîrnînd de el o greutate de 500 g vom vedea că discul superior va rămîne fix. Pentru ca în timpul pregătirii experienței, discul superior așezat pe bilă să rămînă fix, el se poate fixa cu un dispozitiv special de prindere.

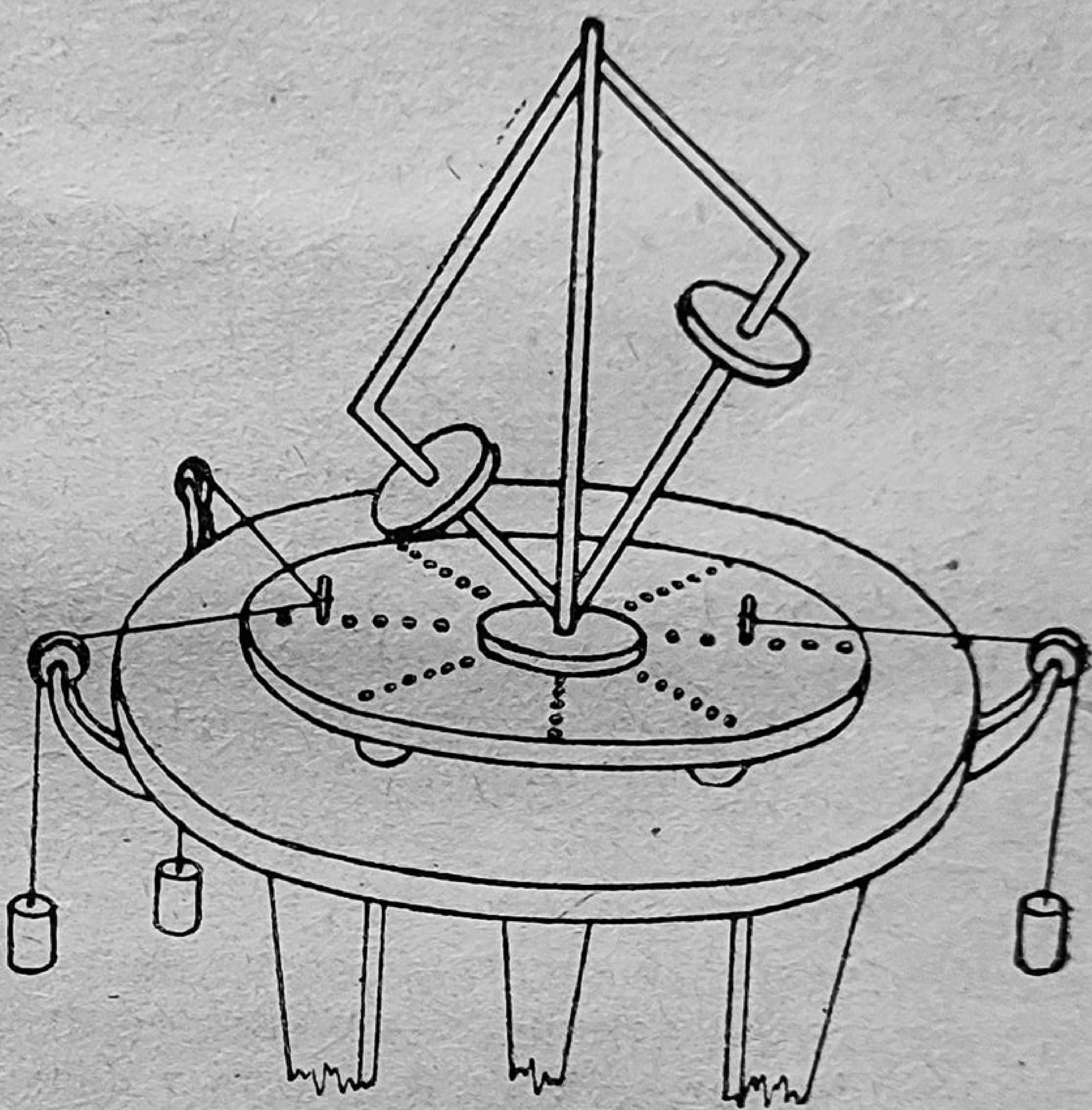


Fig. 84

Ca să ne convingem de echivalența cuplurilor cu momentele egale, vom introduce două știfturi A_1 și A_2 și vom suspenda cu ajutorul unor fire, perpendiculare pe dreapta A_1A_2 și dirijate în sens opus, două greutăți, de exemplu, de cîte 400 g fiecare. Vom obține un cuplu cu un moment de modul egal cu 400 A_1A_2. Vom introduce apoi alte două știfturi B_1 și B_2 astfel încît să avem, de exemplu, $B_1B_2=2A_1A_2$ și să fixăm de ele cu ajutorul unor fire perpendiculare pe dreapta B_1B_2 și dirijate în sens opus două greutăți de cîte 200 g, fiecare, astfel încît momentul celui de-al doilea cuplu să fie de sens contrar cu momentul primului cuplu; desigur, nu este necesar ca B_1B_2 să fie paralel cu A_1A_2. Vom vedea că prin aceasta discul superior rămîne fix.

Cu acest aparat se poate verifica experimental și teorema compunerii cuplurilor. Pentru verificarea experimentală a cazului compunerii cuplurilor, situate în plane secante, aparatul este prevăzut cu un dispozitiv avînd forma unui dreptunghi confecționat din bare metalice. Bara ce reprezintă diagonala dreptunghiului este dirijată pe verticală în sus cînd dispozitivul este fixat în centrul discului mobil. Pe două laturi perpendiculare ale acestui dreptunghi sînt fixate două discuri metalice egale ca diametru, perpendiculare pe aceste laturi. Cuplurile componente se obțin fixînd pe periferia acestor discuri metalice fire acționate de greutăți, momentele acestor cupluri componente fiind dirijate de-a lungul laturilor dreptunghiului. Vom putea alege greutățile ce acționează la capetele firelor astfel încît modulele acestor momente să fie proporționale cu laturile dreptunghiului. În acest caz momentul cuplului rezultant va fi dirijat după diagonala dreptunghiului și modulul lui va fi proporțional cu lungimea acestei diagonale. Este suficient ca la periferia discului orizontal fixat pe diagonală și avînd diametrul egal cu diametrele discurilor înclinate, să fixăm două fire acționate de greutăți, astfel ca să obținem un cuplu cu un moment egal ca modul și direcție și de sens contrar cu momentul cuplului rezultant, ca discul superior să rămînă în echilibru.

În cazul mutării cuplului printr-o mișcare de translație, se poate naște întrebarea cum pot fi echivalente cupluri situate în diferite locuri. În dinamică se va demonstra că în cazul cînd asupra unui solid acționează cupluri, centrul de greutate al solidului rămîne fix, iar solidul începe să se rotească în jurul centrului său de greutate, mișcarea nedepinzînd de poziția cuplurilor. Aceasta se poate verifica cu aparatul lui Tepler. Oriunde va acționa un cuplu pe discul superior, centrul discului superior va rămîne fix, iar discul va începe să se rotească în jurul centrului său de greutate care coincide cu centrul geometric; pentru toate cuplurile cu momente egale, mișcarea de rotație va fi asemănătoare, viteza variind în același mod.

§ 38. Exemple. 28. Se dau două puncte A_1 și A_2, avînd în raport cu un sistem de axe ortogonale $Oxyz$, coordonatele ($x_1=10$, $y_1=6$, $z_1=10$) și ($x_2=4$, $y_2=8$, $z_2=12$). In aceste puncte sînt aplicate două forțe $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ cu proiecțiile ($X_1=2$, $Y_1=3$, $Z_1=-4$) și ($X_2=-2$, $Y_2=-3$, $Z_2=4$). Să se studieze sistemul acestor două forțe și să se găsească momentul lor rezultant, în raport cu un punct oarecare. Deoarece proiecțiile forțelor sînt respectiv egale între ele în valoare absolută, dar de sens contrar, sistemul dat se reduce fie la un cuplu de forțe, fie la două forțe egale de sens contrar situate de-a lungul unei drepte; în ambele cazuri momentul rezultant

al acestui sistem de forțe este un vector liber. Deoarece cosinușii directori ai forței F_1, sînt proporționali cu $2:3:-4$ iar cosinușii directori ai segmentului A_1A_2 sînt proporționali cu diferența coordonatelor punctelor A_2 punctul A_1 adică să determinăm momentul forței F_2 în raport cu punctul A_1. și A_1, adică proporționali cu $-6:2:2$, rezultă că cele două forțe nu au același suport și prin urmare formează un cuplu. Să găsim momentul acestui cuplu în raport cu un punct oarecare, de exemplu în raport cu punctul A_1 adică să determinăm momentul forței $\bar{F}_2$ în raport cu punctul A_1. Aplicînd formulele (2.24) vom obține:

$$M_x=(8-6)\,4+(12-10)\,3=14,$$
$$M_y=-(12-10)\,2-(4-10)\,4=20,$$
$$M_z=-(4-10)\,3+(8-6)\,2=22.$$

Modulul momentului $\bar{M}$ al cuplului considerat va fi:

$$M=\sqrt{14^2+20^2+22^2}=\sqrt{1\,080}=32{,}863.$$

Deoarece modulul fiecărei forțe din cuplu este egal cu $\sqrt{2^2+3^2+4^2}=$ $=\sqrt{29}$ și modulul momentului cuplului este egal cu $\sqrt{29}\cdot d$, unde d este brațul cuplului, vom avea:

$$\sqrt{29}\cdot d=\sqrt{1\,080},$$

sau

$$d=\sqrt{\frac{1\,080}{29}}=\sqrt{37{,}241379}=6{,}103.$$

29. Se dau cinci forțe avînd modulele $F_1=4$, $F_2=6$, $F_3=2$, $F_4=7$, $F_5=3$, situate în planul Oxy, aplicate respectiv în punctele 0, 1, 2, 3, 4, ale axei Oy. Forțele sînt paralele cu axa Ox, $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_4$ fiind orientate în același sens cu axa Ox, iar $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ și $\bar{F}_5$ fiind orientate în sens invers axei Ox, la ce se reduce acest sistem de forțe paralele. Deoarece suma algebrică $F_1+F_2+F_3+F_4+F_5=4-6-2+7-3=0$, sistemul forțelor fie că se reduce la un cuplu, fie că se găsește în echilibru. Deoarece momentul rezultant al acestui sistem în raport cu punctul O este egal cu

$$6\cdot 1+2\cdot 2-7\cdot 3+3\cdot 4=1,$$

sistemul forțelor se reduce la un cuplu de moment egal în modul cu 1, vectorul moment fiind paralel și de același sens cu axa Oz.

30. Se dau trei cupluri cu momente, avînd direcții paralele cu direcțiile pozitive ale axelor sistemului ortogonal de coordonate $Oxyz$, și module egale respectiv cu 1, 2, 3. Să se găsească al patrulea cuplu $\bar{M}_4$, astfel încît sistemul celor patru cupluri să se echilibreze. Scriind condiția vectorială de echilibru, obținem:

$$\bar{M}_4+\bar{i}\cdot 1+\bar{j}\cdot 2+\bar{k}\cdot 3=0$$

sau

$$\bar{M}_4=-\bar{i}\cdot 1-\bar{j}\cdot 2-\bar{k}\cdot 3.$$

De aici găsim:

$$M_4=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}=3{,}742.$$

Momentul celui de-al patrulea cuplu este egal ca vector cu diagonala paralelipipedului dreptunghi construit în punctul O pe părțile negative ale axelor Ox, Oy și Oz, cu laturile respectiv egale cu 1, 2, 3.

CAPITOLUL IX

SISTEM DE FORȚE ÎN PLAN

§ 39. Reducerea unui sistem de forțe în plan la cel mai simplu sistem. Un sistem de forțe în plan este un sistem de forțe avînd toate forțele așezate în același plan. Acest caz al sistemului de forțe este foarte important, deoarece majoritatea aplicațiilor practice ale staticii se referă la probleme de forțe coplanare. Ne vom ocupa de reducerea unui sistem de forțe în plan aplicat unui solid la cel mai simplu sistem. Pentru aceasta vom demonstra în prealabil următoarea temă:

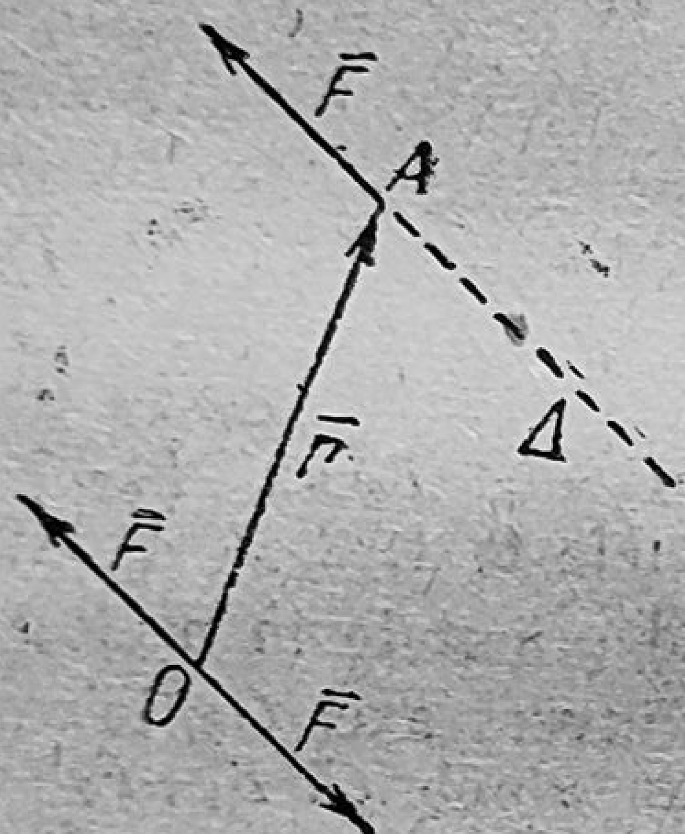


Fig. 85

Punctul de aplicație al oricărei forțe poate fi mutat în orice alt punct din spațiu, prin adăugarea unui cuplu suplimentar de moment egal cu momentul forței în raport cu acel punct.

Să presupunem că avem forța $\overline{F}$ aplicată într-un punct oarecare A al suportului ei Δ (fig. 85). Să considerăm un punct oarecare O din spațiu și să aplicăm în el două forțe, opuse, paralele cu forța $\overline{F}$ și egale în modul cu forța $\overline{F}$; acest lucru este posibil, deoarece forțele aplicate în punctul O se echilibrează între ele. Pe de altă parte însă, sistemul celor trei forțe obținute, se poate considera în felul următor: forța $\overline{F}$ din punctul A este mutată în punctul O și la ea se mai adaugă cuplul $(\overline{F}, -\overline{F})$ al cărui moment este egal cu momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O. Dacă vom nota $\overline{OA}=\overline{r}$, atunci momentul acestui cuplu suplimentar va fi egal cu produsul vectorial $\overline{r}\times\overline{F}$. Este evident că momentul cuplului suplimentar va fi egal cu zero, numai în cazul cînd punctul O este situat pe dreapta Δ; regăsim astfel proprietatea că într-un solid, forța este un vector alunecător.

Să examinăm acum un sistem arbitrar de forțe coplanare $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3, \ldots$, aplicate respectiv în punctele A_1, A_2, $A_3, \ldots$ ale solidului. Să alegem un punct oarecare O în acest plan și să-l

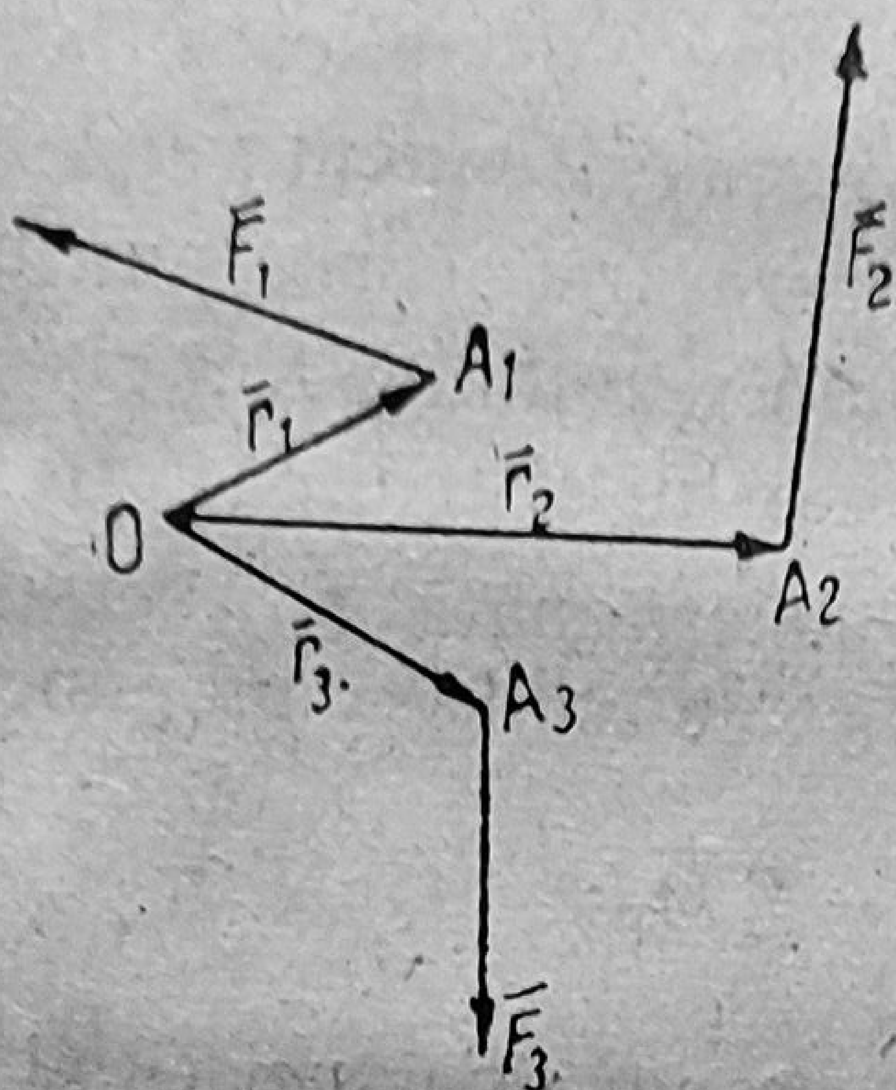


Fig. 86

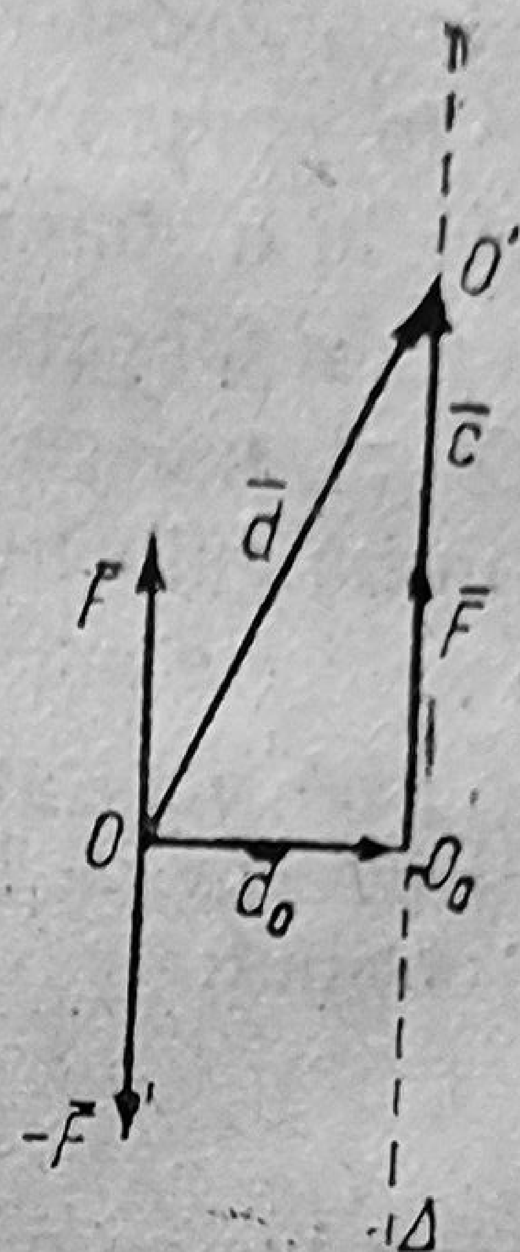


Fig. 87

denumim *punct de reducere* (fig. 86). Mutăm punctele de aplicație ale tuturor forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3, \ldots$, în punctul O, adăugînd cuplurile suplimentare avînd momentele $\overline{M}_1=\overline{r}_1\times\overline{F}_1$, $\overline{M}_2=\overline{r}_2\times\overline{F}_2$, $\overline{M}_3=\overline{r}_3\times\overline{F}_3, \ldots$, toți vectorii $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3, \ldots$, vor fi perpendiculari pe planul în care se află forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3, \ldots$ Forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3, \ldots$ aplicate în punctul O se pot compune și înlocui printr-o forță rezultantă $\overline{F}$ (§ 20).

$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\cdots=\sum_n \overline{F}_n.$$

Conform § 36, toate cuplurile se pot compune, adunînd geometric momentele lor (adunarea lor geometrică se reduce la cea algebrică); astfel vom obține un cuplu rezultant de moment

$$\overline{M}=\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3+\cdots=\sum_n \overline{M}_n.$$

Vom modifica forțele cuplului astfel încît modulul lor să devină egal cu F; în acest caz brațul cuplului va fi egal cu d_0, astfel încît $M=F\,d_0$. Vom roti apoi cuplul în planul său, în așa fel încît brațul său să devină perpendicular pe forța $\overline{F}$ aplicată în

punctul O și vom deplasa cuplul în planul său paralel cu el însuși, astfel ca forța $-\bar{F}$ a cuplului să ajungă în punctul O (fig. 87); fie în acest caz O_0 punctul de aplicație al forței $\bar{F}$ a cuplului, unde $\overline{OO_0}=\bar{d}_0$ și $\bar{d}_0 \perp \bar{F}$. Este evident că forțele $\bar{F}$ și $-\bar{F}$ aplicate în punctul O se echilibrează și întregul sistem de forțe se reduce la o singură forță rezultantă $\bar{F}$ aplicată în punctul O_0 iar punctul de aplicație al acestei forțe F îl putem muta în orice alt punct O' al suportului ei Δ, care trece prin punctul O_0. Dreapta Δ în lungul căreia este situată rezultanta F a sistemului de forțe, se numește *axa centrală* a acestui sistem de forțe.

Poziția axei centrale poate fi determinată și vectorial. In adevăr, presupunem că, luînd ca punct de reducere un punct oarecare O am obținut:

$$\bar{F}=\sum_n \bar{F}_n, \quad \bar{M}=\sum_n \bar{M}_n;$$

dacă însă vom lua ca punct de reducere un alt punct O' al planului în care sînt așezate forțele, vom obține:

$$\bar{F}=\sum_n \bar{F}_n, \quad \bar{M}'=\sum_n \bar{M}'_n.$$

Aplicînd formula (2.22) vom avea:

$$\bar{M}'_n=\bar{M}_n-\bar{d}\times\bar{F}_n,$$

unde $\bar{d}=\overline{OO'}$. De aici găsim:

$$\bar{M}'=\sum_n \bar{M}_n-\sum_n \bar{d}\times\bar{F}_n=\bar{M}-\bar{d}\times\sum_n \bar{F}_n,$$

sau

$$\bar{M}'=\bar{M}-\bar{d}\times\bar{F}.$$

Dacă vom alege vectorul $\bar{d}$ în așa fel încît să aibă loc egalitatea $\bar{M}'=0$, atunci punctul O' va fi un punct al axei centrale. Prin urmare, vectorul $\bar{d}$ se determină din ecuația:

$$\bar{d}\times\bar{F}=\bar{M}, \tag{9.1}$$

a cărei rezolvare este asemănătoare cu o împărțire, deoarece pe baza produsului vectorial dat $\bar{M}$ și a unui factor $\bar{F}$ se cere să se găsească al doilea factor $\bar{d}$. Spre deosebire de ecuațiile scalare,

ecuația vectorială considerată admite o infinitate de soluții. În adevăr, fie $\overline{d}_0$ una din soluții determinată de exemplu prin condițiile $d_0 F = M$ și $\overline{d}_0 \perp \overline{F}$; atunci ecuația va fi verificată și de soluția $\overline{d} = \overline{d}_0 + \overline{c}$, unde c este un vector arbitrar paralel cu $\overline{F}$ (fig. 87).

Efectuînd produsul vectorial între vectorii $\overline{d}_0 + \overline{c}$ și F și ținînd seamă că vectorii c și $\overline{F}$ sînt paraleli, adică $\overline{c} \times \overline{F} = 0$, vom obține:

$$(\overline{d}_0 + \overline{c}) \times \overline{F} = \overline{d}_0 \times \overline{F} + \overline{c} \times \overline{F} = \overline{d}_0 \times \overline{F} = \overline{M}.$$

Dar așa cum se vede din fig. 87, vectorul $\overline{d}_0$ determină punctul O_0 și vectorul $\overline{d} = \overline{d}_0 + \overline{c}$ determină un punct arbitrar O' al axei centrale, adică găsim poziția axei centrale.

Dacă, mutînd toate forțele într-un punct oarecare de reducere vom obține

$$\overline{F} = \sum_n \overline{F}_n = 0,$$

atunci trebuie să avem $\overline{M}' = \overline{M}$ și sistemul de forțe considerat se reduce la un cuplu. În sfîrșit, dacă avem $F = 0$ și $\overline{M} = 0$, nu va exista nici rezultantă, nici cuplu, adică sistemul considerat de forțe este în echilibru. Astfel:

Un sistem de forțe în plan este fie echivalent cu o rezultantă situată de-a lungul axei centrale a sistemului, fie cu un cuplu, fie că este în echilibru.

Aceste rezultate obținute prin metoda geometrică-vectorială desigur că pot avea și o reprezentare analitică. Pentru aceasta considerăm în planul forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ..., un sistem de coordonate ortogonale Oxy. Alegem ca punct de reducere originea O a coordonatelor. Notăm proiecțiile forțelor pe axele de coordonate, prin

$$\overline{F}_1(X_1, Y_1), \quad \overline{F}_2(X_2, Y_2), \quad F_3(X_3, Y_3), \ldots,$$

iar coordonatele punctelor lor de aplicație A_1, A_2, A_3, ... respectiv prin

$$A_1(x_1, y_1), \quad A_2(x_2, y_2) \quad A_3(x_3, y_3), \ldots$$

Deoarece toate forțele sînt așezate în planul Oxy, momentele lor în raport cu axele Ox și Oy sînt identic egale cu zero și rămîn numai momentele în raport cu axa Oz, adică:

$$M_{1z} = x_1 Y_1 - y_1 X_1, \quad M_{2z} = x_2 Y_2 - y_2 X_2, \quad M_{3z} = x_3 Y_3 - y_3 X_3, \ldots$$

Notînd prin X, Y proiecțiile rezultantei $\overline{F}$ și prin M_z proiecția pe axa Oz a momentului rezultant $\overline{M}$, vom obține pentru punctul O:

$$X=\sum_n X_n,\ Y=\sum_n Y_n,\ M_z=\sum_n M_{nz}=\sum_n (x_n Y_n - y_n X_n). \qquad (9.2)$$

Luăm acum ca punct de reducere un alt punct oarecare O' cu coordonatele (x', y'). Pentru punctul O' forța $\overline{F}$ va rămîne aceeași, dar momentul rezultant nu va mai fi $\overline{M}$ și se va schimba în $\overline{M}'$, care conform formulei (2.25) va fi:

$$M'_z=\sum_n M'_{nz}=\sum_n M_{nz}-\sum_n (x'Y_n-y'X_n),$$

sau

$$M'_z=M_z-(x'\sum_n Y_n-y'\sum_n X_n),$$

adică:

$$M'_z=M_z-(x'Y-y'X).$$

Punînd punctului O' condiția $\overline{M}'=0$ adică $M'_z=0$, vom avea:

$$x'Y-y'X=M_z. \qquad (9.3)$$

Vedem că locul geometric al punctelor O' este dreapta reprezentată prin ecuația (9.3), ceea ce este cunoscut din studiile geometrico-vectoriale precedente, astfel ecuația (9.3) în care x' și y' sînt coordonatele curente, este ecuația axei centrale a sistemului. Mărimile X, Y și M_z în formula (9.3) sînt determinate prin formulele (9.2). Prin urmare, la rezolvarea problemei reducerii unui sistem de forțe în plan prin metoda analitică, trebuie mai întîi să se determine mărimile X, Y și M_z după formulele (9.2) și apoi pe baza formulei (9.3) se poate scrie ecuația axei centrale. Rezultanta al cărei modul este $F=\sqrt{X^2+Y^2}$ va fi situată în lungul axei centrale. Dacă avem $X=0$, $Y=0$ și $M_z\neq 0$, atunci nu există rezultantă și sistemul se reduce la un cuplu situat în planul Oxy cu momentul în raport cu axa Oz, egal cu M_z. Dacă însă $X=0$, $Y=0$, și $M_z=0$, sistemul de forțe este în echilibru.

§ 40. Echilibrul unui sistem de forțe în plan. Din cele expuse în paragraful precedent, rezultă că pentru echilibrul unui sistem

de forțe situat într-un plan oarecare π trebuie să se satisfacă două ecuații vectoriale:

$$\overline{F}=\sum_n \overline{F}_n=0, \quad \overline{M}=\sum_n \overline{M}_n=0, \tag{9,4}$$

unde vectorul $\overline{F}$ este situat în planul π și vectorul $\overline{M}$ este perpendicular pe planul π așa că $\overline{M} \perp \overline{F}$. Aceste două ecuații vectoriale se pot reduce la trei ecuații scalare luînd planul π drept planul Oxy:

$$\left.\begin{aligned} X=\sum_n X_n=0, \quad Y=\sum_n Y_n=0, \\ M_z=\sum_n M_{nz}=\sum_n (x_n Y_n - y_n X_n)=0. \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Este evident că acest rezultat se poate generaliza luînd ca punct de reducere nu originea O a coordonatelor, ci un punct oarecare al planului Oxy și ca direcții de proiectare, orice direcții neparalele situate în acest plan.

Să dăm acum alte metode de alcătuire a ecuațiilor de echilibru. Deoarece, conform rezultatelor paragrafului precedent, sistemul plan de forțe se reduce fie la o rezultantă, fie la un cuplu, fie se echilibrează, rezultă că dacă momentul rezultant în raport cu un punct oarecare O_1 al planului va fi egal cu zero:

$$M_{O_1}=0,$$

sistemul de forțe nu se poate reduce la un cuplu și deci fie se echilibrează, fie se reduce la o rezultantă care trece prin punctul O_1. Dacă momentul rezultant al aceluiași sistem de forțe, în plan în raport cu un alt punct oarecare O_2 este de asemenea egal cu zero:

$$M_{O_2}=0,$$

atunci sistemul de forțe fie se echilibrează, fie se reduce la o rezultantă care trece prin punctul O_2. Astfel, în cazul cînd avem relațiile $M_{O_1}=0$ și $M_{O_2}=0$, toate forțele fie se reduc la o rezultantă care trece prin punctele O_1 și O_2, fie se echilibrează. Dacă suma proiecțiilor tuturor forțelor pe o direcție neperpendiculară pe dreapta O_1O_2 este egală cu zero, este evident că nu există rezultantă și că sistemul de forțe se găsește în echilibru. În sfîrșit, să presupunem că momentele rezultante ale sistemului de forțe în raport cu trei puncte necoliniare O_1, O_2, O_3 din planul forțelor, sînt egale cu zero:

$$M_{O_1}=0, \; M_{O_2}=0, \; M_{O_3}=0;$$

deoarece rezultanta nu poate să treacă prin trei puncte necoliniare, rezultă că nu există rezultantă și sistemul de forțe este în echilibru. Astfel, obținem trei moduri de alcătuire a ecuațiilor de echilibru ale unui sistem de forțe în plan aplicat unui solid și anume, pentru ca sistemul de forțe în plan să fie în echilibru, este necesar și suficient ca:

1. *Sumele proiecțiilor tuturor forțelor pe două direcții neparalele și momentul rezultant al tuturor forțelor în raport cu un punct oarecare din plan să fie egale cu zero.*

2. *Momentele rezultante ale tuturor forțelor în raport cu două puncte oarecare din plan și suma proiecțiilor tuturor forțelor pe o direcție neperpendiculară pe dreapta care unește aceste două puncte, să fie egale cu zero.*

3. *Momentele rezultante ale tuturor forțelor în raport cu trei puncte oarecare din plan, care nu sînt situate pe aceeași dreaptă, să fie egale cu zero.*

Dacă sistemul de forțe în plan, este format din forțe paralele, atunci problema alcătuirii ecuațiilor de echilibru se simplifică și vom deduce ușor că, pentru echilibrul sistemului plan de forțe paralele, este necesar și suficient ca:

1. *Suma proiecțiilor tuturor forțelor pe o direcție neperpendiculară pe direcția forțelor și momentul rezultant al tuturor forțelor în raport cu un punct oarecare din plan, să fie egale cu zero.*

2. *Momentele rezultante ale tuturor forțelor în raport cu două puncte din plan care nu sînt situate pe o dreaptă paralelă cu forțele, să fie egale cu zero.*

Cu ultima condiție ne-am întîlnit cu ocazia examinării exemplului 24.

O b s e r v a ț i e. În exemplul 10 am văzut că pentru eliminarea din ecuația de echilibru a reacțiunii cunoscute ca direcție, este suficient să egalăm cu zero suma proiecțiilor forțelor pe o axă perpendiculară pe direcția reacțiunii. Trebuie subliniat că utilizarea calculului momentelor reprezintă un procedeu mai eficace pentru eliminarea reacțiunilor decît proiectarea forțelor pe o axă. În adevăr, dacă o reacțiune oarecare $\overline{R}$ aplicată în punctul A nu este cunoscută ca direcție, atunci luînd momentele forțelor în raport cu punctul A, vom elimina această reacțiune $\overline{R}$ din ecuația de echilibru, în timp ce din cauza necunoașterii direcției reacțiunii, metoda proiectării forțelor pe o axă este inaplicabilă aici. Dacă în problemă avem două reacțiuni $\overline{R}_1$ și $\overline{R}_2$, avînd punctul de

concurenţă A, atunci luînd momentele forţelor în raport cu punctul A eliminăm aceste două reacţiuni, în timp ce metoda proiectării, evident, este şi în acest caz inaplicabilă.

§ 41. Moment de stabilitate şi moment de răsturnare. Să considerăm un solid rigid greu, de greutate $\overline{P}$, şi să presupunem că asupra lui acţionează forţa $\overline{Q}$, care tinde să rotească solidul în

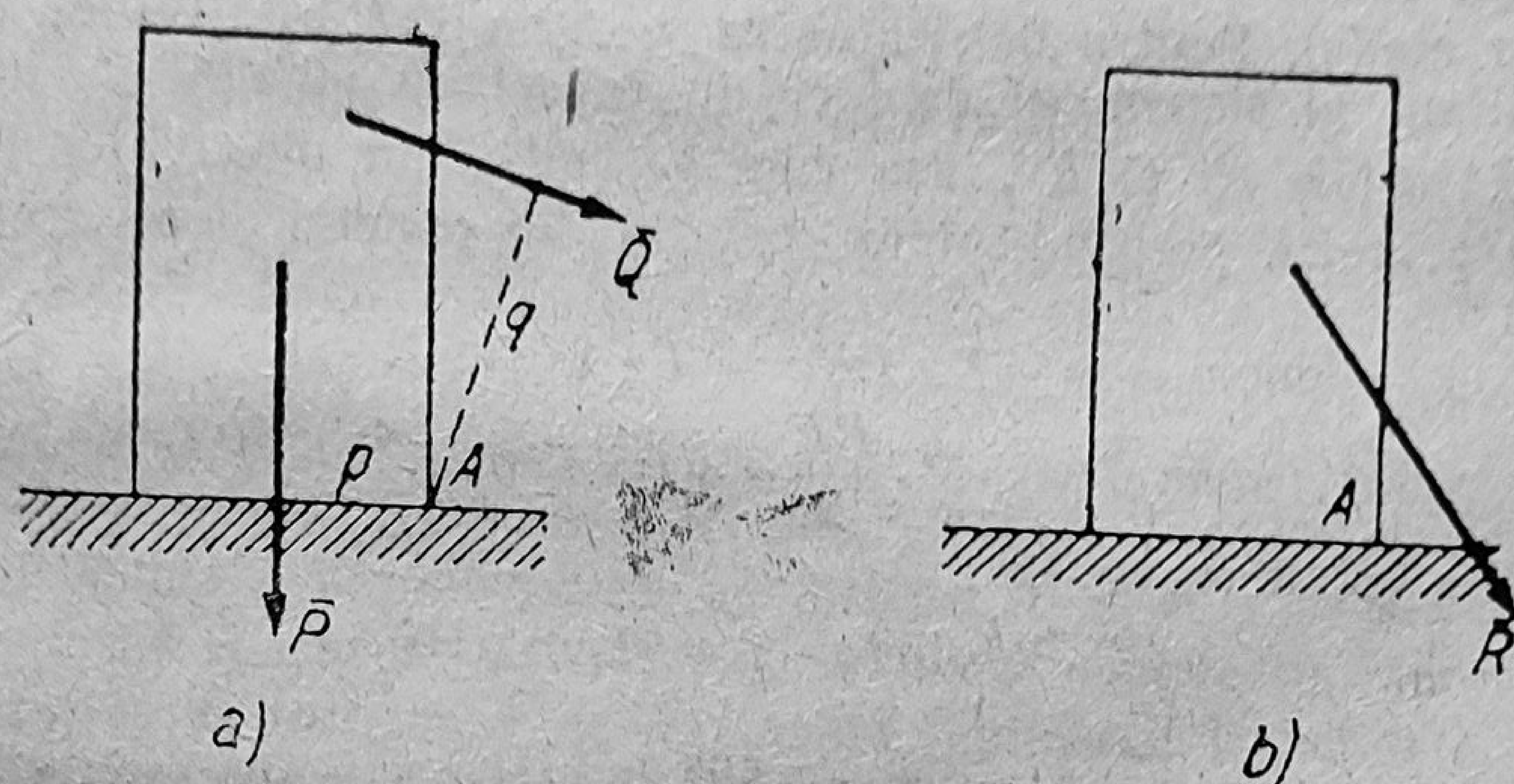


Fig. 88

jurul muchiei A (fig. 88, a). Să presupunem de asemenea, ceea ce are loc în majoritatea aplicaţiilor că $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$ sînt situate în acelaşi plan. Atunci forţele $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$ sînt concurente şi vom găsi rezultanta lor după regula paralelogramului. Dacă direcţia rezultantei va trece la stînga punctului A, atunci corpul va fi în echilibru şi acest echilibru va fi stabil. Dacă însă direcţia rezultantei va trece la dreapta punctului A, echilibrul este imposibil (fig. 88, b). Considerînd, aşa cum s-a adoptat în general în acest curs momentul unei forţe în raport cu punctul A pozitiv cînd tinde să rotească corpul în jurul punctului A în sens contrar acelor unui ceasornic, tragem concluzia că în primul caz momentul rezultantei va fi pozitiv, iar în al doilea caz negativ. Pe baza teoremei lui Varignon, pentru forţe concurente, momentul rezultantei este egal cu: $-Qq+Pp$; prin urmare, pentru stabilitatea echilibrului, trebuie să avem:

$$-Qq+Pp>0,$$

sau

$$Pp>Qq.$$

Produsul Pp se numeşte *moment de stabilitate*, iar produsul Qq *moment de răsturnare*. Deci, pentru stabilitatea echilibrului este necesar ca *momentul de stabilitate* să fie mai mare decît *momentul de răsturnare*.

§ 42. Exemple. 31. O bară omogenă grea AB, de greutate P, se reazemă fără frecare cu extremitățile ei A și B respectiv pe o pardoseală orizontală Ox și pe un perete vertical Oy (fig. 89). În punctul D este legat de bară firul OD. Se dă $BC=AC=l$, $\sphericalangle BAO=\alpha$, $\sphericalangle AOD=\beta$; să se găsească tensiunea T din fir. Deoarece bara, afară de fir mai este supusă și la alte legături fiind rezemată pe pardoseala Ox și pe peretele Oy, putem considera bara liberă sub acțiunea a patru forțe: $\overline{P}$, $\overline{T}$, $\overline{R}'$ și $\overline{R}''$, dintre care forța $\overline{P}$ este dată, iar reacțiunile $\overline{T}$, $\overline{R}'$ și $\overline{R}''$ sînt cunoscute ca direcție dar necunoscute ca modul. Pentru determinarea reacțiunii $\overline{T}$, egalăm cu zero momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu punctul E, în care se intersectează forțele $\overline{R}'$ și $\overline{R}''$, așa cum se indică în observația din § 40.

Notînd prin EK perpendiculara coborîtă din punctul E pe dreapta OD, vom obține:

$$\text{mom}_E\overline{T}=-T\cdot EK=-T\cdot 2l\sin(\alpha-\beta),$$

$$\text{mom}_E\overline{P}=+P\cdot\frac{BE}{2}=+P\cdot l\cos\alpha,$$

și ecuația din echilibru va fi:

$$-T\cdot 2l\sin(\alpha-\beta)+Pl\cos\alpha=0,$$

de unde

$$T=\frac{1}{2}P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Atît timp cît D este situat mai jos decît C, avem $\beta>\alpha$ și soluția este posibilă. Dacă punctul D coincide cu punctul C, atunci $\beta=\alpha$ și T va avea o valoare infinită; în acest caz dacă bara AB alunecă pe pereții Ox și Oy, punctul C va descrie un cerc cu centrul în punctul O, firul nu se va întinde și nu va putea susține bara, decît dacă tensiunea din fir ar tinde către infinit, ca limită a tensiunilor extrem de mari care apar în fir cînd β este mai mic dar foarte apropiat de α. În sfîrșit, dacă punctul D va fi situat mai sus decît punctul C, atunci vom avea $\alpha<\beta$ și pentru T vom obține o valoare negativă. Aceasta arată că forța nu va fi dirijată către punctul O, ci dinspre punctul O: firul este comprimat și pentru a împiedica alunecarea barei AB, trebuie să se înlocuiască firul OD cu o bară rigidă. Pentru

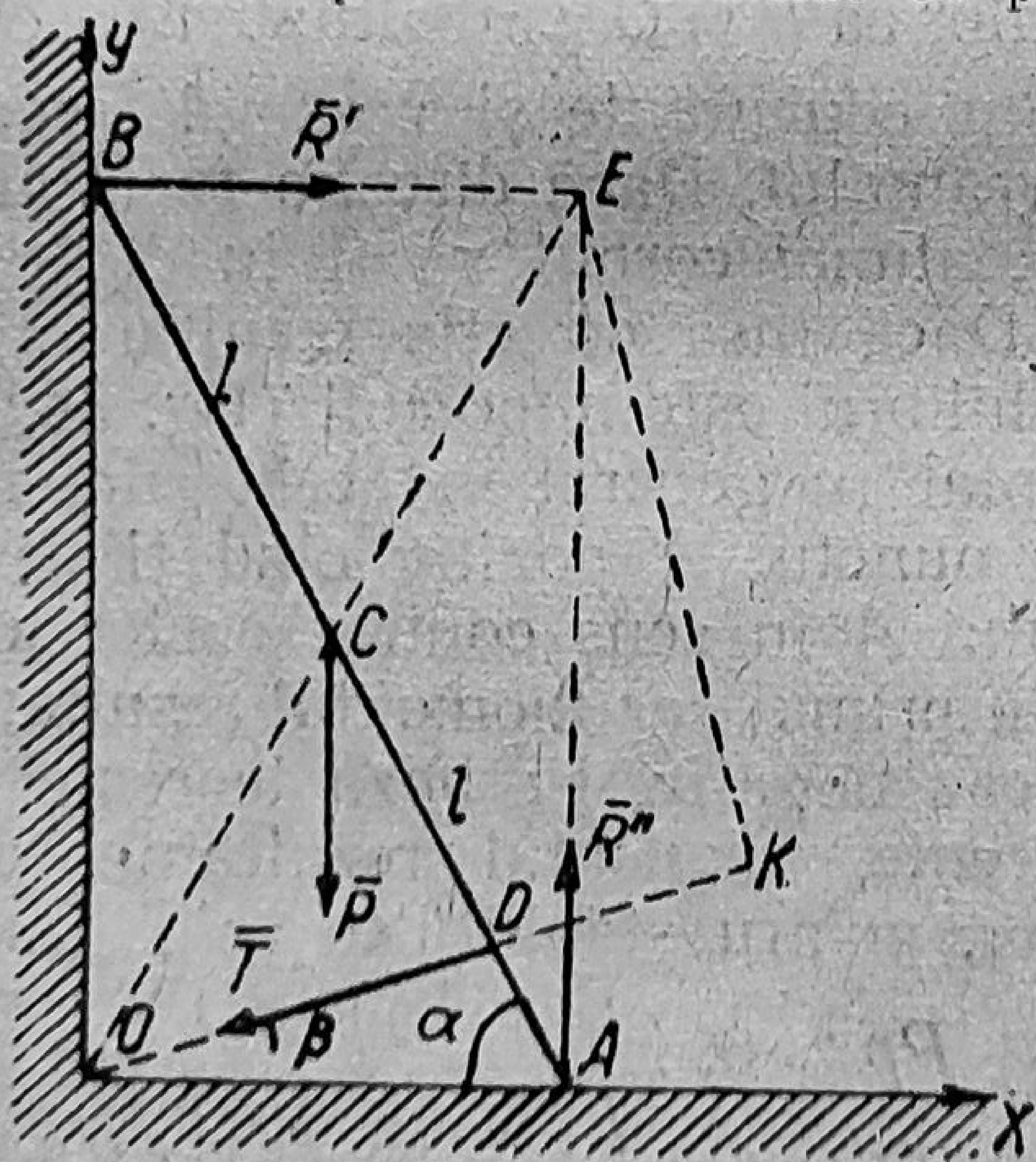


Fig. 89

determinarea reacțiunilor $\overline{R}'$ și $\overline{R}''$, se pot folosi ecuațiile de proiecții pe axele Ox și Oy, deoarece forța $\overline{T}$ este determinată, iar forțele $\overline{R}'$ și $\overline{R}''$

sînt respectiv perpendiculare pe axele Ox și Oy. Proiectînd forțele pe axa Ox obținem:

$$R' - T\cos\beta = 0,$$

sau

$$R' - T\cos\beta = \frac{1}{2} P \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Proiectînd forțele pe axa Oy, vom avea:

$$R'' - P - T\sin\beta = 0,$$

sau

$$R'' = P + \frac{1}{2} P \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Vedem că dintre cele trei metode de formare a ecuației de echilibru, arătate în paragraful precedent, am folosit aici prima metodă. Dacă s-ar cere să se determine numai reacțiunea $\bar{R}'$, ar fi suficient să se ia momentele în raport cu punctul de intersecție al forțelor $\bar{T}$ și $\bar{R}''$; pentru determinarea numai a forței $\bar{R}''$ ar fi suficient să se ia momentele în raport cu punctul de intersecție al forțelor $\bar{T}$ și $\bar{R}'$. Astfel, aplicarea la această problemă a metodei a treia luînd momentele forțelor față de punctele de intersecție ale reacțiunilor $\bar{R}'$ și $\bar{R}''$, $\bar{T}$ și $\bar{R}''$, $\bar{T}$ și $\bar{R}'$ ne permite să izolăm reacțiunile necunoscute, fără a obține totuși nici o simplificare substanțială, doarece și prin primul procedeu, astfel cum l-am prezentat aici, reacțiunile $\bar{T}$, $\bar{R}'$ și $\bar{R}''$ au fost izolate în ecuațiile de echilibru. In această problemă poziția de echilibru era dată și deci nu au existat condiții de echilibru pentru determinarea ei.

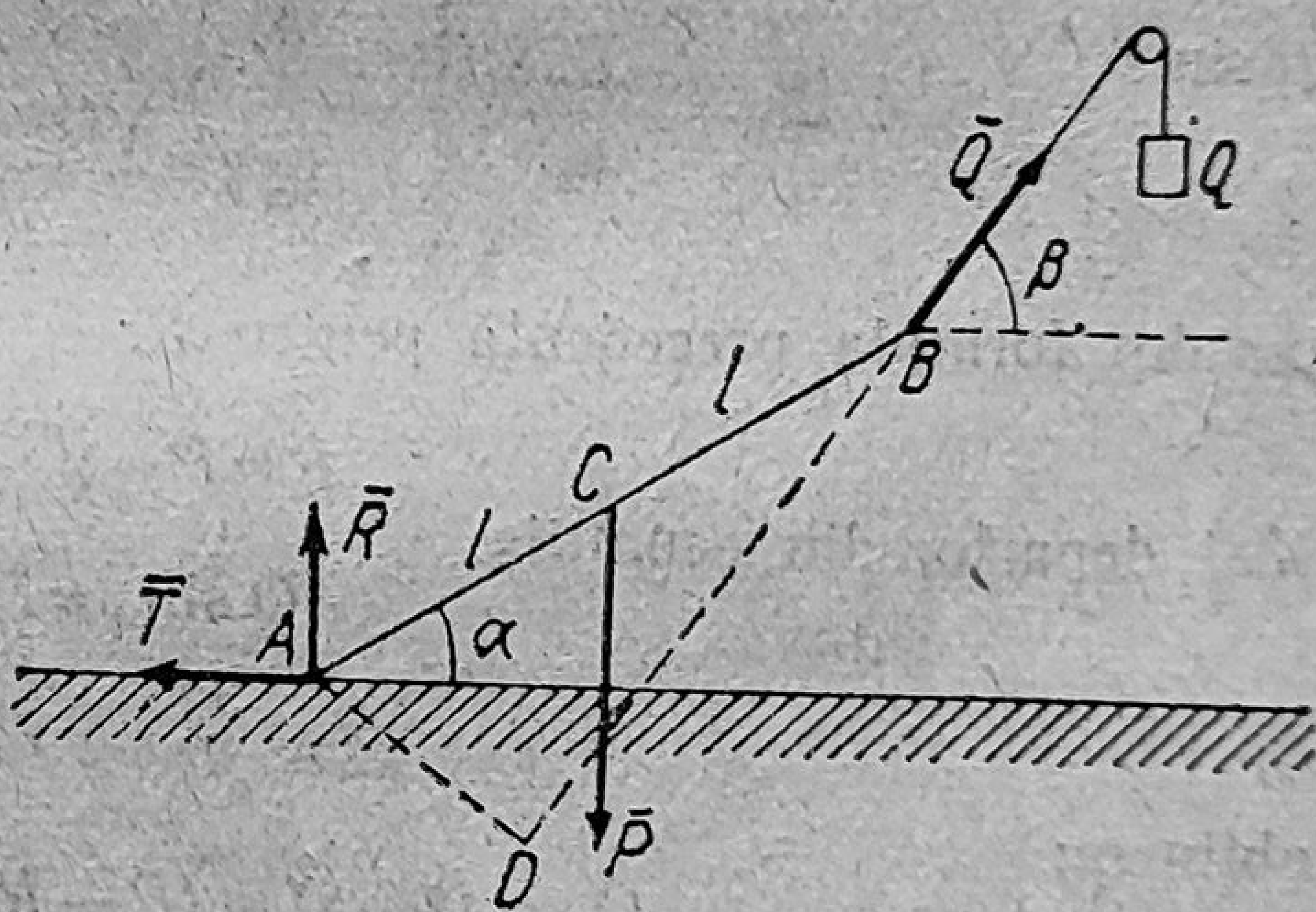


Fig. 90

32. O bară omogenă AB de lungime $2\,l$ și greutate P, se reazemă fără frecare cu capătul A pe o pardoseală orizontală; bara formează unghiul α cu pardoseala. Știind că asupra capătului A al barei acționează forța orizontală $\bar{T}$ și că de capătul B al ei este legat un fir care face unghiul β cu orizontala și este trecut printr-un scripete, la capătul firului fiind legată sarcina Q, se cere să se găsească condițiile de echilibru.

Deoarece capătul A al barei se reazemă fără frecare pe pardoseală, reacțiunea $\bar{R}$ a pardoselii trebuie să fie normală la pardoseală (fig. 90). Să aplicăm la această problemă primul procedeu, luînd sumele proiecțiilor forțelor pe orizontală și pe verticală, și momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu punctul A; atunci vom obține două ecuații care nu

conțin forța $\overline{R}$, adică condițiile de echilibru și o altă ecuație care conține forța $\overline{R}$ din care vom determina această reacțiune. Deoarece

$$\text{mom}_A \overline{P} = -P \cdot l \cos \alpha,$$

$$\text{mom}_A \overline{Q} = +Q \cdot AD = +Q \cdot 2l \sin(\beta - \alpha),$$

vom avea:

$$-T + Q \cos \beta = 0,$$

$$-P + Q \sin \beta + R = 0,$$

$$-Pl \cos \alpha + Q \cdot 2l \sin(\beta - \alpha) = 0.$$

De aici găsim condițiile de echilibru:

$$2Q \sin(\beta - \alpha) - P \cos \alpha = 0,$$

$$Q \cos \beta - T = 0$$

și reacțiunea

$$R = P - Q \sin \beta.$$

Aceste ecuații pot căpăta o formă puțin modificată. Anume, din ecuația

$$\cos \beta = \frac{T}{Q}$$

găsim:

$$\text{tg}\, \beta = \frac{\sqrt{Q^2 - T^2}}{T}$$

iar din formula precedentă pentru R:

$$R = P - \sqrt{Q^2 - T^2}.$$

Mai departe, din ecuațiile:

$$Q \sin \beta = P - R,$$

$$Q \cos \beta = T$$

obținem:

$$Q \sin(\beta - \alpha) = (P - R) \cos \alpha - T \sin \alpha.$$

De aceea, prima condiție de echilibru poate căpăta forma

$$2(P - R) \cos \alpha - 2T \sin \alpha - P \cos \alpha = 0,$$

sau

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{P - 2R}{2T} = \frac{P - 2P + 2\sqrt{Q^2 - T^2}}{2T}.$$

De aici găsim:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{\sqrt{Q^2 - T^2}}{T} - \frac{P}{2T},$$

adică

$$\text{tg}\, \alpha = \text{tg}\, \beta - \frac{P}{2T}.$$

Prin urmare, reacţiunea va avea expresia

$$R = P - \sqrt{Q^2 - T^2}$$

şi condiţiile de echilibru vor fi de forma

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{Q^2 - T^2}}{T},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta - \frac{P}{2T}.$$

Vedem că totdeauna trebuie să fie $Q > T$ şi unghiul α tinde către unghiul β, dacă fie P tinde către zero, fie T tinde către infinit, fie au loc ambele cazuri.

33. Să se determine greutatea P a fundaţiei unei macarale, dacă greutatea proprie a macaralei este egală cu Q şi greutatea încărcăturii de ridicat este egală cu R. Vom simplifica problema neglijînd împingerea pămîntului asupra suprafeţelor laterale ale fundaţiei macaralei, ţinînd seamă doar de greutăţile părţilor componente ale macaralei (fig. 91). In această problemă momentul de stabilitate este egal cu Pa, iar momentul de răsturnare este egal cu $Qb+Bc$.

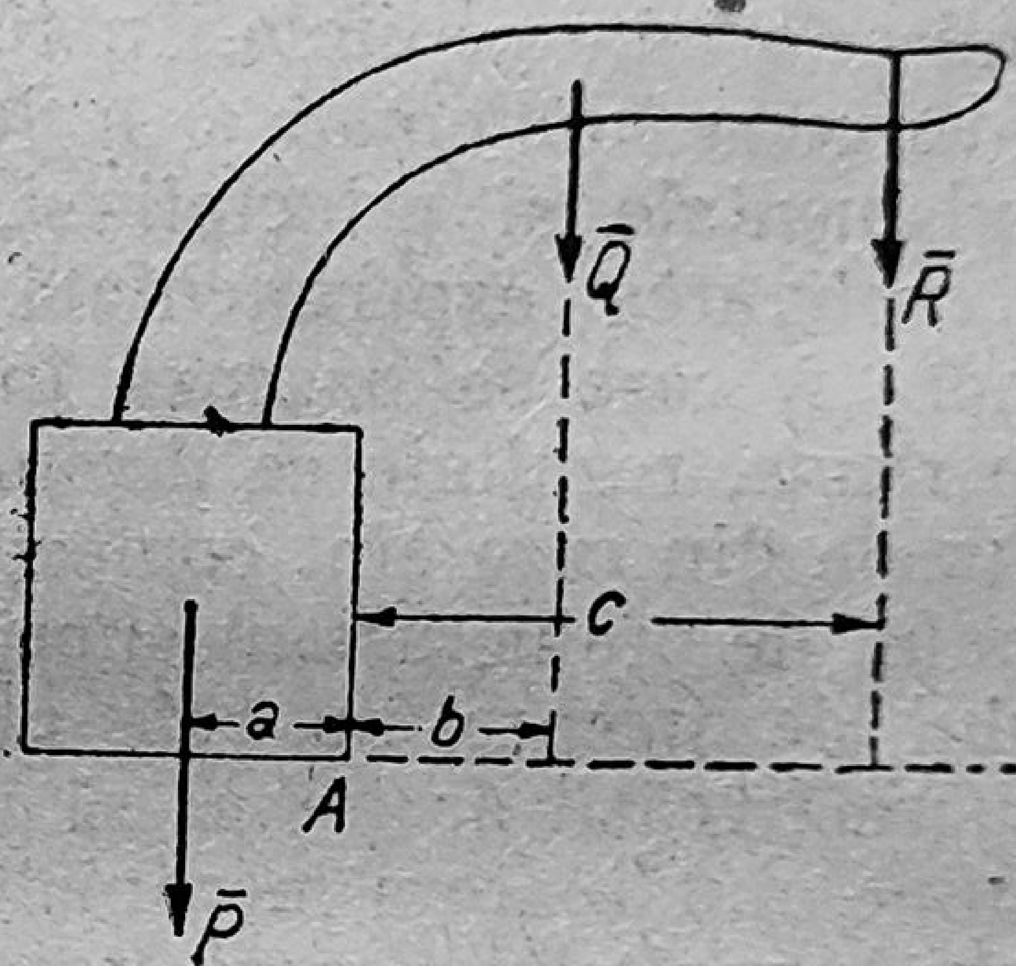


Fig. 91

De obicei ni se dă numărul n care reprezintă de cîte ori trebuie să fie mai mare momentul de stabilitate decît momentul de răsturnare, încît să fim asiguraţi şi în situaţii excepţionale. Astfel, vom obţine:

$$Pa = n(Qb + Rc),$$

şi de aici găsim greutatea necesară a fundaţiei:

$$P = n\frac{Qb + Rc}{a}.$$

CAPITOLUL X

FRECAREA

§ 43. Frecarea de aderență și frecarea de alunecare. Conținutul acestui capitol prin caracterul său diferă mult de conținutul celorlalte capitole. În timp ce mecanica teoretică reprezintă o deducere matematică a teoremelor dintr-o serie de axiome fundamentale și principii și, din această cauză nu are nevoie de motivarea experimentală a rezultatelor obținute, capitolul despre frecare se bazează în întregime pe rezultatele a diferite experiențe, rezultate ce depind de condițiile experiențelor, de materialele din care sînt confecționate corpurile care se freacă și de stadiul de prelucrare al suprafețelor lor ; însăși apariția fenomenului de frecare nu este perfect clarificată. Astfel, un studiu asupra frecării ar trebui să intre mai curînd în cadrul unei discipline ajutătoare a mecanicii, decît în cadrul mecanicii teoretice. Totuși, capitolul despre frecare se introduce de obicei în cursul de mecanică teoretică, deoarece în multe aplicații practice ale mecanicii teoretice dacă nu se ține seamă de frecare, rezultatele obținute nu corespund cu realitatea.

Pentru că între două corpuri materiale să se producă frecarea, este necesar ca aceste corpuri să se atingă între ele. Dacă acțiunea frecării constă în faptul că ea împiedică mișcarea unui corp material în raport cu altul, atunci acea frecare se numește *frecare de aderență;* dacă însă acțiunea frecării constă în faptul că ea încetinește mișcarea unui corp material în raport cu un altul, atunci frecarea se numește *frecare de alunecare.*

Să presupunem că un corp material oarecare este așezat pe suprafața unui alt corp oarecare. Dacă nu ar apare nici o forță de frecare de aderență, atunci orice forță paralelă cu suprafața de contact aplicată corpul l-ar pune în mișcare. Totuși, experiența ne dovedește că aceasta nu se întîmplă.

Să examinăm acum următoarea experiență. Pe o masă orizontală stă un corp greu, a cărui greutate este egală cu P (fig. 92). Este evident că reacțiunea normală $\overline{R}_n$ a mesei va fi

egală în modul cu P și anume $R_n = P$. Pentru a micșora momentul de răsturnare, să legăm de punctul A, situat în apropierea suprafeței de bază un fir și să-l trecem peste un scripete. Dacă de fir vom agăța o greutate mică F, se poate întîmpla ca corpul de pe masă să rămînă în echilibru și să nu alunece pe masă. Aceasta arată că între particulele mesei și ale corpului au intervenit unele forțe care dau o rezultantă $\overline{R}_t$, dirijată în lungul mesei, în sens contrar cu forța de tracțiune produsă de greutatea F și care echilibrează această forță. Forța $\overline{R}_t$ se numește *forță de frecare de aderență*. Vedem că în cazul cînd există aderență, reacțiunea are o componentă normală $\overline{R}_n$ și o componentă tangențială $\overline{R}_t$. Compunîndu-le după regula adunării geometrice, vom obține reacțiunea care formează cu normala la suprafață unghiul φ numit *unghi de frecare*. Este evident că

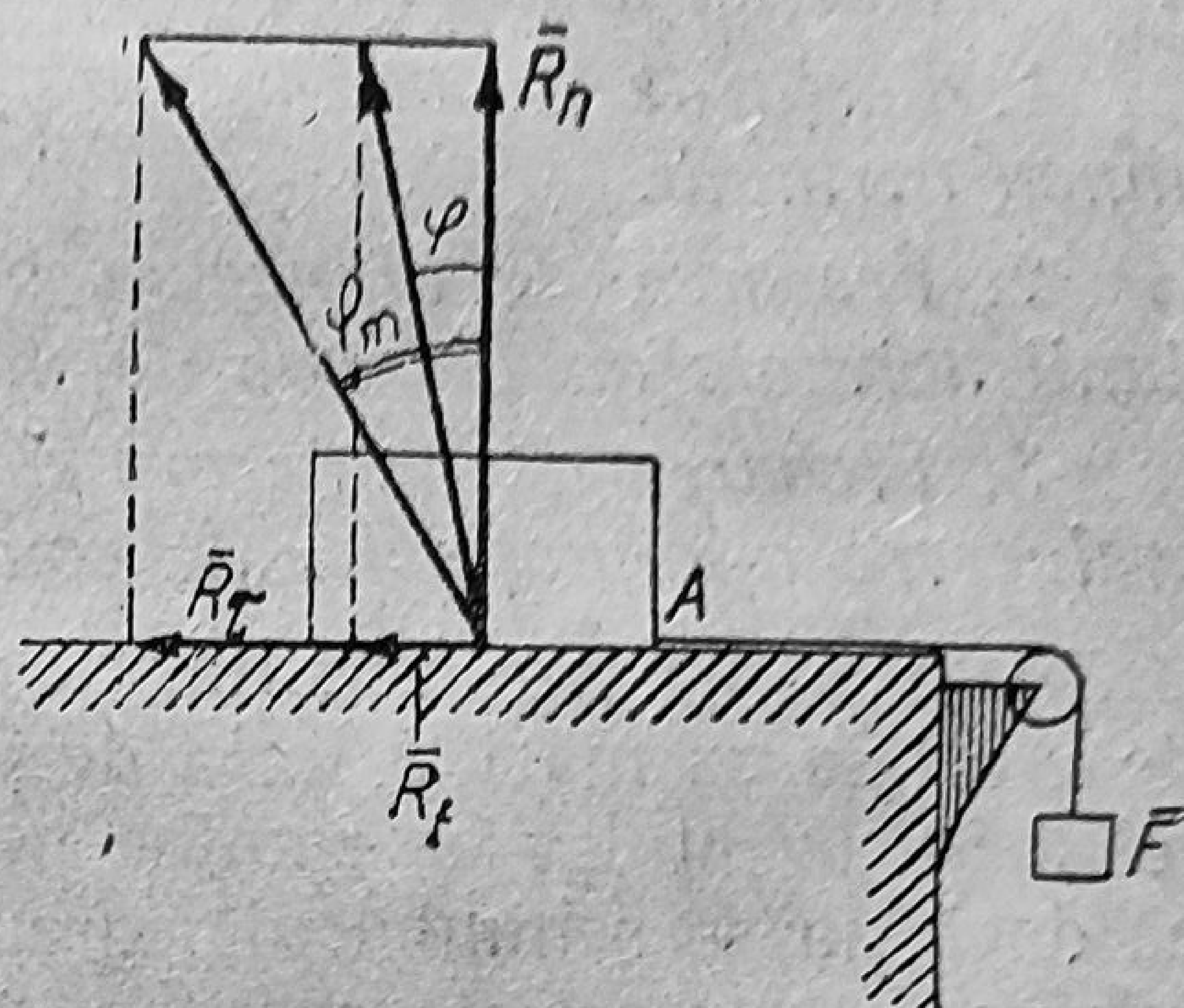


Fig. 92

$$R_t = R_n \operatorname{tg} \varphi. \tag{10.1}$$

Mărim greutatea F. Forța de aderență se va mări de asemenea dar pînă la o limită oarecare. Să presupunem că valoarea limită a sarcinii și deci și a forței de aderență va fi R_τ, adică mărirea ulterioară a greutății F, va provoca alunecarea pe masă a corpului. În acest caz vom obține:

$$R_\tau = R_n \operatorname{tg} \varphi_m, \tag{10.2}$$

unde φ_m este unghiul limită dintre reacțiune și normala la suprafață. Forța R_τ se numește *forță de frecare de alunecare* și unghiul φ_m — *unghi limită de frecare*, sau, obișnuit, *unghi de frecare*. Practic unghiul φ_m este mic; astfel, pentru metalele uscate în frecare, el este circa 10°. Esența frecării de alunecare nu este complet clarificată nici pînă în prezent; în orice caz, se știe că ea constituie un fenomen fizico-mecanic foarte complicat. În ceea ce privește legile frecării, atît în cazul mișcării, cît și în cazul repausului, se stabilesc empiric pentru fiecare pereche de

suprafețe aflate în frecare în funcție de condițiile de frecare. Dar dacă nu se cere o precizie prea mare se pot folosi legi aproximative pentru frecarea de alunecare, stabilite încă la sfîrșitul secolului al XVIII-lea în baza experiențelor efectuate cu aparatul reprezentat în fig. 92. Aceste legi sînt următoarele:

1. *Forța de frecare de alunecare este proporțională cu reacțiunea normală.*

2. *Frecarea de alunecare în cazul unei valori date a reacțiunii normale nu depinde de mărimea suprafețelor de contact.*

3. *Frecarea de alunecare depinde de natura și de modul de prelucrare a suprafețelor de contact.*

Din prima lege rezultă, că dacă greutatea corpului va crește de n ori se va mări și forța de frecare de alunecare de n ori, astfel încît unghiul φ va rămîne neschimbat. Legea a doua ne arată că dacă nu se schimbă nici greutatea corpului nici natura suprafețelor de contact pe care apare frecarea, ci se modifică numai dimensiunile suprafeței nu se va schimba valoarea forței de frecare de alunecare.

În sfîrșit, orice modificare a naturii suprafețelor de contact de exemplu, lustruirea, ungerea etc., schimbă valoarea forței de frecare de alunecare. Notînd

$$\operatorname{tg}\varphi=\mu, \quad \operatorname{tg}\varphi_m=\mu_m; \tag{10.3}$$

vom obține

$$R_t=\mu R_n, \quad R_\tau=\mu_m R_n. \tag{10.4}$$

În cazul cînd forța R_t atinge valoarea ei limită R_τ, coeficientul μ atinge valoarea sa limită $\mu_m=\operatorname{tg}\varphi_m$; această valoare limită μ_m se numește *coeficient de frecare*. Astfel, totdeauna vom avea:

$$\mu_m \geqslant \mu \geqslant 0. \tag{10.5}$$

Chiar din definiția coeficienților μ și μ_m [(v. formulele (10.3)], urmează că acești coeficienți sînt numere abstracte, adică dimensiunile lor fizice sînt egale cu zero.

În tabela de mai jos se dau valorile coeficienților de frecare pentru diferite materiale ce se freacă. [Aceste valori ale coeficienților de frecare sînt luate din Ghidul enciclopedic „Construcția de Mașini“ (Mașinostroenie), vol. II, 1948, din capitolul „Frecarea în mașini și mecanisme“; la sfîrșitul acelui capitol este anexată o bibliografie bogată privind frecarea].

Materiale	Coeficientul de frecare μ_m
Ulm pe stejar	în lungul fibrelor 0,69
	perpendicular pe fibre . . . 0,57
Stejar pe stejar	în lungul fibrelor 0,62
	perpendicular pe fibre . . . 0,54
Fier pe stejar	în lungul fibrelor 0,62
Fier pe fontă	 0,19

Să găsim acum în ce condiții va avea loc echilibrul cînd apar forțe de aderență. Presupunem, că corpul se reazemă cu un punct A pe suprafața S a unui alt corp, pe care el poate aluneca (fig. 93). Ridicăm în punctul A normala AA_n la suprafața S și descriem în jurul acestei normale un con circular drept ale cărui generatoare sînt înclinate față de axa lui sub unghiul de frecare φ_m. Din cele ce preced știm că reacțiunea trebuie să fie situată neapărat în interiorul acestui con sau pe suprafața lui laterală, deoarece ea nu poate forma cu normala un unghi mai mare decît φ_m. De aceea, pentru ca echilibrul să fie posibil, forțele efectiv aplicate asupra corpului, trebuie să se reducă la o singură rezultantă $\bar{F}$ al cărui suport trece prin punctul A și se găsește în interiorul sau pe suprafața laterală a conului de frecare, deoarece numai în acest caz reacțiunea suprafeței S poate să echilibreze forțele aplicate corpului. Dacă coeficientul de frecare are valori diferite pentru diverse direcții pornind din A și situate pe suprafața S, atunci conul de frecare nu va mai fi circular; el poate fi, de exemplu, eliptic. În cazul cînd corpul are mai multe puncte de contact, același raționament este aplicabil pentru toate punctele. În sfîrșit, în cazul unui contact de-a lungul unor elemente de suprafață sistemul de forțe efectiv aplicate, care acționează asupra corpului, trebuie să se reducă la forțe care intersectează suprafața corpului în interiorul acestor suprafețe elementare de contact, iar suporturile acestor forțe trebuie să formeze cu normalele la suprafață din punctele de intersecție, unghiuri mai mici decît unghiurile maxime de frecare.

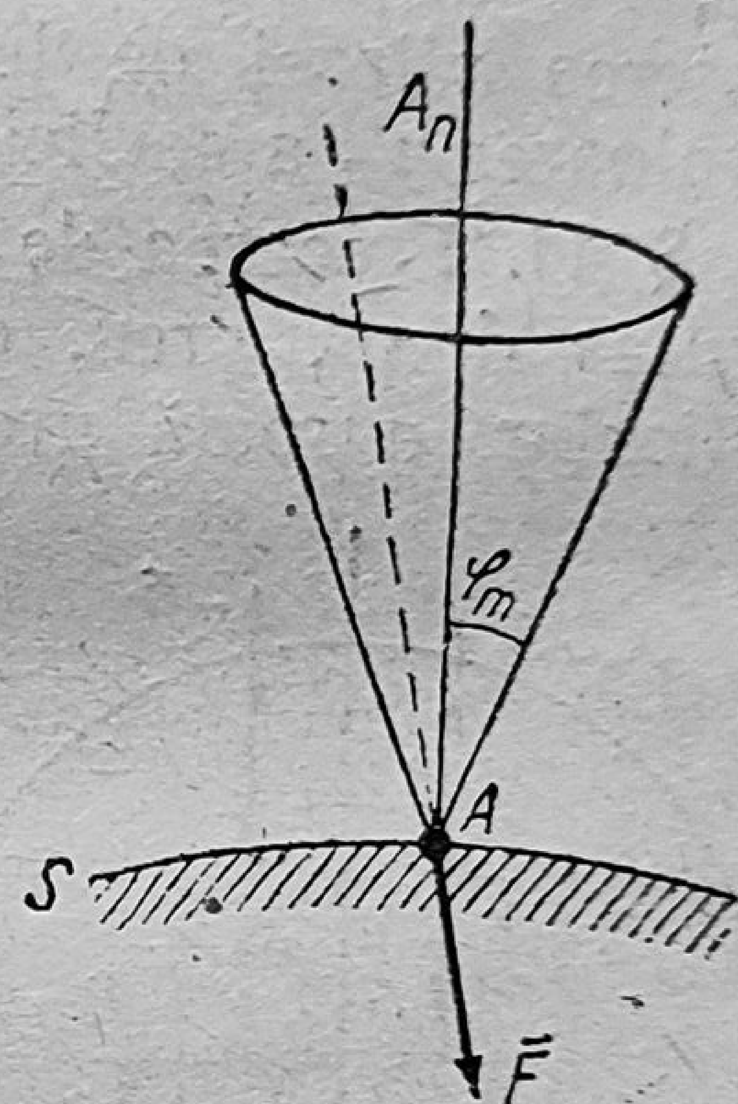


Fig. 93

Deşi frecarea de alunecare nu se tratează de fapt în statică, totuşi pentru a nu diviza studiul despre frecare, se dau mai jos noţiuni sumare despre frecarea de alunecare. Ca şi pentru cazul repausului, forţa de frecare $\overline{R}_t$ de alunecare se exprimă prin formula $R_t=\mu R_n$, unde $\overline{R}_n$ este reacţiunea normală şi μ este coeficientul de frecare de alunecare. Din experienţe rezultă că, coeficientul μ pentu o forţă mică $\overline{R}_n$, cînd viteza de lunecare creşte de la zero, se măreşte începînd cu valoarea μ_m, trece printr-un maximum şi apoi scade şi devine mai mic decît coeficientul μ_m al frecării de aderenţă. La creşterea forţei $\overline{R}_n$ valoarea maximă a coeficientului de frecare este atinsă pentru o valoare mai mică a vitezei de lunecare. Dacă însă forţa $\overline{R}_n$ este mare, o dată cu creşterea vitezei de lunecare, coeficientul μ scade începînd de la valoarea μ_m a coeficientului de frecare.

§ 44. Frecarea de rostogolire. Să presupunem că un cilindru circular drept, greu, este aşezat pe un plan orizontal sau în particular, o roată grea se găseşte pe o şină orizontală; fie C urma contactului generatoarei cilindrului cu planul sau a roţii cu şina (fig. 94). Dacă P este greutatea roţii, atunci roata apasă în punctul C pe şină cu forţa P, iar şina apasă în punctul C asupra roţii, cu o forţă egală şi de sens contrar. Deoarece asupra roţii se aplică în punctul O şi în direcţia OC greutatea de modul P şi în punctul C în direcţia CO o reacţiune cu acelaşi modul P, roata va fi în echilibru. Să presupunem că în punctul O se aplică roţii forţa $\overline{F}$ paralelă cu şina. Să mutăm forţa $\overline{F}$ paralel cu ea însăşi în punctul C, adăugînd

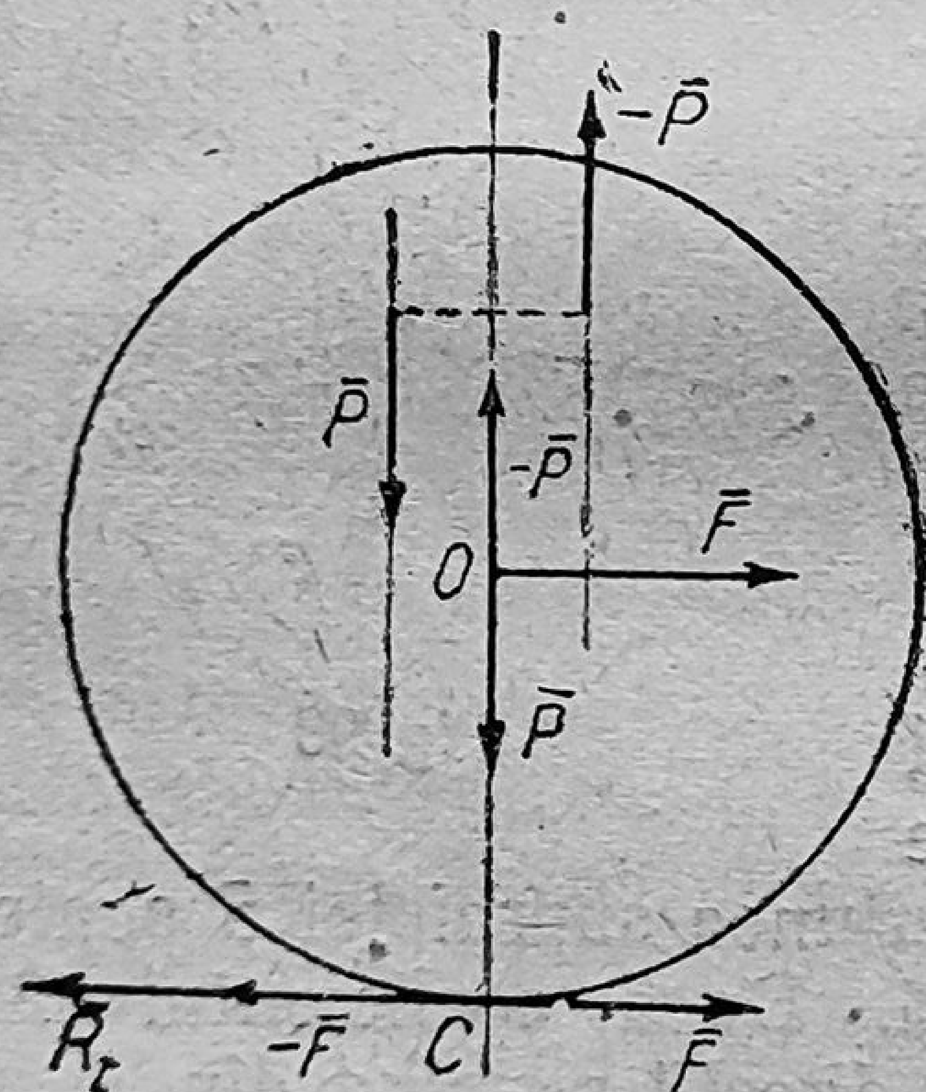


Fig. 94

cuplul corespunzător $(\overline{F},-\overline{F})$ cu braţul a, unde a este raza roţii. Dacă R_τ este modulul forţei limită de aderenţă a roţii la şină (§ 43) şi dacă $F<R_\tau$ şi roata nu va aluneca. Dar cuplul $(\overline{F},-\overline{F})$ va tinde să rotească roata (v. § 37). Experienţa ne arată însă că dacă forţa F este mică în modul, adică momentul Fa al cuplului $(\overline{F},-\overline{F})$ nu este mare, atunci rotaţia nu se va produce şi roata va rămîne în echilibru. Acest echilibru se poate explica

numai prin faptul că trebuie să existe un al doilea cuplu opus ca sens de rotație cuplului $(\overline{F}, -\overline{F})$ avînd momentul egal cu Fa. O explicație exactă a provenienței acestui cuplu încă nu există, dar în orice caz este clar că aceste cupluri reale, roata și șina, intră în contact nu de-a lungul unei drepte cu urma C, ci datorită deformațiilor lor contactul are loc pe o suprafață oarecare. Interacțiunea roții și a șinei creează cuplul care se opune tendinței de rotire a roții. Din experiență se știe că momentul acestui cuplu este proporțional cu greutatea P a roții, adică poate fi scris sub forma Pd, așa că vom avea:

$$Fa = Pd; \tag{10.6}$$

este evident că mărimea d trebuie să aibă dimensiunile unei lungimi. Vom mări momentul Fa al cuplului de rotire $(\overline{F}, -\overline{F})$; atunci și momentul Pd va crește, dar numai pînă la o valoare limită Ps. Dacă momentul Fa al cuplului de rotire va fi mai mare decît Ps, roata se va învîrti. Astfel, pentru echilibrul roții este necesar să avem:

$$Fa \leqslant Ps \tag{10.7}$$

Coeficientul s se numește *coeficient de frecare de rostogolire*. Se consideră că prin rostogolirea roții, coeficientul de frecare de rostogolire își păstrează aceea valoare s, pe care a avut-o în poziția limită de trecere a roții din starea de repaus în starea de mișcare. Mărimea s are dimensiunile unei lungimi ca și mărimea d; în general mărimea s se exprimă în centimetri. Tabela de mai jos, care este luată din aceeași lucrare ca și cea precedentă, ne dă valoarea coeficientului s în centimetri pentru unele materiale.

Materiale	Coeficientul de frecare s (în cm)
Lemn pe lemn	0,05—0,06
Oțel moale pe oțel moale . . .	0,005
Lemn pe oțel	0,03—0,04
Bilă de oțel călit pe oțel	0,001

Din formula (10.7) rezultă că pentru echilibru trebuie să avem: $F \leqslant \frac{s}{a} P$. Deoarece avem: $R_{\tau} = \mu_m P$, trebuie să mai avem: $F \leqslant \mu_m P$.

Astfel, ca roata să nu se rostogolească și să nu alunece, forța $\overline{F}$ trebuie să satisfacă două inegalități:

$$\left.\begin{array}{l} F \leqslant \frac{s}{a} P, \\ F \leqslant \mu_m P. \end{array}\right\} \qquad (10.8)$$

De obicei fracția $\frac{s}{a}$ este mai mică decît valoarea μ_m ceea ce se poate vedea din cele două tabele de mai sus, prin urmare rolul de bază îl joacă prima inegalitate (10.8) și de aceea este mult mai ușor, de exemplu, să facem ca roata să se rostogolească decît să o facem să alunece. De aici rezultă avantajul rolelor pentru transportul greutăților.

§ 45. Frecarea de pivotare. Să presupunem că pe o suprafață orizontală este așezată o sferă grea; notăm centrul sferei prin O și punctul de tangență al sferei cu planul prin C. Rotirea sferei în jurul dreptei CO se numește pivotare. Experiența ne arată că dacă momentul cuplului care provoacă pivotarea sferei este prea mic, atunci sfera nu va pivota. De aici rezultă că acțiunea cuplului de mișcare este anulată prin acțiunea unui alt cuplu, de existența căruia depinde *frecarea de pivotare*. Apariția acestui al doilea cuplu se poate explica în felul următor. Sfera și planul prin atingere se va deforma și vor intra în contact nu numai într-un punct, ci pe o suprafață oarecare. Cînd apare pivotarea, punctele de pe suprafața sferei vor aluneca în raport cu planul, adică frecarea de pivotare este o variantă a frecării de alunecare. Datorită acestei alunecări, între sferă și plan apar forțe de frecare ce produc cuplul care împiedică pivotarea. Din studiul frecării de alunecare se poate trage concluzia că, dacă momentul cuplului de rotire este mai mic decît un anumit moment limită, nu se va produce pivotarea. Experiențele dovedesc că acest moment limită are expresia nP, unde P este greutatea sferei și n este *coeficientul de frecare de pivotare*; coeficientul n are dimensiunile unei lungimi. Ca să nu existe pivotare, modulul momentului cuplului de rotire trebuie să fie mai mic decît nP. Dacă însă modulul momentului cuplului de rotire este mai mare decît nP, atunci pivotarea se va produce și va întîmpina o rezistență reprezentată prin cuplul de moment nP. Coeficientul de frecare de pivotare n este foarte mic, el este de 5—10 ori mai mic decît coeficientul s al frecării de rostogolire.

§ 46. **Exemple. 34.** La rezolvarea problemelor de echilibru cu frecare, mai ales în cazul frecării de alunecare, se pot utiliza metode geometrice și analitice. Să arătăm aceasta prin cîteva exemple.

Să se găsească condiția de echilibru al unui punct greu cu greutatea P, așezat pe un plan înclinat care formează cu orizontala unghiul α, ținînd seama și de frecarea de aderență. Presupunem că pe planul înclinat BC, punctul material se găsește în punctul A. Vom expune mai întîi metoda geometrică de rezolvare a problemei. Pentru aceasta vom duce în punctul A normala AA la planul înclinat și vom construi unghiul de frecare DAE, deoarece în cazul problemei plane, conul de frecare va trebui să fie înlocuit prin intersecția conului cu planul, prin unghiul de frecare . Dacă suportul forței $\overline{P}$ trece în interiorul unghiului de frecare, așa cum se arată în fig. 95, atunci punctul va fi în echilibru. Dacă vom mări unghiul α, atunci suportul forței $\overline{P}$ se va apropia de latura AE. Valoarea limită a unghiului α, pentru care echilibrul este încă posibil, va fi astfel încît suportul forței $\overline{P}$ se va suprapune peste dreapta AE; din desen se vede că în acest caz avem $\alpha=\varphi_m$. Astfel, echilibrul va fi posibil pentru orice valoare a unghiului α, care satisface inegalitatea

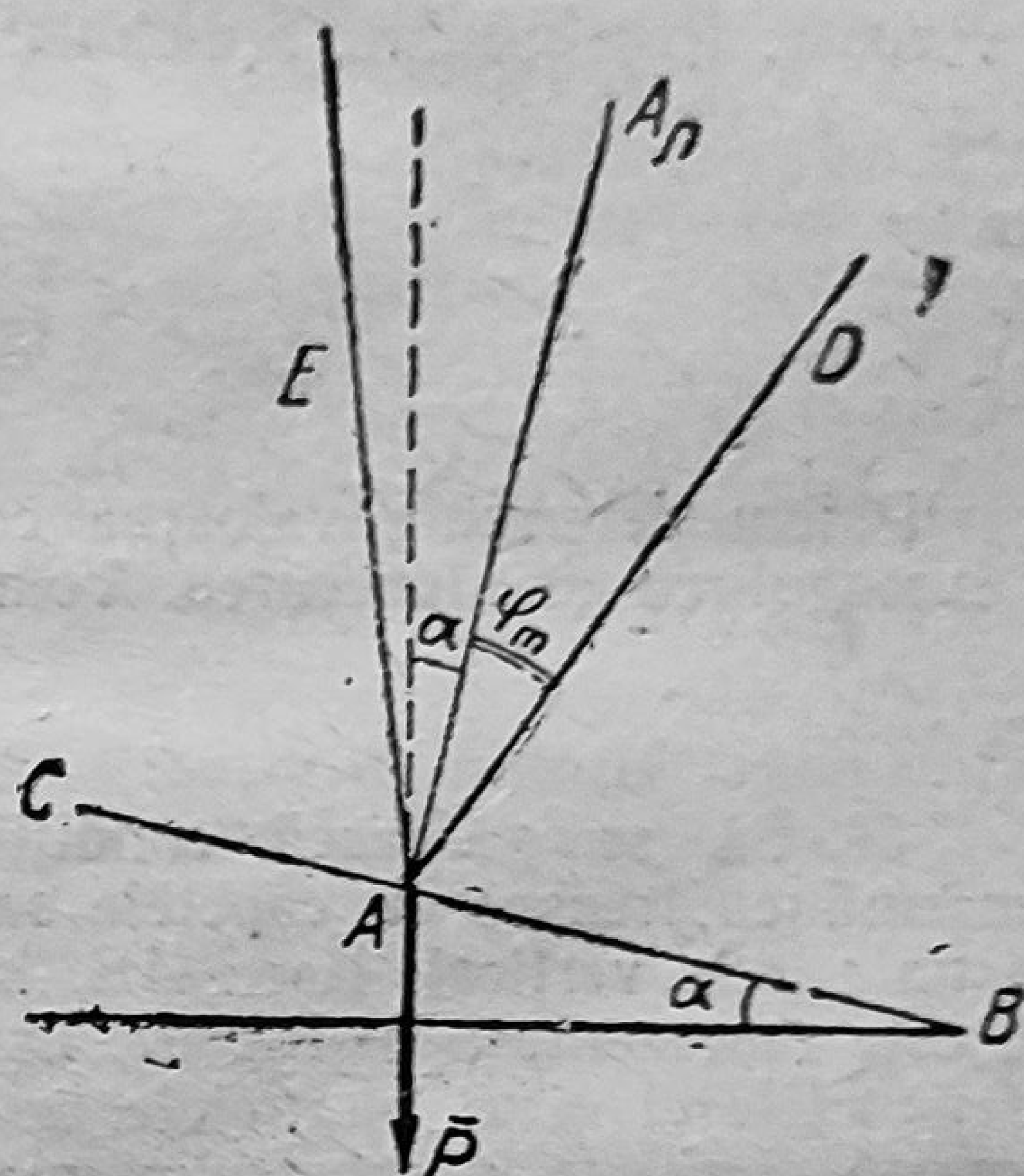


Fig. 95

$$\alpha\leqslant\varphi_m.$$

Să rezolvăm acum analitic aceeași problemă. Asupra punctului A acționează forțele concurente avînd modulele egale cu P, R_n și μR_n. Ca să obținem ecuația de echilibru, proiectăm toate forțele pe direcțiile AA_n și AB și sumele proiecțiilor le vom egala cu zero; obținem:

$$-P\cos\alpha+R_n=0\,,\quad P\sin\alpha-\mu R_n=0\,;$$

de aici găsim:

$$P\sin\alpha=\mu R_n\,,\quad P\cos\alpha=R_n\,.$$

Impărțind aceste egalități termen cu termen pentru a elimina forța R_n, și ținînd seama de prima formulă (10.3), obținem:

$$\operatorname{tg}\alpha=\mu=\operatorname{tg}\varphi,$$

sau

$$\alpha=\varphi\,.$$

De aici ajungem la inegalitatea precedentă:

$$\alpha\leqslant\varphi_m\,.$$

Este evident că determinînd pe cale experimentală valoarea limită a unghiului α, găsim totodată valoarea unghiului φ_m și valoarea coeficientului

$$\mu_m=\operatorname{tg}\varphi_m\,.$$

35. Să se găsească condiția de echilibru a unei roți de rază a și greutate P, așezată pe o șină înclinată care formează unghiul α cu orizontala. Deoarece modulul forței $\bar{F}$ care tinde să producă rostogolirea roții este egal cu $F=P \sin \alpha$ (fig. 96), modulul momentului de rotire va fi egal cu $M=Pa \sin \alpha$. Modulul forței $\bar{\Phi}$, forța cu care roata apasă pe șină, va fi egal cu $P \cos \alpha$. Prin urmare, aplicînd formula (10.7), vom obține:

$$Pa \sin \alpha \leqslant Ps \cos \alpha,$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant \frac{s}{a}.$$

Putem determina valoarea coeficientului s pentru care apar simultan și rostogolirea și alunecarea. Vom găsi:

$$s=a \operatorname{tg} \alpha_m.$$

36. Să se găsească condițiile de echilibru ale barei AB, care se reazemă cu frecare cu capetele sale A și B pe o pardoseală orizontală și pe un perete vertical. Bara AB, împreună cu forțele care acționează asupra ei, este reprezentată în fig. 97. Ducem în punctele A și B normalele la pardoseală și perete și construim unghiurile de frecare KAL și LBM. Vom obține o porțiune $KLMN$ a planului, un patrulater, cuprinsă în interiorul

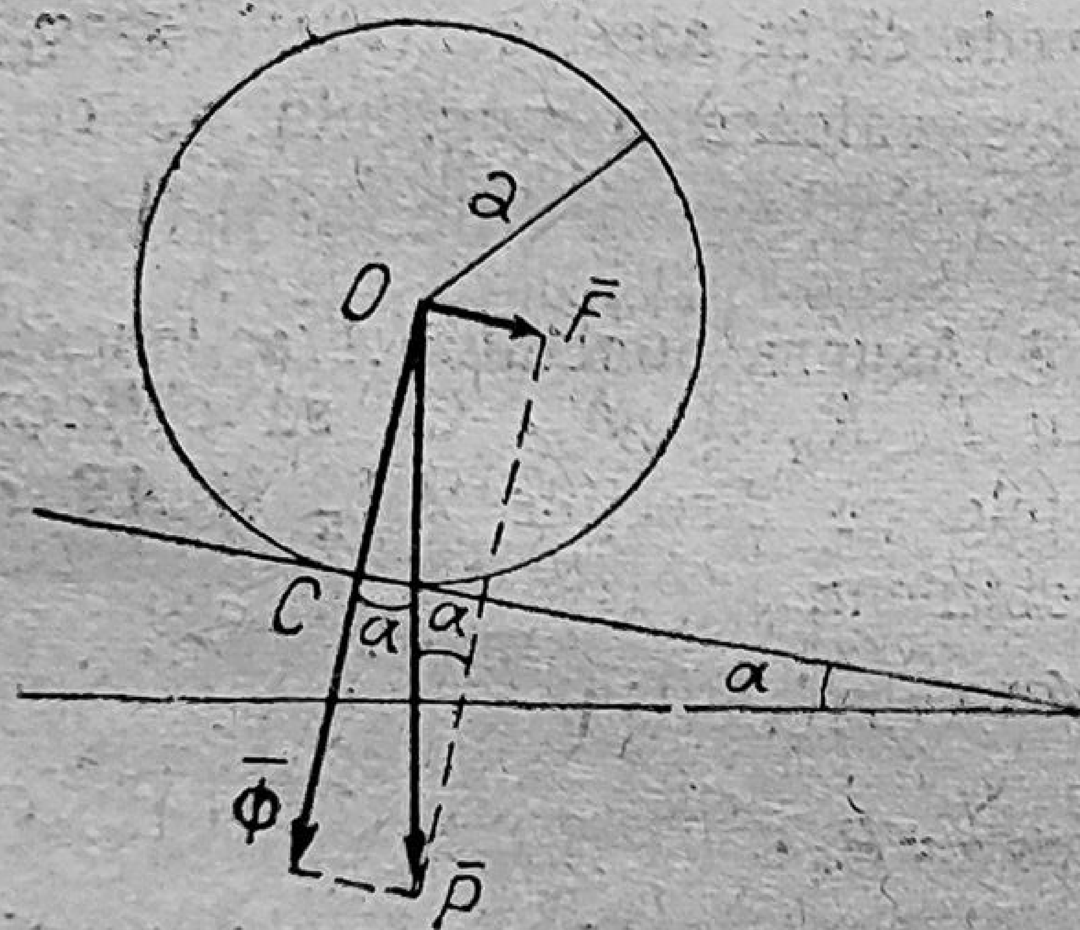


Fig. 96

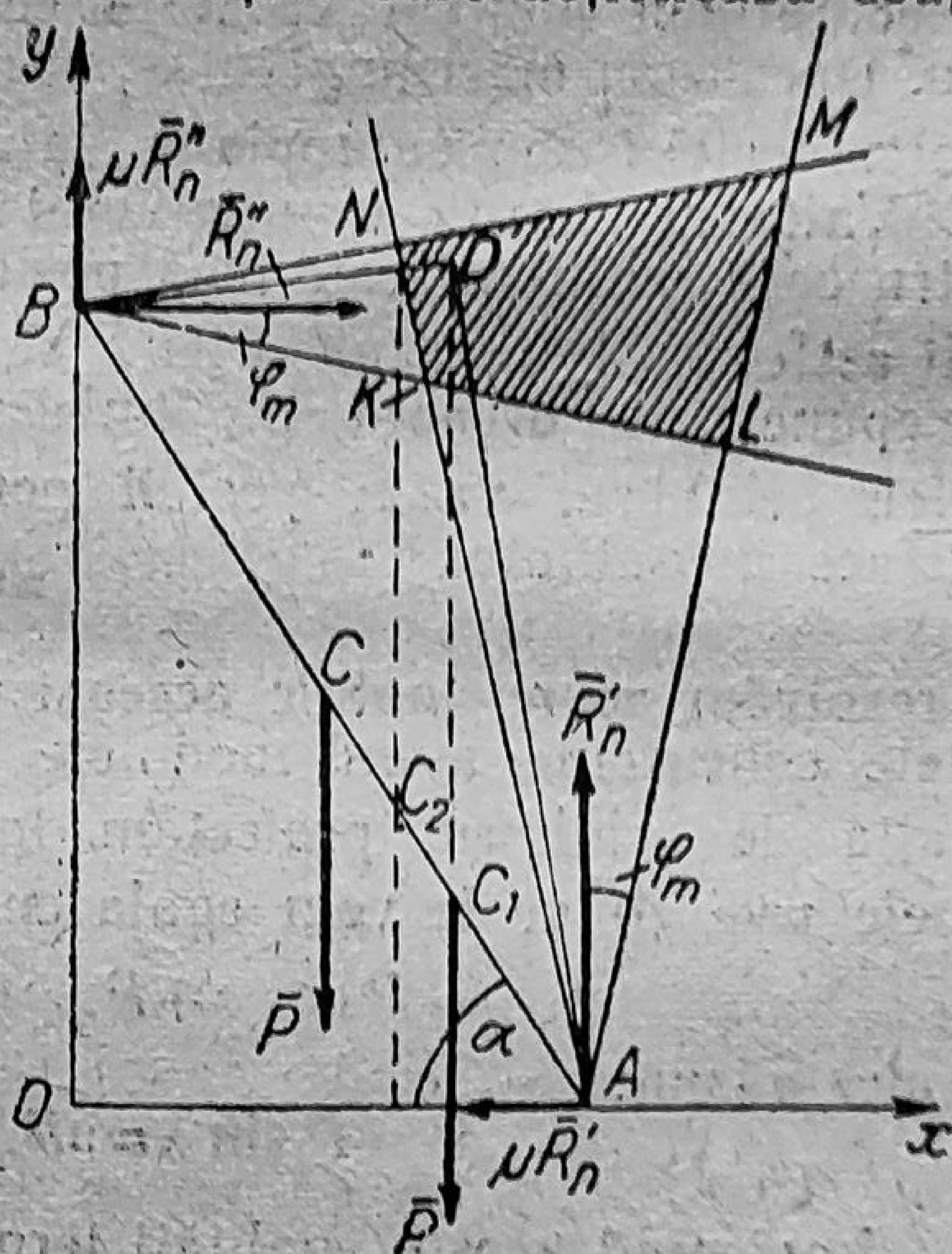


Fig. 97

celor două unghiuri; acest patrulater este hașurat în fig. 97. Presupunem că greutatea $\bar{P}$ a barei este aplicată în punctul C_1. Prelungind suportul acestei forțe $\bar{P}$, vedem că el intersectează patrulaterul hașurat. Luăm un punct oarecare D de pe suport situat în interiorul patrulaterului. Unim punctul D cu punctele A și B și mutăm forța $\bar{P}$ în punctul D. Descompunînd forța $\bar{P}$ în două forțe după direcțiile DA și DB și mutînd ambele componente obținute în punctele A și B, vedem că aceste componente se pot echilibra cu reacțiunile, deoarece suporturile lor se găsesc în interiorul

unghiurilor de frecare. Prin urmare, în acest caz avem echilibru. Să presupunem acum că forța P este aplicată în punctul C. Prelungind suportul acestei forțe, acesta nu intersectează patrulaterul hașurat. Prin urmare, forța $\overline{P}$ nu se poate descompune în acest caz în două componente ale căror suporturi să fie interioare unghiurilor KAL și LBM și echilibrul este imposibil. Ducem prin punctul N o verticală. Este evident că dacă centrul de greutate al barei se găsește în dreapta acestei verticale, va exista echilibru; dacă însă centrul de greutate al barei se află la stînga acestei verticale, echilibrul este imposibil. Prin aceasta se explică de ce o scară sprijinită de perete nu alunecă cînd omul stă pe treptele ei inferioare și uneori începe să alunece cînd omul se urcă pe treptele ei superioare. Este evident că o dată cu creșterea unghiului α dreapta AB se va apropia de dreapta AN și poziția limită a punctului C, pentru care echilibrul este posibil, se va apropia de punctul B.

Să rezolvăm acum aceeași problemă pe cale analitică. Presupunem, pentru a simplifica raționamentele, că coeficienții μ au în punctele A și B valori egal și centrul de greutate al barei se găsește la mijlocul dreptei AB a cărei lungime o vom nota prin $2l$. Asupra barei acționează cinci forțe, ale căror mărimi sînt:

$$\mu R_n', \quad R_n, \quad P, \quad \mu R_n'', \quad R_n''.$$

Formăm ecuațiile de echilibru, egalînd cu zero suma proiecțiilor forțelor pe axele Ox și Oy și suma momentelor în raport cu punctul O. Vom obține:

$$R_n'' - \mu R_n' = 0,$$

$$R_n' + \mu R_n'' - P = 0,$$

$$R_n' \cdot 2l \cos\alpha - P \cdot l \cos\alpha - R_n'' \cdot 2l \sin\alpha = 0.$$

Din prima ecuație avem:

$$R_n'' = \mu R_n'.$$

Introducînd această valoare în a doua ecuație vom găsi:

$$R_n' = P\frac{1}{1+\mu^2},$$

și prin urmare vom avea:

$$R_n'' = P\frac{\mu}{1+\mu^2}.$$

Introducem aceste valori ale lui R_n' și R_n'' în ultima dintre ecuațiile de echilibru, pe care am simplificat-o în prealabil cu l; după transformări simple obținem:

$$\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\cos\alpha = \frac{2\mu}{1+\mu^2}\sin\alpha.$$

De aici vom avea:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\mu^2}{2\mu}.$$

Introducem pentru mărimea μ valoarea ei $\mu = \operatorname{tg} \varphi$; atunci vom avea:

$$\frac{1-\mu^2}{2\mu} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \operatorname{ctg} 2\varphi,$$

şi obţinem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg} 2\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right),$$

adică

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi.$$

Deoarece unghiul φ poate varia de la O pînă la φ_m, atunci, pentru ca echilibrul să fie posibil, va trebui ca valorile unghiului α să satisfacă inegalităţile

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \alpha \geqslant \frac{\pi}{2} - 2\varphi_m.$$

De exactitatea soluţiei obţinute nu este greu să ne convingem pe cale geometrică. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ atunci bara AB este verticală de-a lungul peretelui Oy şi echilibrul este posibil. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_m$, atunci unghiul $BAN = \varphi_m$, şi punctul N este mijlocul bazei unui triunghi isoscel ale cărui laturi sînt AB şi verticala în punctul A. De aceea, dreapta care trece prin mijlocul C al dreptei AB şi este paralelă cu verticala din punctul A va trece prin punctul N şi vom obţine astfel poziţia limită în care echilibrul este încă posibil.

37. Să se găsească condiţiile de echilibru ale unei bare grele AB de lungimea $2l$, a cărei greutate P acţionează după o direcţie formînd unghiul α cu orizontala P. Capătul A al barei se reazemă cu frecare pe o pardoseală orizontală, iar de capătul B este legat un fir înclinat sub unghiul β faţă de orizontală, fir ce este trecut printr-un scripete; la capătul firului este legată greutatea Q. Revenind la fig. 90 şi înlocuind T prin μR, vom obţine următoarele ecuaţii de echilibru:

$$-\mu R + Q\cos\beta = 0,$$

$$-P + Q\sin\beta + R = 0,$$

$$-P \cdot l\cos\alpha + Q \cdot 2l\sin(\beta - \alpha) = 0,$$

sau

$$\mu R = Q\cos\beta,$$

$$R = P - Q\sin\beta,$$

$$2Q(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = P\cos\alpha.$$

Din ultima ecuaţie avem:

$$(2Q\sin\beta - P)\cos\alpha = 2Q\cos\beta\sin\alpha,$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta - \frac{P}{2Q\cos\beta}.$$

Eliminînd forţa $\overline{R}$ din prima şi a doua ecuaţie vom avea:

$$Q \cos \beta = \mu P - \mu Q \sin \beta,$$

sau

$$Q (\cos \beta + \mu \sin \beta) = \mu P.$$

Inlocuind coeficientul μ prin valoarea lui conform formulei (10.3) obţínem:

$$Q \cos (\beta - \varphi) = P \sin \varphi.$$

CAPITOLUL XI

SISTEM ARBITRAR DE FORȚE

§ 47. Metoda vectorială de reducere a unui sistem de forțe la cel mai simplu sistem. După studiul sistemelor particulare de forțe să ne ocupăm cu reducerea unui sistem de forțe, cînd forțele au o poziție arbitrară în spațiu; să presupunem că se dau forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ..., aplicate în punctele A_1, A_2, A_3, ..., ale unui solid absolut rigid.

Putem reduce sistemul dat de forțe la unul mai simplu, în mai multe moduri.

Un sistem arbitrar de forțe se poate reduce în geneal la trei forțe, care trec prin trei puncte arbitrar alese în spațiu și nesituate în linie dreaptă.

În adevăr, fie O_1, O_2 și O_3 aceste trei puncte. Unim punctul A_1 cu punctele O_1, O_2, O_3 și construim paralelipipedul a cărui diagonală este forța F_1, și ale cărui muchii sînt dreptele A_1O_1, A_1O_2 și A_1O_3. Servindu-ne de legea paralelipipedului (§ 3), putem descompune forța în trei componente, după dreptele A_1O_1, A_1O_2, A_1O_3 și apoi mutăm punctele de aplicație ale acestor componente de-a lungul suportului lor în punctele O_1, O_2 și O_3. Aceeași descompunere o putem face și cu forțele $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... Astfel, obținem trei sisteme de forțe concurente aplicate în punctele O_1, O_2 și O_3. Înlocuind aceste forțe concurente prin rezultantele lor, vom ajunge la trei forțe, aplicate în punctele O_1, O_2 și O_3 din spațiu alese in prealabil.

Un sistem arbitrar de forțe se poate reduce, în general, la o singură forță aplicată într-un punct din spațiu ales arbitrar și la un cuplu.

Să alegem punctul arbitrar O din spațiu și să-l numim *punct de reducere*; (v. § 39). Introducem notațiile

$$\overline{r}_1=\overline{OA}_1,\quad \overline{r}_2=\overline{OA}_2,\quad \overline{r}_3=\overline{OA}_3,\ldots$$

Mutăm punctele de aplicație ale tuturor forțelor F_1, F_2, $F_3, \ldots$, în punctul O, adăugînd cuplurile (§ 39) cu momentele $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3, \ldots$, unde:

$$\overline{M}_1=\overline{r}_1\times\overline{F}_1, \quad \overline{M}_2=\overline{r}_2\times\overline{F}_2, \quad \overline{M}_3=\overline{r}_3\times\overline{F}_3, \ldots,$$

Adunînd vectorial toate forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3, \ldots$, aplicate în punctul O, obținem în punctul O, rezultanta $\overline{F}$:

$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+, \ldots, =\sum_n \overline{F}_n, \tag{11.1}$$

Adunînd toate cuplurile, obținem *cuplul rezultant* cu momentul $\overline{M}$:

$$\overline{M}=\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3+, \ldots =\sum_n \overline{M}_n=\sum_n \overline{r}_n\times\overline{F}_n \tag{11.2}$$

Este evident că vectorul $\overline{M}$ nu este altceva decît momentul rezultant al sistemului de forțe dat, calculat în raport cu punctul de reducere. Astfel, sistemul de forțe s-a redus la o forță rezultantă aplicată într-un punct arbitrar ales din spațiu, și la un cuplu.

Un sistem arbitrar de forțe se poate reduce, în general, la două forțe necoplanare, dintre care una se aplică într-un punct din spațiu arbitrar ales.

În adevăr, să presupunem că efectuînd reducerea forțelor, așa cum s-a arătat anterior, am obținut forța rezultantă $\overline{F}$, aplicată într-un punct O luat arbitrar în spațiu și cuplul de moment $\overline{M}$. Să ducem prin punctul O planul π, perpendicular pe momentul $\overline{M}$, și să construim în acest plan cuplul $(\overline{F}', -\overline{F}')$ cu momentul $\overline{M}$ în așa fel ca una din forțele cuplului, de exemplu $-\overline{F}'$, să treacă prin punctul O. Atunci forțele $\overline{F}'$ și $\overline{F}$ se pot compune, înlocuindu-le printr-o singură forță $\overline{\Phi}$, care nu mai este situată în planul π, și, în acest fel vom reduce sistemul forțelor dat, la două forțe $\overline{F}$ și $\overline{\Phi}$, care nu sînt situate în același plan, forța $\overline{\Phi}$ fiind aplicată în punctul în prealabil ales.

Afară de aceste trei moduri de reducere a forțelor, vom mai indica pe al patrulea, care este cel mai important. Presupunem din nou că efectuînd reducerea sistemului de forțe dat, am obținut rezultanta $\overline{F}$, aplicată în punctul O luat arbitrar în spațiu și cu-

plul cu momentul $\overline{M}$ (fig. 98). Descompunem momentul $\overline{M}$ în două componente: momentul $\overline{m}$ paralel la forța rezultantă $\overline{F}$ și momentul $\overline{M}_0$, perpendicular pe forța $\overline{F}$. Să ducem prin punctul O planul π perpendicular pe vectorul $\overline{M}_0$; acest plan va conține forța $\overline{F}$. Construim în planul π cuplul cu momentul $\overline{M}_0$ astfel ca una din forțele cuplului să fie egală cu $-\overline{F}$ și să fie aplicată în punctul O; atunci, cealaltă forță a cuplului va fi aplicată într-un punct oarecare O', astfel ca să avem $F \cdot OO' = M_0$, de unde găsim: $OO' = \frac{M_0}{F}$. Forțele $\overline{F}$ și $-\overline{F}$ aplicate în punctul O se echilibrează și ajungem la forța $\overline{F}$ aplicată în punctul O' și la cuplul de moment $\overline{m}$ dirijat paralel cu suportul forței $\overline{F}$. Deoarece momentul $\overline{m}$ al cuplului este un vector liber, se poate transporta și el în punctul O'. Observăm că dacă $\sphericalangle(\overline{F}, \overline{M})$ va fi ascuțit, atunci momentul $\overline{m}$ va fi dirijat în același sens cu forța $\overline{F}$ (cazul fig. 98); dacă însă $\sphericalangle(\overline{F}, \overline{M})$ este obtuz, atunci momentul $\overline{m}$ și forța $\overline{F}$ vor fi dirijate în sensuri contrare. *Sistemul compus dintr-o forță și un cuplu al cărui moment este dirijat pe suportul forței se numește dinam.* Dacă se găsește numai un punct O' în care forța și momentul cuplului sînt coliniare, atunci se pot găsi și toate celelalte asemenea puncte; toate aceste puncte sînt situate pe suportul Δ al forței $\overline{F}$, deoarece forța $\overline{F}$ este un vector alunecător, iar vectorul $\overline{m}$ este un vector liber. Dreapta Δ se numește *axa centrală a sistemului*. Găsim generalizarea rezultatului aflat la § 39 pentru cazul forțelor coplanare, numai cu deosebirea că acolo $\overline{m}$ era egal cu zero și rezultanta $\overline{F}$ era dirijată în lungul axei centrale. Raportul $\frac{m}{F} = p$ se numește parametrul dinamului. Aici m reprezintă proiecția momentului rezultant $\overline{M}$ pe direcția

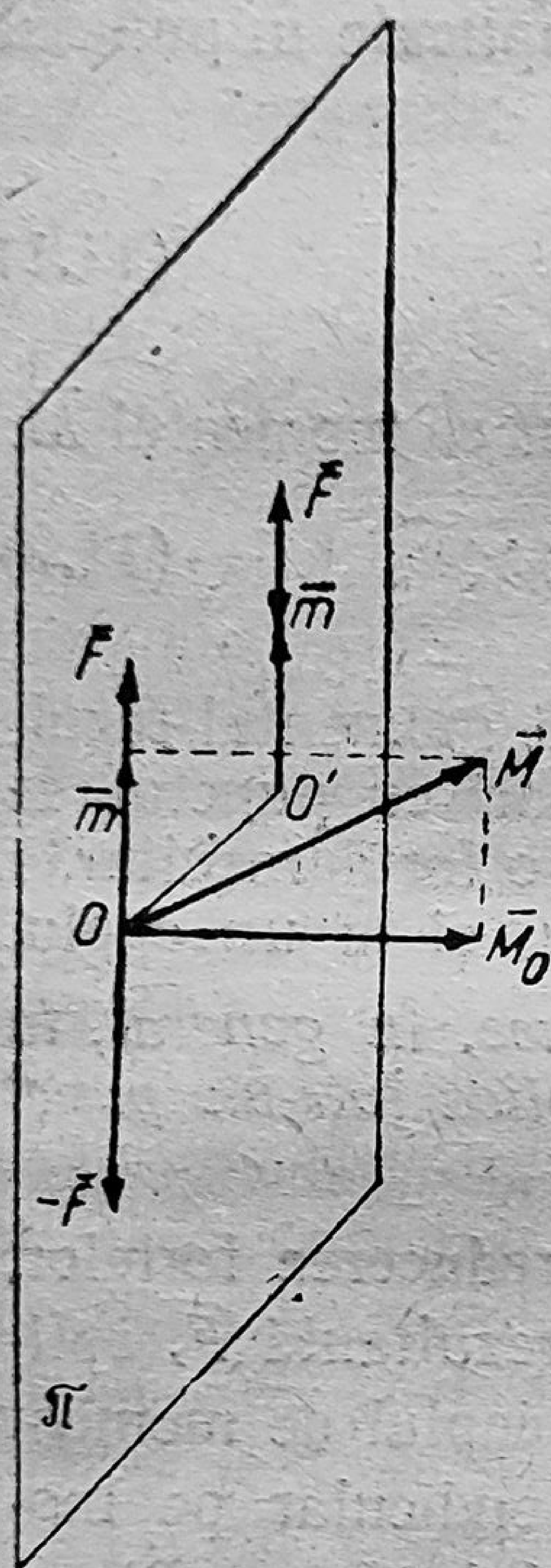


Fig. 98

forței $\overline{F}$; de aceea parametrul p este pozitiv, dacă $\overline{F}$ și $\overline{m}$ au același sens, și negativ dacă $\overline{F}$ și $\overline{m}$ sînt de sens contrar. Astfel:

Un sistem arbitrar de forțe se poate reduce, în general, la un dinam situat în lungul axei centrale a sistemului.

Două sisteme de forțe, avînd forțele rezultante și momentele rezultante egale în raport cu același punct din spațiu, se numesc *echivalente*. Astfel, reducerea sistemului de forțe la un sistem mai simplu se reduce la căutarea pentru sistemul de forțe dat, a celui mai simplu sistem echivalent. În acest paragraf s-au arătat patru feluri de sisteme echivalente pentru sistemul arbitrar de forțe.

Dacă efectuînd reducerea forțelor într-un punct oarecare O, vom găsi $\overline{F}=0$ și $\overline{M}\neq 0$, atunci sistemul de forțe se reduce la un cuplu. Dacă efectuînd reducerea într-un punct oarecare O, vom găsi $\overline{F}\neq 0$ și $\overline{M}\perp\overline{F}$, aceasta va însemna că sistemul de forțe se reduce la o rezultantă, deoarece în acest caz, reducînd sistemul de forțe în raport cu un punct de pe axa centrală, vom obține $\overline{m}=0$, și va rămîne o singură forță F care acționează de-a lungul axei centrale a sistemului. În sfîrșit, dacă efectuînd reducerea într-un punct oarecare O vom găsi că $\overline{F}=0$ și $\overline{M}=0$, aceasta va însemna că nu există nici rezultantă, nici cuplu, nici dinam, adică sistemul de forțe este în echilibru; un astfel de sistem de forțe este numit uneori *sistem echivalent cu zero*. Nu este greu de văzut că dacă sistemul de forțe va fi echivalent cu zero pentru un punct oarecare O, atunci el va avea această proprietate și pentru oricare alt punct din spațiu. În adevăr, din construcțiile precedente urmează că *rezultanta $\overline{F}$ nu depinde de punctul de reducere ales*; de aceea, dacă pentru punctul O vom avea $\overline{F}=0$, atunci în orice alt punct din spațiu vom avea de asemenea $\overline{F}=0$. Dar dacă $\overline{F}=0$, atunci sistemul de forțe se poate reduce la un cuplu al cărui moment $\overline{M}$ în raport cu toate punctele din spațiu este același; de aceea, dacă în punctul O vom avea $\overline{M}=0$, atunci vom avea $\overline{M}=0$ și în toate celelalte puncte din spațiu. De aici rezultă că:

Pentru echilibrul unui sistem arbitrar de forțe este necesar și suficient să avem

$$\overline{F}=\sum_n \overline{F}_n=0, \quad \overline{M}=\sum_n \overline{M}_n=\sum_n \overline{r}_n\times\overline{F}_n=0 \qquad (11.3)$$

§ 48. Metoda analitică de reducere a unui sistem de forțe la cel mai simplu sistem. Fie date forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3, \ldots$ prin proiecțiile lor pe axele coordonatelor $Oxyz$, egale respectiv cu (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), $(X_3, Y_3, Z_3), \ldots$, și fie coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor $A_1, A_2, A_3, \ldots$ egale respectiv cu (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $(x_3, y_3, z_3), \ldots$ Notînd proiecțiile rezultantei F prin (X, Y, Z), iar proiecțiile momentului rezultant M prin (M_x, M_y, M_z) și luînd originea coordonatelor ca punct de reducere, vom obține:

$$\left.\begin{aligned} X&=X_1+X_2+X_3+\ldots=\sum_n X_n, \\ Y&=Y_1+Y_2+Y_3+\ldots=\sum_n Y_n, \\ Z&=Z_1+Z_2+Z_3+\ldots=\sum_n Z_n; \end{aligned}\right\} \qquad (11.4)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x&=\sum_n M_{nx}=\sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n), \\ M_y&=\sum_n M_{ny}=\sum_n (z_n X_n - x_n Z_n), \\ M_z&=\sum_n M_{nz}=\sum_n (x_n Y_n - y_n X_n). \end{aligned}\right\} \qquad (11.5)$$

Unghiurile α, β, γ, ale rezultantei $\overline{F}$ cu axele de coordonate și modulul său se determină prin formulele (1.18) și (1.17), și anume:

$$\cos\alpha=\frac{X}{F}, \quad \cos\beta=\frac{Y}{F}, \quad \cos\gamma=\frac{Z}{F}, \quad F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

unghiurile a, b, c, ale momentului rezultant $\overline{M}$ cu axele de coordonate și modulul său se determină prin aceleași formule, și anume:

$$\cos a=\frac{M_x}{M}, \quad \cos b=\frac{M_y}{M}, \quad \cos c=\frac{M_z}{M}, \quad M=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z}.$$

Pentru ca punctul O să fie situat pe axa centrală, trebuie să avem:

$$\frac{\cos a}{\cos\alpha}=\frac{\cos b}{\cos\beta}=\frac{\cos c}{\cos\gamma}=\pm 1,$$

semnul plus corespunde cazului în care rezultanta și momentul rezultant au același sens minus cazului în care sensul rezultantei și al momentului rezultant sînt contrarii. Inlocuind în egalitatea

precedentă cosinușii prin valorile lor date mai înainte, ajungem la următoarea condiție ca punctul O să se găsească pe axa centrală:

$$\frac{M_x}{X}=\frac{M_y}{Y}=\frac{M_z}{Z}. \tag{11.6}$$

În general aceste egalități nu vor fi satisfăcute. Dacă luăm ca punct de reducere nu punctul O ci un punct oarecare O', atunci după cum știm, rezultanta $\overline{F}$ rămîne neschimbată, iar momentul rezultant prin trecerea la punctul O' ca punct de reducere se va schimba și ca modul și ca sens. De aceea se poate pune problema unei astfel de alegeri a punctului O', încît noul moment $\overline{M}'$ să coincidă cu momentul determinat mai sus $\overline{m}$; pentru aceasta trebuie să avem:

$$\overline{M}'=\overline{m}=p\overline{F},$$

unde p este parametrul dinamului determinat mai sus. Pentru a găsi momentul rezultant $\overline{M}'$ în raport cu un punct oarecare O' din spațiu, ne vom servi de formula (2.22); vom avea

$$\overline{M}'=\sum_n \overline{M}_n'=\sum_n \overline{M}_n-\sum_n \overline{d}\times\overline{F}_n,$$

unde $\overline{d}=\overline{OO'}$. De aici găsim

$$\overline{M}'=\overline{M}-\overline{d}\times\sum_n \overline{F}_n,$$

sau

$$\overline{M}'=\overline{M}-\overline{d}\times\overline{F}; \tag{11.7}$$

de fapt repetăm operațiile de care ne-am mai servit pentru sistemele particulare de forțe. Dacă punctul O' este luat astfel încît $\overline{M}'=\overline{m}$, atunci din egalitatea $\overline{m}=p\overline{F}$ vom obține:

$$\overline{M}-\overline{d}\times\overline{F}=p\overline{F}. \tag{11.8}$$

Din egalitatea (11.8) se poate determina vectorul $\overline{d}$ în funcție de vectorii dați $\overline{M}$ și $\overline{F}$; pentru aceasta vectorul $\overline{M}-p\overline{F}$ trebuie să fie egal cu produsul $\overline{d}\times\overline{F}$. In § 39 am văzut că o astfel de ecuație vectorială nu admite o soluție unică; dacă s-a determinat o soluție $\overline{d}$ a ecuației, atunci toți vectorii de forma $\overline{d}+\overline{f}$, unde $\overline{f}$ este un vector arbitrar paralel cu rezultanta $\overline{F}$ reprezintă soluții

ale aceleiași ecuații vectoriale. Este evident că locul geometric al punctelor O', cînd vectorul $\bar{f}$ variază, este o dreaptă și anume axa centrală a sistemului de forțe. Ca să trecem de la notațiile vectoriale la cele analitice, vom pune $\bar{d}=\bar{i}x'+\bar{j}y'+\bar{k}z'$; atunci din formula (11.8) vom obține:

$$\bar{i}M_x+\bar{j}M_y+\bar{k}M_z-\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x' & y' & z'\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=p(\bar{i}X+\bar{j}Y+\bar{k}Z),$$

sau

$$M_x-(y'R-z'Y)=pX,$$
$$M_y-(z'X-x'Z)=pY,$$
$$M_z-(x'Y-y'X)=pZ.$$

Eliminînd mărimea p, vom avea:

$$\frac{M_x-(y'Z-z'Y)}{X}=\frac{M_y-(z'X-x'Z)}{Y}=\frac{M_z-(x'Y-y'X)}{Z} \qquad (11.9)$$

Aceasta este ecuația analitică a axei centrale. În adevăr, dacă valorile X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, care determină sistemul de forțe dat sînt cunoscute, avem două ecuații (11.9) de gradul întîi cu trei coordonate curente (x', y', z'), care după cum se știe din geometria analitică în spațiu, reprezintă ecuațiile unei drepte. Nu este greu de găsit ecuația acestei drepte, sub forma canonică. Pentru aceasta să dăm, de exemplu, variabilei z' o valoare oarecare arbitrară $z'=z'_0$; atunci, din cele două ecuații (11.9) cu două necunoscute x' și y' vom putea deduce valorile lor; fie x'_0 și y'_0 aceste valori. Astfel, am găsit unui din punctele prin care trece axa centrală a sistemului de forțe. Deoarece axa centrală trebuie să fie paralelă cu vectorul $\bar{F}$, rezultă că coeficienții ei unghiulari trebuie să fie proporționali cu proiecțiile X, Y, Z, adică ecuațiile axei centrale pot căpăta următoarea formă canonică:

$$\frac{x'-x'_0}{X}=\frac{y'-y'_0}{Y}=\frac{z'-z'_0}{Z}.$$

Din construcția vectorului rezultant $\bar{F}$ urmează că el nu-și schimbă modulul, ori unde ar fi luat punctul de reducere și oricum ar fi axele de coordonate ortogonale; de aceea vectorul $\bar{F}$ este un invariant (§ 18). Pentru a evita rădăcina pătrată, vom

lua drept invariant $F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Ne vom folosi de egalitatea (11.7); o vom înmulți termen cu termen, scalar cu egalitatea $\overline{F'} = \overline{F}$. Deoarece vectorul $\overline{d} \times \overline{F}$ este perpendicular pe vectorul $\overline{F}$, atunci conform § 18 vom obține:

$$\overline{M'} \cdot \overline{F'} = \overline{M} \cdot \overline{F}.$$

Deoarece direcțiile axelor de coordonate nu pot influența relațiile vectoriale, rezultă din egalitatea precedentă că produsul $\overline{M} \cdot \overline{F}$ pentru sistemul de forțe considerat este de asemenea un invariant; după formula (3.9) avem:

$$\overline{M} \cdot \overline{F} = M_x X + M_y Y + M_z Z.$$

Prin urmare, orice sistem de forțe are doi invarianți de forma:

$$\left. \begin{array}{r} X^2 + Y^2 + Z^2 = \text{const.}, \\ M_x X + M_y Y + M_z Z = \text{const.} \end{array} \right\} \qquad (11.10)$$

Știm că $\overline{M} \cdot \overline{F} = M \cdot F \cos (\widehat{\overline{M}, \overline{F}})$ conform formulei (3.3). Din fig. 98 rezultă că vom avea $M \cos (\widehat{\overline{M}, \overline{F}}) = m$: de aceea al doilea invariant poate căpăta forma $\overline{M} \cdot \overline{F} = Fm$. Deoarece F este un invariant, atunci și m trebuie să fie invariant, adică semnificația fizică a celui de-al doilea invariant este următoarea:

Proiecția momentului rezultat pe rezultantă este o mărime constantă pentru sistemul de forțe dat.

Astfel, cînd la schimbarea punctului de reducere variază modulul momentului rezultat, vectorul moment rezultant trebuie să-și modifice cu această ocazie direcția, astfel încît proiecția lui pe rezultantă să rămînă invariantă.

Deoarece totdeauna proiecția este mai mică decît segmentul proiectat, momentul rezultant al sistemului de forțe va fi minim, dacă punctul de reducere este luat pe axa centrală, cînd vectorul $\overline{M}$ coincide cu vectorul $\overline{m}$. De aceea momentul $\overline{m}$ se numește *moment minimal.*

Cu ajutorul celui de-al doilea invariant este ușor de cunoscut la ce se poate reduce sistemul de forțe dat. Presupunem că $Fm \neq 0$; este evident că în acest caz nici F nici m nu pot fi egali cu zero și sistemul se reduce la un dinam sau la două forțe ce nu sînt situate în același plan. Să presupunem acum că $Fm = 0$. Dacă în acest caz $F \neq 0$, atunci trebuie să avem $m = 0$ și sistemul se reduce la o rezultantă așezată în lungul axei centrale. Dimpotrivă,

dacă $F=0$, iar $m\neq0$, atunci momentul rezultant pentru toate punctele din spațiu este constant și egal cu $\overline{m}$; de aceea sistemul de forțe se reduce la un cuplu de moment $\overline{m}$. În sfîrșit, dacă și $F=0$ și $m=0$, atunci nu există nici rezultantă, nici cuplu, și sistemul de forțe va fi echivalent cu zero. Toate cazurile examinate pot fi rezumate în tabela următoare:

$\overline{M}\cdot\overline{F}=M_xX+M_yY+M_zZ\neq0$	Dinam sau două forțe în plane diferite
$\overline{M}\cdot\overline{F}=M_xX+M_yY+M_zZ=0$	$X^2+Y^2+Z^2\neq0$ O rezultantă așezată în lungul axei centrale
	$X^2+Y^2+Z^2=0$, $M_x^2+M_y^2+M_z^2\neq0$ Un cuplu
	$X^2+Y^2+Z^2=0$, $M_x^2+M_y^2+M_z^2=0$. Sistem echivalent cu zero

În acest fel, pentru ca un sistem arbitrar să fie în echilibru, adică forțele să se echilibreze, este necesar și suficient ca

$$\left.\begin{array}{l} X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,\\ M_x=0,\ M_y=0,\ M_z=0. \end{array}\right\} \tag{11.11}$$

§ 49. Echilibrul unui sistem arbitrar de forțe. Din paragraful precedent rezultă că ecuațiile vectoriale de echilibru ale unui sistem arbitrar de forțe, aplicate unui solid, sînt

$$\overline{F}=0,\ \overline{M}=0. \tag{11.12}$$

Aceste două ecuații vectoriale sînt echivalente cu următoarele șase ecuații scalare

$$\left.\begin{array}{c} X=\sum_n X_n=0,\quad Y=\sum_n Y_n=0,\quad Z=\sum_n Z_n=0,\\ M_x=\sum_n(y_nZ_n-z_nY_n)=0,\quad M_y=\sum_n(z_nX_n-x_nZ_n)=0,\\ M_z=\sum_n(x_nY_n-y_nX_n)=0. \end{array}\right\} \tag{11.13}$$

Subliniem, că la alcătuirea ecuațiilor (11.13), nu este necesar să se proiecteze forțele și momentele forțelor numaidecît pe axele de coordonate; pentru aceasta se pot folosi orice drepte, cu condiția ca între ele să nu existe drepte paralele și ca ele să nu fie paralele la același plan. Această observație este folositoare mai ales la formarea ecuațiilor momentelor. Să presupunem, de exemplu, că într-o problemă dată oarecare, de echilibru, există cinci reacțiuni și se poate duce o astfel de dreaptă D care intersectează patru din cele cinci suporturi ale reacțiunilor.

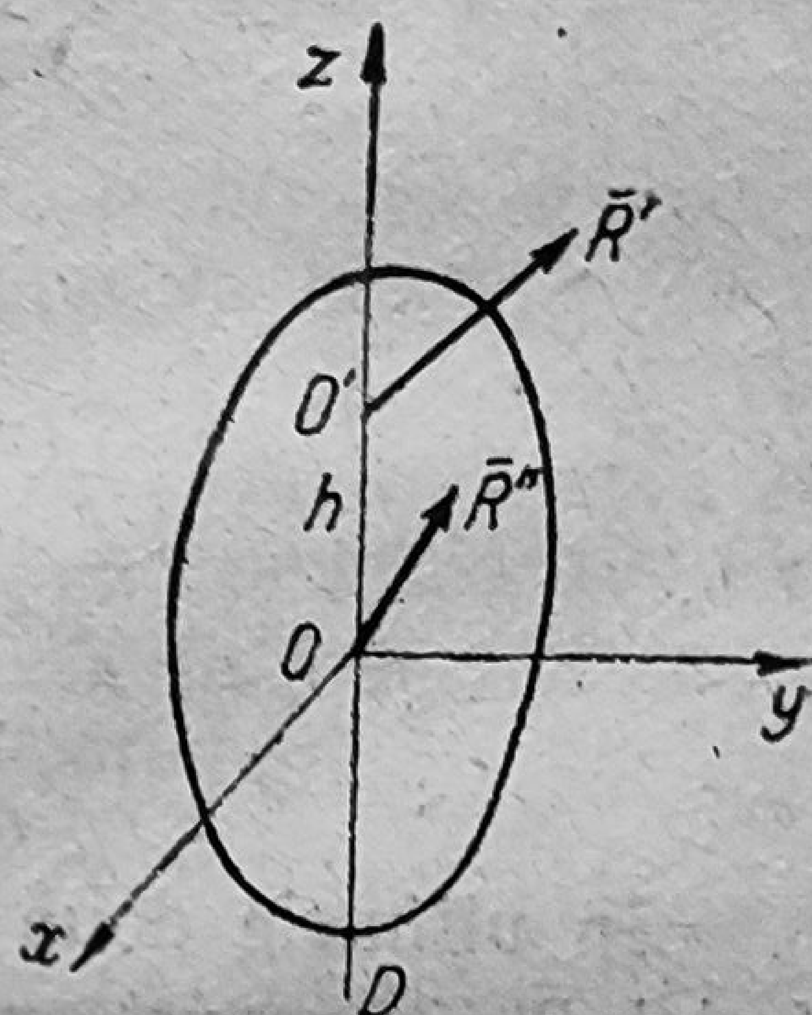


Fig. 99

Scriind ecuația de momente în raport cu axa D și egalînd cu zero suma momentelor tuturor forțelor în raport cu axa D, vom obține o ecuație de gradul I, în care singura reacțiune necunoscută va fi a cincea reacțiune, deoarece momentele în raport cu axa D ale celor patru reacțiuni care intretaie axa D, vor fi egale cu zero (§ 11). Este evident, că din această ecuație nu este prea greu de determinat această a cincea reacțiune. Dacă, de exemplu, se poate duce o dreaptă D, care intersectează toate suporturile reacțiunilor din problema dată, ecuația momentelor în raport cu această axă D, ca una care nu conține reacțiunile, va exprima o condiție de echilibru.

Să examinăm trei cazuri importante de echilibru ale unui solid rigid.

1. *Echilibrul unui solid cu o axă fixă.* Pentru ca un solid să aibă o axă fixă, este suficient să fixăm două puncte ale acestui solid; atunci dreapta care trece prin aceste două puncte va fi fixă. Notăm punctele de fixare prin O și O' unde $OO'=h$. Deoarece asupra corpului acționează forțe, în punctele O' și O se dezvoltă reacțiunile R' și $\bar{R}''$, necunoscute ca mărime, direcție și sens. Din cele indicate mai înainte, rezultă că este suficient să egalăm cu zero suma momentelor tuturor forțelor în raport cu dreapta D, care trece prin punctele O' și O, ca să obținem condiția de echilibru. Introducem sistemul ortogonal de axe de coordonate, a cărui origine o vom lua în punctul fix O și axa Oz o vom dirija de-a lungul dreptei OO' (fig. 99). La această alegere a axelor de coordonate, momentele forței $\bar{R}''$, în raport cu toate cele

trei axe, vor fi egale cu zero, iar momentul forței $\bar{R}'$ în raport cu axa Oz va fi egal cu zero. Notăm proiecțiile forțelor necunoscute $\bar{R}'$ și $\bar{R}''$ pe aceste axe, respectiv prin (X', Y', Z') și (X'', Y'', Z'').

Notînd proiecțiile forțelor date $\bar{F}_n$ prin (X_n, Y_n, Z_n), iar coordonatele punctelor lor de aplicație A_n prin (x_n, y_n, z_n), avem din ecuația (11.13):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_n X_n + X' + X'' = 0, \\ &\sum_n Y_n + Y' + Y'' = 0, \\ &\sum_n Z_n + Z' + Z'' = 0, \\ &\sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n) - hY' = 0, \\ &\sum_n (z_n X_n - x_n Z_n) + hX' = 0, \end{aligned}\right\} \quad (11.14)$$

$$M_z = \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) = 0. \quad (11.15)$$

In ultimele două formule (11.14), la calcularea momentelor forței $\bar{R}'$, în raport cu axele Ox și Oy după formulele $M_x = yZ - zY$ și $M_y = zX - xZ$, am ținut seamă de coordonatele punctului O' și anume, $x=0$, $y=0$ și $z=h$, ceea ce a dus la termenii $-hY'$ și $+hX'$. După cum s-a arătat mai înainte, reacțiunile nu au putut interveni în ecuația (11.15) a momentelor în raport cu axa Oz; de aceea această ecuație exprimă condiția de echilibru. Astfel, ajungem la următoarea teoremă:

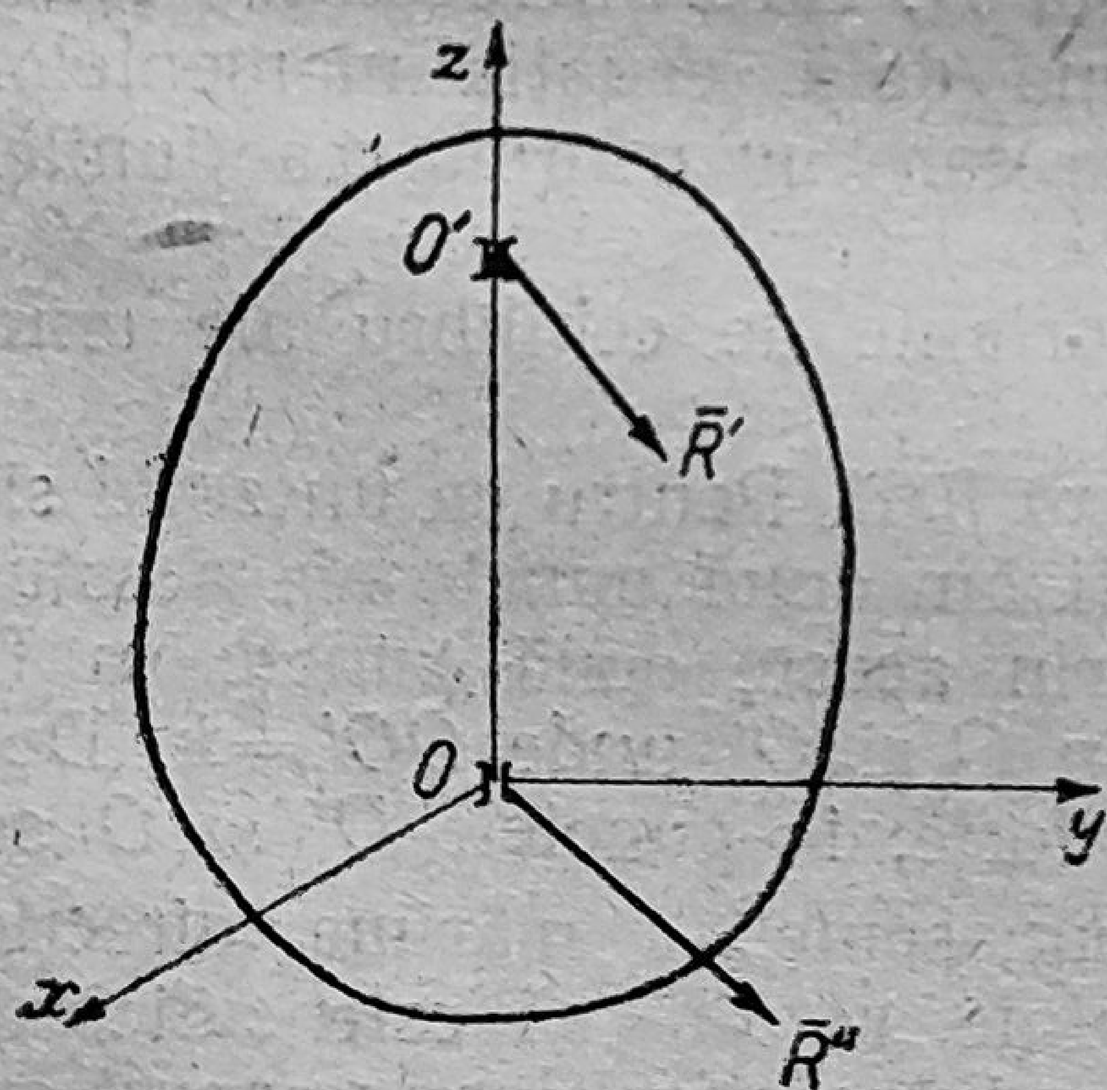


Fig. 100

Pentru ca un solid care se poate roti în jurul unei axe fixe să fie în echilibru, suma momentelor tuturor forțelor date, care acționează asupra solidului, în raport cu această axă, trebuie să fie egală cu zero.

Cele cinci ecuații (11.14) servesc pentru determinarea celor șase proiecții (X', Y', Z') și (X'', Y'', Z'') ale reacțiunilor; prin urmare, această problemă este static nedeterminată. Din ultimele două ecuații (11.14) vom determina mărimile X' și Y'; introducîndu-le în primele două ecuații vom găsi pe X'' și Y'',

însă a treia ecuație ne dă suma $Z'+Z''$, iar termenii Z' și Z'' nu pot fi determinați separați. Ultimul rezultat este evident deoarece la mărimile Z' și Z'' se poate totdeauna adăuga, respectiv scădea, cîte o mărime arbitrară. În suma $Z'+Z''$ aceste două mărimi suplimentare vor da zero, dar fiecare din ele schimbă proiecțiile Z' și Z''. Deci Z' și Z'' separate, în cazul solidului rigid, rămîn nedeterminate. Dacă însă corpul este elastic, atunci nu se pot adăuga aceste două forțe egale și de sens contrar dirijate în lungul axei Oz, fără a deforma solidul.

2. *Echilibrul unui solid care poate avea o mișcare de șurub.* Păstrînd notațiile din problema precedentă, vom lua axa Oz ca axă de rotație și de alunecare (fig. 100).

În acest caz reacțiunile $\bar{R}'$ și $\bar{R}''$ vor fi normale la axa Oz, deoarece alunecarea se face fără frecare; de aceea proiecțiile forțelor $\bar{R}'$ și $\bar{R}''$ vor fi $(X', Y', 0)$ și $(X'', Y'', 0)$. Introducînd aceste valori în ecuațiile (11.14) și (11.15) vom obține:

$$\left.\begin{aligned} \sum_n X_n+X'+X''=0,\\ \sum_n Y_n+Y'+Y''=0,\\ Z-\sum_n Z_n=0;\\ \sum_n(y_nZ_n-z_nY_n)-hY'=0,\\ \sum_n(z_nX_n-x_nZ_n)+hX'=0,\\ M_z=\sum_n(x_nY_n-y_nX_n)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

Vedem că ecuația a treia și a șasea (11.16) nu vor conține proiecțiile reacțiunilor; deci acestea sînt condițiile de echilibru

$$\begin{aligned} Z-\sum_n Z_n=0,\\ M_z=\sum_n(x_nY_n-y_nX_n)=0. \end{aligned} \qquad (11.17)$$

De aici obținem:

Pentru ca un solid care poate avea o mișcare de șurub să fie în echilibru, suma proiecțiilor tuturor forțelor date pe axa de alunecare și de rotație și suma momentelor tuturor forțelor date în raport cu această axă, trebuie să fie egale cu zero.

3. *Echilibrul unui solid cu un punct fix.* Luăm punctul fix O al solidului ca origine a sistemului ortogonal de coordonate

Oxyz. În punctul de fixare *O* se dezvoltă reacțiunea $\overline{R}''$, necunoscută ca modul, direcție și sens; notăm proiecțiile forței $\overline{R}''$ prin (X'', Y'', Z''). Ecuațiile de echilibru vor fi:

$$\sum_n X_n + X'' = 0, \quad \sum_n Y_n + Y'' = 0, \quad \sum_n Z_n + Z'' = 0; \qquad (11.18)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \sum_n (y_n Z_n - z_n Y_n) = 0, \\ M_y &= \sum_n (z_n X_n - x_n Z_n) = 0, \\ M_z &= \sum_n (x_n Y_n - y_n X_n) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.19)$$

Ecuațiile (11.18) determină proiecțiile reacțiunii $\overline{R}''$, iar ecuațiile (11.19) sînt condițiile de echilibru. Astfel:

Pentru ca un solid cu un punct fix să fie în echilibru, sumele momentelor forțelor date în raport cu trei axe care trec prin punctul fix, trebuie să fie egale cu zero.

§ 50. Exemple. 38. Să se reducă la un sistem mai simplu sistemul de patru forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, F_4 ale căror proiecții sînt respectiv egale cu:

$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$\overline{F}_3$	$\overline{F}_4$
$X_1=4$	$X_2=4$	$X_3=2$	$X_4=-6$
$Y_1=5$	$Y_2=0$	$Y_3=1$	$Y_4=1$
$Z_1=6$	$Z_2=2$	$Z_3=7$	$Z_4=-2$

și care sînt aplicate în punctele A_1, A_2, A_3, A_4, cu coordonatele:

A_1	A_2	A_3	A_4
$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=0$	$x_4=5$
$y_1=2$	$y_2=3$	$y_3=-1$	$y_4=4$
$z_1=3$	$z_2=1$	$z_3=2$	$z_4=-1.$

Mai întîi vom calcula proiecțiile rezultantei după formulele (11.4) și vom obține:

$$X = 4+4+2-6 = +\ 4,$$
$$Y = 5+0+1+1 = +\ 7,$$
$$Z = 6+2+7-2 = +13.$$

Obținem astfel modulul *F* al rezultantei:

$$F = \sqrt{4^2+7^2+13^2} = \sqrt{234} = 15{,}297.$$

Cosinușii unghiurilor formate de rezultantă cu axele de coordonate vor fi egale cu:

$$\cos\alpha=+\frac{4}{\sqrt{234}}, \quad \cos\beta=+\frac{7}{\sqrt{234}}, \quad \cos\gamma=+\frac{13}{\sqrt{234}};$$

de aici găsim:

$$\alpha=74°50', \quad \beta=62°46', \quad \gamma=31°48',$$

dar știm că axa centrală a sistemului formează aceleași unghiuri cu axele de coordonate. Vom determina acum momentele forțelor în raport cu axele de coordonate și cu ajutorul formulelor (11.15) vom exprima proiecțiile momentului rezultant al sistemului pe axele de coordonate

$$\begin{aligned}
M_{1x}&=2\cdot6-3\cdot5 &&=-3\\
M_{2x}&=3\cdot2-1\cdot0 &&=+6\\
M_{3x}&=-1\cdot7-2\cdot1 &&=-9\\
M_{4x}&=4\cdot(-2)+1\cdot1 &&=-7\\
\hline
M_x&= &&=-13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{1y}&=3\cdot4-1\cdot6 &&=+6\\
M_{2y}&=1\cdot4-2\cdot2 &&=0\\
M_{3y}&=2\cdot2-0\cdot7 &&=+4\\
M_{4y}&=-1\cdot(-6)-5\cdot(-2) &&=+16\\
\hline
M_y&= &&=+26
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{1z}&=1\cdot5-2\cdot4 &&=-3\\
M_{2z}&=2\cdot0-3\cdot4 &&=-12\\
M_{3z}&=0\cdot1+1\cdot2 &&=+2\\
M_{4z}&=5\cdot1-4\cdot(-6) &&=+29\\
\hline
M_z&= &&=+16
\end{aligned}$$

Scriind expresia (11.10) a celui de-al doilea invariant, vom avea:

$$\overline{M}\cdot\overline{F}=M_xX+M_yY+M_zZ=-13\cdot4+26\cdot7+16\cdot13=+338,$$

adică avem:

$$Fm=338,$$

De aici găsim:

$$m=\frac{338}{\sqrt{234}}=22,096.$$

Deoarece al doilea invariant nu este egal cu zero, sistemul de patru forțe dat se reduce la un dinam. De-a lungul axei centrale care formează cu axele de coordonate unghiurile $\alpha=74°50'$, $\beta=62°46'$, $\gamma=31°48'$, acționează rezultanta $F=15,297$, iar momentul cuplului $m=22,096$ este coliniar cu rezultanta. Observăm, că dacă pentru m s-ar obține o valoare negativă, atunci aceasta ne-ar indica că sensul momentului $\overline{m}$ este opus sensului

forței $\bar{F}$, deoarece $m=M\cos(\widehat{\bar{F}\cdot\bar{M}})$. Pentru parametrul p sau pasul dinamului avem:

$$p=\frac{m}{F}=\frac{338}{\sqrt{234}}:\sqrt{234}=\frac{338}{234}=1{,}444\,.$$

Pentru a cunoaște poziția axei centrale este necesar să se găsească coordonatele unui punct oarecare al axei, de exemplu, punctul de intersecție cu planul Oxy. Pentru aceasta scriem ecuația axei centrale sub forma (11.9); făcînd înlocuirile numerice obținem:

$$\frac{-13-(13y'-7z')}{4}=\frac{26-(4z'-13x')}{7}=\frac{16-(7x'-4y')}{13}\,.$$

Considerînd în acest caz $z'=0$, vom obține două ecuații pentru determinarea coordonatelor x' și y':

$$\frac{-13-13y'}{4}=\frac{26+13x'}{7}\,,\quad \frac{-13-13y'}{4}=\frac{16-7x'+4y'}{13}\,,$$

sau

$$4x'+7y'=-15,$$

$$28x'-185y'=233\,.$$

Rezolvînd aceste ecuații, vom găsi coordonatele y', y' ale urmei axei centrale pe planul Oxy, și anume:

$$x'=-1{,}223,\quad y'=-1{,}444\,.$$

De aici vom avea ecuația axei centrale sub formă canonică

$$\frac{x+1{,}223}{4}=\frac{y+1{,}444}{7}=\frac{z}{13}\,.$$

Astfel, problema de reducere a sistemului de patru forțe date este complet rezolvată.

39. Să descompunem forța $\bar{F}$ după șase direcții date în spațiu. Fie $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \ldots, (\ _6, \beta_6, \gamma_6)$ unghiurile formate de direcțiile acestor drepte $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$ cu axele de coordonate și $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_6$ forțele componente, ale căror mărimi trebuie determinate. Este evident că sistemul format din șapte forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6 - \bar{F}$ trebuie să fie în echilibru, adică trebuie să satisfacă ecuațiile (11.13). Deoarece avem:

$$X_n=F_n\cos\alpha_n,\quad Y_n=F_n\cos\beta_n,\quad Z_n=F_n\cos\gamma_n,$$

vom obține:

$$\sum_n F_n\cos\alpha_n-X=0\,,$$

$$\sum_n F_n\cos\beta_n-Y=0\,,$$

$$\sum_n F_n\cos\gamma_n-Z=0\,;$$

$$\sum_n F_n (y_n \cos \gamma_n - z_n \cos \beta_n) - (yZ - zY) = 0,$$
$$\sum_n F_n (z_n \cos \alpha_n - x_n \cos \gamma_n) - (zX - xZ) = 0,$$
$$\sum_n F_n (x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n) - (xY - yX) = 0.$$

Aceste şase ecuaţii de gradul I cu şase necunoscute $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6$ admit una şi numai o singură soluţie. Problema este rezolvabilă de fiecare dată cînd sistemul de şase ecuaţii liniare, considerate, admite o singură soluţie finită. Din considerentele expuse la începutul paragrafului precedent, reiese că numai în cazuri excepţionale există o dreaptă D care întretaie cele şase suporturi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$ ale forţelor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_6$ fără a intersecta şi suportul Δ al forţei date $\bar{F}$ sau al forţei $-\bar{F}$. In adevăr, luăm momentul rezultant al întregului sistem de şapte forţe care se echilibrează $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_6 - \bar{F}$ în raport cu axa D; acest moment trebuie să fie egal cu zero. Deoarece momentele primelor şase forţe în raport cu axa $\bar{D}$ sînt identic egale cu zero (§ 11), ecuaţia de echilibru se reduce la egalarea cu zero a momentului în raport cu axa D a forţei $\bar{F}$, de unde urmează, că trebuie să avem în general $\bar{F}=0$, adică problema îşi pierde sensul.

40. Să se efectueze descompunerea arătată în problema precedentă, cînd primele trei forţe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ sînt situate în acelaşi plan, iar celelalte trei forţe $\bar{F}_4, \bar{F}_5, F_6$ sînt concurente într-un punct A. Coborîm din punctul A perpendiculara pe planul primelor trei forţe; fie O punctul de intersecţie al acestei perpendiculare cu planul forţelor. Luăm punctul O ca origine a sistemului ortogonal de coordonate, axele Ox şi Oy le vom duce în planul primelor trei forţe, iar axa Oz trece prin punctul A. Atunci vom avea:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{\pi}{2}, \quad z_1 = z_2 = z_3 = 0,$$
$$x_4 = x_5 = x_6 = 0, \quad y_4 = y_5 = y_6 = 0, \quad z_4 = z_5 = z_6 = h.$$

Ecuaţiile din exemplul 39 vor fi de forma:

$$\sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos \alpha_n + \sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \alpha_n = X,$$
$$\sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos \beta_n + \sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \beta_n = Y,$$
$$\sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \gamma_n = Z,$$
$$-h \sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \beta_n = yZ - zY,$$
$$h \sum_{n=4}^{n=6} F_n \cos \alpha_n = zX - xZ,$$
$$\sum_{n=1}^{n=3} F_n (x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n) = xY - yX.$$

Din ecuațiile: a treia, a patra și a cincea, vom determina pe F_4, F_5 și F_6 și, apoi, din celelalte trei ecuații rămase, vom determina necunoscutele F_1, F_2, F_3. Astfel, în acest caz problema de a rezolva șase ecuații cu șase necunoscute, s-a redus la rezolvarea succesivă a două sisteme de trei ecuații cu cîte trei necunoscute. Pentru rezolvarea problemei se mai poate propune încă și următoarea metodă geometrică. Vom nota prin B_3 punctul de intersecție al dreptelor Δ_1 și Δ_2, prin B_1 punctul de intersecție al dreptelor Δ_2 și Δ_3, prin B_2 punctul de intersecție al dreptelor Δ_3 și Δ_1, unde Δ_n este suportul forței $\bar{F}_n$. Ducem dreapta D_3 prin punctul A și punctul B_3 și pentru scrierea ecuației de echilibru a celor șapte forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_6 - \bar{F}$ egalăm cu zero momentul rezultant al acestor forțe în raport cu dreapta D_3. Deoarece momentele tuturor forțelor în afară de forțele $\bar{F}_3$ și $-\bar{F}$ în raport cu dreapta D_3 sînt identic egale cu zero, din această ecuație vom determina pe F_3. Notînd cu D_2 dreapta care trece prin punctele A și B_2 și cu D_1 dreapta care trece prin punctele A și B_1, vom putea găsi exact prin același procedeu modulele F_2 și F_1. Pentru a găsi modulele forțelor $\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$, $\bar{F}_6$, vom observa că ele trebuie să aibă o rezultantă care trece prin punctul A; prin urmare, forțele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ și $-\bar{F}$ trebuie să se reducă de asemenea la o rezultantă al cărui suport trece prin punctul A, cele două rezultante avînd aceleași module și direcții și fiind de sens contrar. De aceea, compunînd forțele $-\bar{F}_1$, $-\bar{F}_2$, $-\bar{F}_3$ și $\bar{F}$, vom obține rezultanta forțelor $\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$, $\bar{F}_6$, cunoscute ca direcție, dar necunoscute ca modul. Astfel, problema se reduce la construirea unui paralelipiped cu diagonala și cu direcțiile muchiilor cunoscute, ceea ce, în general, este totdeauna posibil.

41. O placă dreptunghiulară de greutate P este suspendată de patru fire legate cu unul din capetele lor de capetele A_1, A_2, A_3, A_4 ale plăcii; celelalte capete sînt trecute prin patru scripeți și de ele sînt atîrnate greutățile P_1, P_2, P_3 și P_4. Se cere ca acea placă $A_1 A_2 A_3 A_4$ să rămînă în echilibru și să fie orizontală. Se cunoaște lungimea plăcii care este egală cu $2a$, lățimea, $2b$; centrul de greutate al plăcii încărcate se află în punctul C din planul ei, firele sînt așezate în plane care conțin respectiv muchiile plăcii $A_2 A_3$ și $A_4 A_1$, cele două fire din dreapta formează cu planul orizontal unghiurile α, iar cele din stînga, unghiurile β (fig. 101). Alegem originea

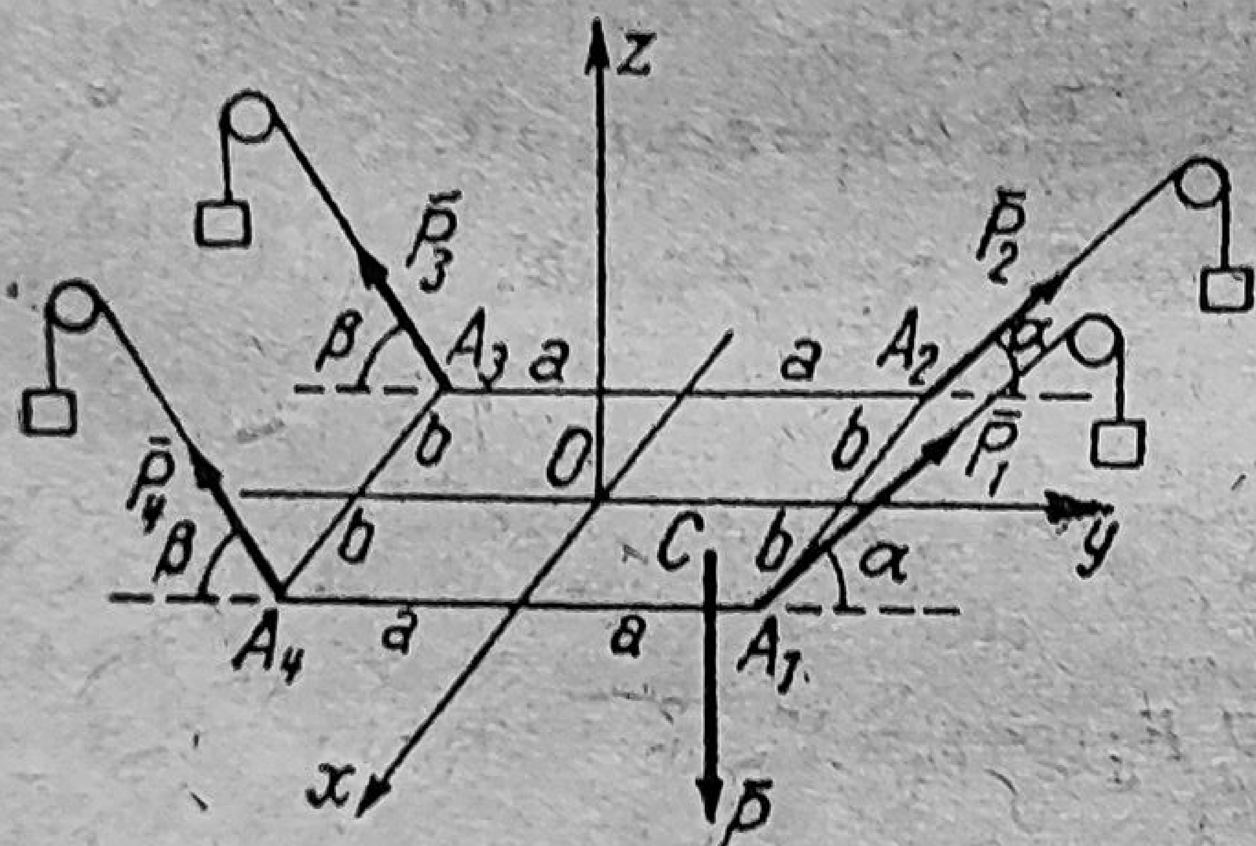


Fig. 101

sistemului ortogonal de coordonate $Oxyz$ în centrul dreptunghiului $A_1A_2A_3A_4$; axa Ox o vom dirija paralel cu muchia A_2A_1, axa Oy paralel cu muchia A_3A_2 și axa Oz perpendicular cu planul plăcii adică pe verticală în sus. Fie (x, y) coordonatele punctului C. Este evident că proiecțiile tuturor forțelor pe axa Ox sînt egale cu zero; proiecțiile tuturor forțelor pe axa Oy sînt egale cu:

$$P_1 \cos\alpha, \quad P_2 \cos\alpha, \quad -P_3 \cos\beta, \quad -P_4 \cos\beta, \quad 0,$$

iar proiecțiile tuturor forțelor pe axa Oz vor fi:

$$P_1 \sin\alpha, \quad P_2 \sin\alpha, \quad P_3 \sin\beta, \quad P_4 \sin\beta, \quad -P.$$

Utilizînd ecuațiile (11.13) vom obține următorul sistem:

$$\begin{aligned}(P_1+P_2)\cos\alpha-(P_3+P_4)\cos\beta&=0,\\(P_1+P_2)\sin\alpha+(P_3+P_4)\sin\beta-P&=0,\\(P_1+P_2)a\sin\alpha-(P_3+P_4)a\sin\beta-yP&=0,\\-(P_1-P_2)b\sin\alpha+(P_3-P_4)b\sin\beta+xP&=0,\\(P_1-P_2)b\cos\alpha+(P_3-P_4)b\cos\beta&=0.\end{aligned}$$

Din aceste ecuații se pot separa două perechi de ecuații:

$$\begin{aligned}(P_1+P_2)\cos\alpha-(P_3+P_4)\cos\beta&=0,\\(P_1+P_2)\sin\alpha+(P_3+P_4)\sin\beta&=P,\\(P_1-P_2)\cos\alpha+(P_3-P_4)\cos\beta&=0,\\(P_1-P_2)\sin\alpha-(P_3-P_4)\sin\beta&=P\frac{x}{b}\end{aligned}$$

care permit să se determine modulele forțelor $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$, în timp ce ecuația a treia din cele cinci ecuații inițiale de echilibru va fi condiția de echilibru.

Vom obține:

$$P_1+P_2=P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad P_3+P_4=P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$P_1-P_2=P\frac{x}{b}\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad P_3-P_4=-P\frac{x}{b}\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

De aici găsim:

$$P_1=\frac{1}{2}P\left(1+\frac{x}{b}\right)\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad P_3=\frac{1}{2}P\left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$P_2=\frac{1}{2}P\left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad P_4=\frac{1}{2}P\left(1+\frac{x}{b}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Introducînd valoarea găsită a sumelor P_1+P_2 și P_3+P_4 în ecuația a treia vom avea:

$$P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}-P\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=P\frac{y}{a},$$

sau

$$y=a\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Din această condiție de echilibru vedem că pentru $\alpha>\beta$ trebuie să avem $y>0$ și pentru $\alpha<\beta$ trebuie să avem $y<0$. Pentru $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ valorile pentru modulele lui $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ capătă forme nedeterminate, ceea ce și trebuie să se întîmple conform exemplului 26 din cap. VII.

CAPITOLUL XII

CAZURI PARTICULARE

§ 51. Determinarea forțelor interioare. In acest capitol vom examina trei cazuri particulare de aplicare a studiului despre echilibru. Vor arăta cum se pot determina forțele interioare ce acționează într-un solid căruia i se aplică forțe exterioare date care se echilibrează, cum se poate studia echilibrul unui sistem de solide și în sfîrșit cum se poate folosi principiul lui Torricelli pentru studiul echilibrului sistemelor de corpuri grele.

Fie un solid oarecare căruia i se aplică forțe exterioare date; presupunem că sub acțiunea acestor forțe date solidul este în echilibru. Să secționăm solidul astfel încît acesta să fie împărțit în două părți I și II (fig. 102) și să examinăm în mod separat partea I. Deoarece întregul solid se găsește în echilibru, tot în echilibru este și fiecare parte a lui, deci și partea I. Asupra părții I acționează forțe exterioare efectiv aplicate cunoscute, precum și forțele datorită acțiunii părții a II-a asupra părți I, care sînt necunoscute. Din teoria generală a reducerii forțelor (§ 47) reiese că forțele datorită acțiunii părții a II-a asupra

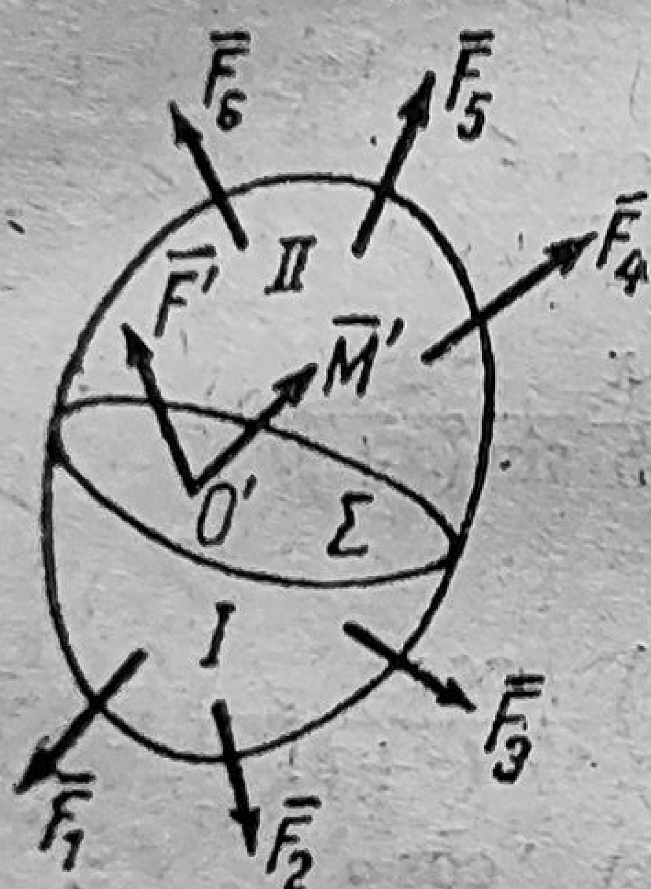


Fig. 102

părții I se pot înlocui printr-o singură forță F', aplicată într-un punct arbitrar O', pe care îl vom lua pe suprafața de separație Σ și un cuplu de moment $\overline{M}'$. Forțele cu care acționează partea a II-a asupra părții I se numesc *forțe interioare;* am văzut că *aceste forțe interioare care acționează pe secțiunea* Σ *pot fi în general reduse la forța rezultantă* $\overline{F}'$ *aplicată în punctul arbitrar* O' *al secțiunii* Σ *și la un cuplu de moment* $\overline{M}'$.

Din fizică se știe că acțiunea este egală cu reacțiunea; de aceea acțiunea părții I asupra părții a II-a se reduce la rezultanta $-F'$ și la cuplul de moment $-\overline{M}'$. Este evident că forțele

de acțiune ale părții I asupra părții a II-a sînt de asemenea forțe interioare. Determinarea rezultantei $\overline{F'}$ și a momentului $\overline{M'}$ nu este grea. Pentru aceasta să formăm ecuațiile de echilibru sub formă vectorială, pentru partea I; luînd ca punct de reducere punctul O' vom obține:

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n+\overline{F'}=0, \\ \overline{M}_1+\overline{M}_2+\ldots+\overline{M}_n+\overline{M'}=0, \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

unde toți termeni afară de $\overline{F'}$ și $\overline{M'}$ se referă la forțele exterioare cunoscute, ce acționează asupra părții I. Este evident că în formă analitică vom obține șase ecuații pentru determinarea celor trei proiecții X', Y', și Z' ale forței $\overline{F'}$ și a celor trei proiecții M'_x, M'_y, M'_z, ale momentului $\overline{M'}$.

Scriind aceleași ecuații pentru partea a II-a care se găsește sub acțiunea forțelor exterioare date și ale forțelor de acțiune ale părții I asupra părții a II-a, vom obține rezultanta și momentul acestor forțe interioare egale ca mărime și direcție cu $\overline{F'}$ și $\overline{M'}$, dar de sens contrar. Astfel, putem determina totdeauna forțele interioare care acționează asupra oricărei secțiuni făcute în interiorul unui solid oarecare căruia i se aplică un sistem dat de forțele exterioare în echilibru. De exemplu, fie un fir greu a cărui lungime este egală cu l, iar greutatea unității de lungime este egală cu p; firul este atîrnat cu o extremitate de tavan, iar la cealaltă extremitate susține o greutate P (fig. 103); să se găsească forțele interioare în orice secțiune a acestui fir. Pentru aceasta presupunem că firul este întins în poziția lui de echilibru.

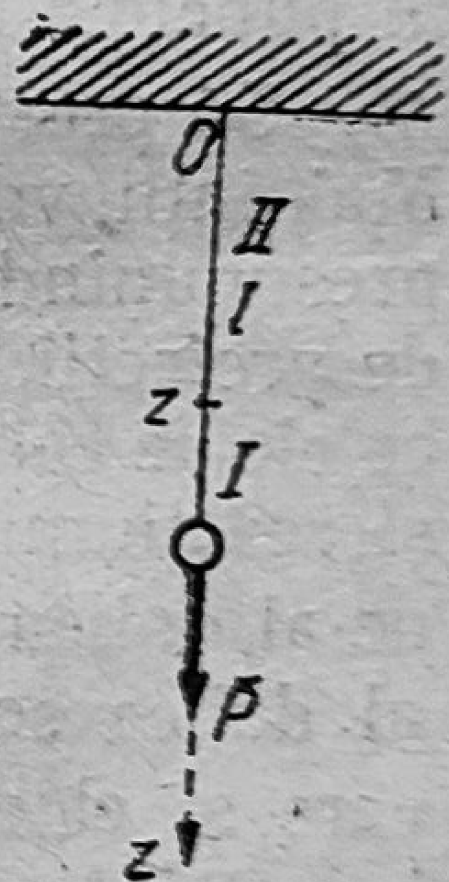


Fig. 103

Să luăm originea O a coordonatelor în punctul de fixare a firului de tavan și să ducem axa Oz de-a lungul firului; să găsim forțele interioare care acționează în secțiunea de coordonată z. Să cercetăm echilibrul părții I, asupra căreia acționează forțe exterioare: greutatea P și greutatea $p\,(l-z)$ a părții I a firului și o forță interioară necunoscută de modul F'. Proiectînd toate forțele pe axa Oz, obținem ecuația de echilibru a părții I sub forma:

$$P+p(l-z)-F'=0,$$

de unde avem:

$$F'=P+p\,(l-z).$$

Examinînd echilibrul părții a II-a tragem concluzia că asupra ei acționează forțe exterioare: reacțiunea în punctul 0 egală cu $P+pl$, greutatea pz a părții a II-a a firului și forța interioară de modul F' dirijată acum în același sens cu axa Oz; ecuația de echilibru a părții a II-a va fi:

$$-(P+pl)+pz+F'=0,$$

sau

$$F'=P+p(l+z),$$

adică obținem același rezultat pentru modulul rezultantei forțelor interioare.

§ 52. Echilibrul unui sistem de solide. Problema studiului echilibrului unui sistem de solide are multe asemănări cu problema cercetată anterior, a determinării forțelor interioare, deoarece necunoscutele căutate în această problemă de echilibru a sistemului vor fi mai ales reacțiunile interioare care se dezvoltă în punctele de contact ale diferitelor solide ale sistemului.

Să presupunem că sistemul constă, de exemplu, din trei solide. Mai întîi vom forma ecuațiile de echilibru ale întregului sistem, presupunînd că sistemul a devenit rigid. Vom obține șase ecuații de proiecții, în care nu vor interveni reacțiunile interioare, deoarece ele se echilibrează două cîte două, conform principiului acțiunii și reacțiunii; forțele cu care acționează primul solid asupra celui de-al doilea sînt egale și direct opuse forțelor cu care acționează al doilea solid asupra primului etc. Separăm, apoi, primul solid care și el este în echilibru dacă întregul sistem este în echilibru. Pentru a scrie ecuațiile de echilibru este necesar să introducem în afară de forțele exterioare și acele forțe cu care au acționat asupra lui al doilea și al treilea solid. În acest fel vom obține încă șase ecuații în care vor intra reacțiunile interioare necunoscute și anume forțele de interacțiune dintre primul solid și celelalte două solide. Separăm, apoi, al doilea solid. Pentru a scrie ecuațiile de echilibru este necesar să introducem în afară de forțele exterioare ce îi sînt aplicate și forțele cu care acționează primul și al treilea solid asupra celui de-al doilea. Astfel, vom obține încă șase ecuații în care vor intra reacțiunile interioare necunoscute și anume forțele de interacțiune dintre al doilea solid și celelalte două solide. În același timp este evident că forțele cu care acționează cel de-al doilea solid asupra primului

solid sînt egale ca modul și direcție dar opuse ca sens, cu forțele cu care acționează primul solid asupra celui de-al doilea solid. Această operație o vom folosi pentru toate solidele sistemului. Dacă numărul solidelor este egal cu n, atunci numărul total de ecuații va fi $6+6n$; dacă problema este plană, atunci numărul ecuațiilor va fi egal cu $3+3n$.

Cele $6+6n$ ecuații sau cele $3+3n$ ecuații obținute nu vor fi toate independente, deoarece ecuațiile de echilibru scrise pentru întregul sistem vor fi consecințe ale celorlalte ecuații de echilibru. Numărul ecuațiilor poate fi și mai mic, dacă unele din ele se transformă în identități sau sînt consecințele altor ecuații. Dacă din ecuațiile obținute putem determina toate reacțiunile, atunci problema poate fi considerată static determinată; în caz contrar, problema va fi static nedeterminată. Vedem că această metodă în esența ei este identică cu metoda expusă în paragraful precedent, pentru determinarea forțelor interioare care acționează într-un solid.

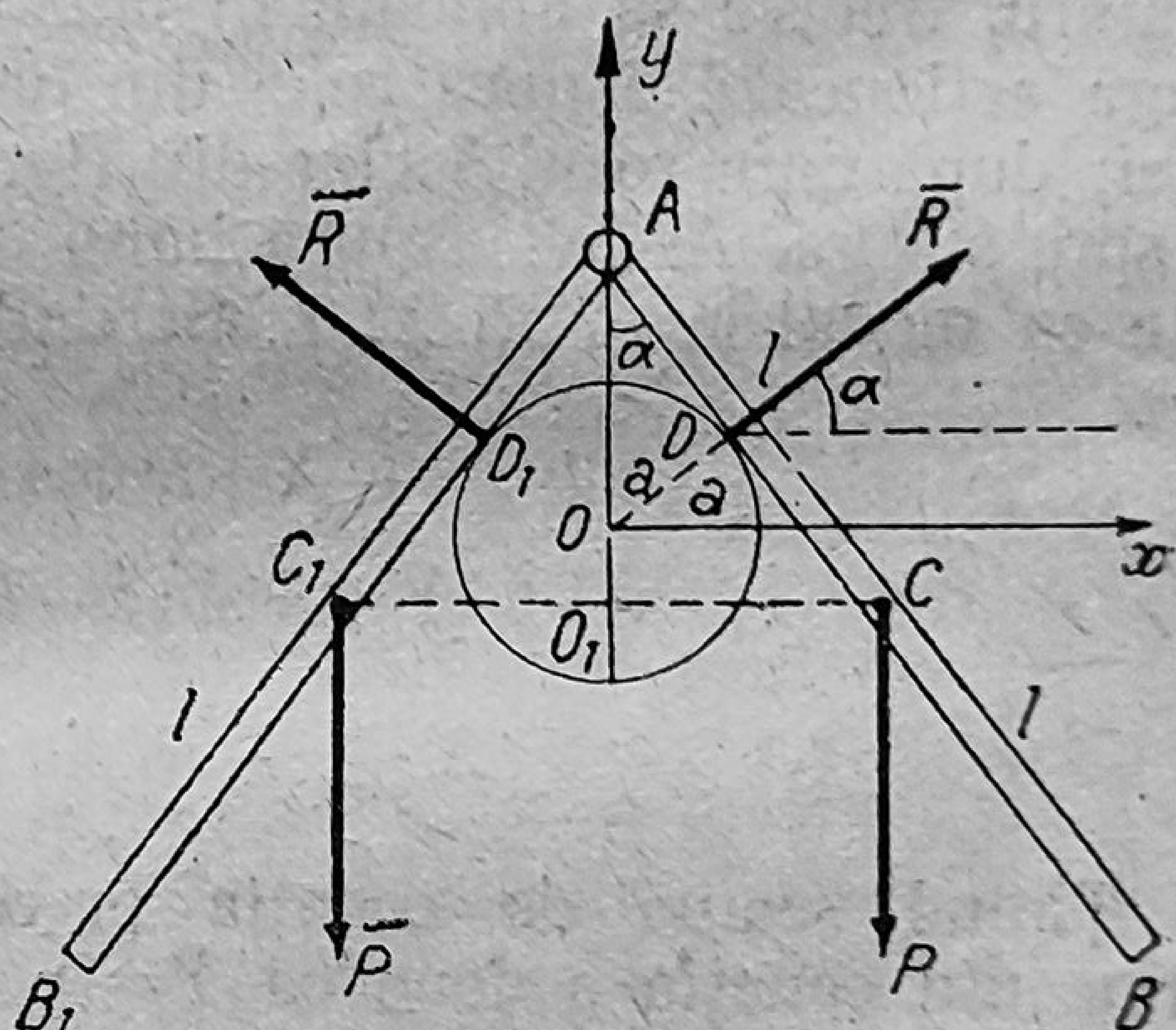


Fig. 104

Pentru lămurirea celor expuse să examinăm următorul exemplu. Pe un cilindru de rază a sînt așezate două bare identice AB și AB_1, avînd greutățile egale cu P și lungimile $2l$; barele sînt legate în punctul A printr-o articulație. Să găsim unghiul format de bare în poziția de echilibru, presupunînd că punctul A și punctul O, centrul cilindrului, se află pe aceeași verticală și că neglijăm frecarea (fig. 104). Fie C și C_1 centrele de greutate ale barelor AB și $AB_1 \measuredangle OAD=\alpha$. În punctele D și D_1 se dezvoltă reacțiunile exterioare care sînt normale la barele AB și AB_1, și ale căror module sînt egale între ele; notăm aceste module prin R. Considerînd mai întîi sistemul celor două bare în ansamblu, formăm ecuațiile lui de echilibru. Alegem axele de coordonate Oxy, astfel cum se arată în fig. 104. Proiectînd toate forțele pe

axele Ox şi Oy şi luînd momentele acestor forţe în raport cu punctul O, vom obţine:

$$R\cos\alpha - R\cos\alpha = 0,$$

$$2R\sin\alpha - 2P = 0,$$

$$P \cdot O_1C_1 - P \cdot O_1C = 0.$$

Vedem că prima şi a treia ecuaţie se transformă în identităţi şi rămîne numai ecuaţia a doua care simplificată cu 2 va căpăta forma:

$$R\sin\alpha - P = 0.$$

Să izolăm bara din dreapta de cea din stînga şi să studiem numai echilibrul barei din dreapta AB. Pentru a menţine bara AB în echilibru, trebuie să aplicăm în punctul A forţa cu care bara din stînga acţionează asupra celei din dreapta. Fie X şi Y proiecţiile forţei; după cum rezultă clar din fig. 104, X trebuie să fie orientat spre stînga. Astfel, asupra barei din dreapta acţionează patru forţe cu modulele P, R, X, Y. Scriind ecuaţiile de echilibru, vom avea:

$$-X + R\cos\alpha = 0,$$

$$Y + R\sin\alpha - P = 0,$$

$$X\frac{a}{\sin\alpha} - Pl\sin\alpha = 0.$$

Ţinînd seamă de ecuaţia precedentă $R\sin\alpha - P = 0$, vom obţine din ecuaţia a doua că $Y = 0$; aceasta se poate deduce şi direct datorită simetriei. Mai departe vom avea:

$$R = \frac{P}{\sin\alpha},$$

$$X = R\cos\alpha = P\operatorname{ctg}\alpha$$

Introducînd această valoare a lui X în ecuaţia a treia vom găsi:

$$-\frac{Pa\cos a}{\sin^2\alpha} + Pl\sin\alpha = 0.$$

De aici, prin simplificare cu P, vom obţine:

$$\sin^3\alpha - \frac{a}{l}\cos\alpha = 0.$$

Impărţind ambele părţi ale acestei ecuaţii cu $\cos^3 \alpha$, vom avea:

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{a}{\cos^2 \alpha} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0;$$

deoarece

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

ajungem la următoarea ecuaţie de gradul trei pentru determinarea unghiului α în poziţia de echilibru:

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{a}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{a}{l} = 0. \qquad (12.2)$$

Determinînd de aici unghiul α şi introducînd valoarea lui în expresiile lui R şi X, vom găsi modulele reacţiunii interioare şi exterioare. Din cauza simetriei este evident că cercetarea ecuaţiilor de echilibru ale barei din stînga nu ne dă nici un rezultat suplimentar.

§ 53. Principiul lui Torricelli. Pentru cazul sistemelor grele se mai poate utiliza şi următorul procedeu pentru găsirea poziţiilor de echilibru, care apare ca un caz particular al principiului general al staticii stabilit de Lagrange, principiul deplasărilor virtuale. Dacă sistemul este greu, este evident că el va fi în poziţia de echilibru stabil, cînd centrul lui de greutate ocupă poziţia cea mai joasă, astfel ca în cazul unei mici devieri din această poziţie, centrul de greutate să se poată doar ridica. Dacă în cazul unei mici devieri a sistemului, centrul de greutate nici nu se ridică, nici nu coboară, atunci în poziţia considerată sistemul este în *echilibru indiferent*, cum este de exemplu cazul unei sfere grele omogene, situată pe un plan orizontal. În sfîrşit, dacă centrul de greutate ocupă poziţia cea mai de sus, astfel că în cazul unei deplasări a sistemului din această poziţie centrul de greutate să coboare, atunci, deşi corpul este în echilibru, poziţia de echilibru considerată este nestabilă, aşa cum este, spre exemplu, poziţia de echilibru a unui con circular drept, aşezat vertical pe vîrf. Notăm prin ζ coordonata pe verticală a centrului de greutate al sistemului. Poziţia echilibrului indiferent se caracterizează prin faptul că $\zeta = \text{const}$. Poziţia echilibrului stabil se caracterizează prin faptul că în această poziţie ζ va fi un minim, dacă axa verticală este orientată în sus; este clar că în cazul cînd axa verticală este orientată în jos, mărimea ζ trebuie să fie maximă. În cazul echilibrului nestabil, valorile lui ζ sînt inverse. În aceasta constă principiul lui Torricelli (1608—1647). Să presupunem că valoarea coordonatei ζ depinde de un para-

metru oarecare α astfel ca $\zeta=f(\alpha)$. Din cele precedente urmează că pentru găsirea pozițiilor de echilibru stabil sau nestabil ale sistemului, trebuie să se caute maximul sau minimul, adică extremalele funcției $\zeta=f(\alpha)$. Din calculul diferențial se știe că valorile α care corespund unui maxim sau minim satisfac relația:

$$\frac{d\zeta}{d\alpha}=f'(\alpha)=0, \quad \text{sau } d\zeta=f'(\alpha)\,d\alpha=0.$$

În cazul echilibrului indiferent $\zeta=\text{const}$ și avem iarăși $d\zeta=0$. Dacă coordonata ζ este o funcție de mai mulți parametri, de exemplu $\zeta=f(\alpha, \beta, \gamma)$, atunci, pentru găsirea maximului sau minimului ei, este necesar să fie satisfăcute condițiile:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma}=0.$$

Deoarece

$$d\zeta=\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial \zeta}{\partial \beta}d\beta+\frac{\partial \zeta}{\partial \gamma}d\gamma,$$

condițiile precedente sînt și ele echivalente cu $d\zeta=0$ și invers. În acest fel, pentru găsirea poziției de echilibru a unui sistem greu, trebuie să se găsească soluțiile ecuației

$$d\zeta=0. \tag{12.3}$$

Pentru a arăta cum trebuie să se aplice practic acest procedeu, să examinăm următorul exemplu. O bară omogenă și grea de lungime $2a$ se reazemă cu capătul A pe un perete vertical și cu celălalt capăt B pe o curbă oarecare; să se găsească această curbă cu condiția ca bara să rămînă în echilibru în toate pozițiile, adică bara să fie în echilibru indiferent. Deoarece bara este în echilibru indiferent, trebuie să avem $\zeta=\text{const}$, adică centrul de greutate C al barei trebuie să se deplaseze pe o dreaptă orizontală. Să alegem această dreaptă ca axă Ox și dreapta verticală pe care alunecă capătul A ca axă Oy (fig. 105). Astfel ajungem la următoarea problemă. Să se afle curba descrisă de ca-

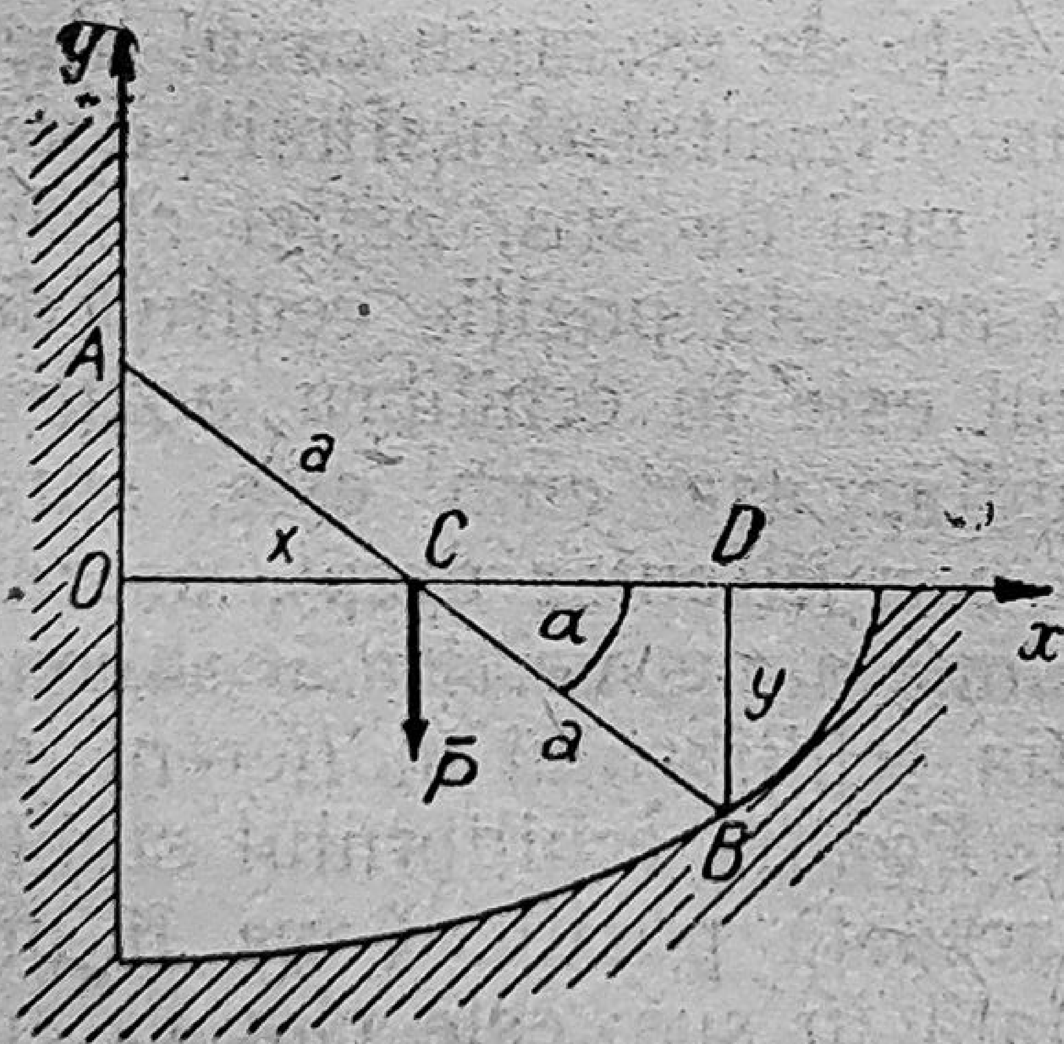


Fig. 105

pătul B al barei al cărei centru C alunecă pe orizontala Ox și capătul A pe verticala Oy. Notînd unghiul format de bara cu axa Ox prin α avem pentru coordonatele punctului B următoarele expresii:

$$y = -DB = -a \sin \alpha, \quad x = OD = 2OC = 2a \cos \alpha.$$

De aici obținem:

$$\frac{x}{2a} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{a} = -\sin \alpha.$$

Ridicînd la pătrat și adunînd vom avea:

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

adică capătul B al barei trebuie să se rezeme pe o elipsă cu semiaxele $2a$ și a.

Pentru a lămuri mai bine acest principiu îl vom aplica și la exemplul studiat în § 52. Deoarece centrul de greutate al barei AB (fig. 104) se află în punctul C, iar centrul de greutate al barei identice AB_1 se află în punctul C_1, atunci centrul de greutate al sistemului se află în punctul O_1 care este mijlocul segmentului CC_1. Să găsim coordonata $\zeta = OO_1$. Avem:

$$OO_1 = AO_1 - AO;$$

dar din $\triangle\, AO_1C$ obținem:

$$AO_1 = l \cos \alpha,$$

iar din $\triangle\, AOD$ obținem:

$$AO = \frac{a}{\sin \alpha};$$

prin urmare,

$$\zeta = -l \cos \alpha + \frac{a}{\sin \alpha},$$

Vedem că în problema examinată avem:

$$f(\alpha) = -l \cos \alpha + \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Ecuația de echilibru

$$d\zeta = f'(\alpha)\, d\alpha = 0$$

ia forma

$$f'(\alpha) = +l \sin \alpha - \frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

de unde găsim:

$$l \sin^3 \alpha - a \cos \alpha = 0.$$

După efectuarea transformării arătate în paragraful precedent, obținem ecuația de gradul trei

$$\operatorname{tg}^3\alpha-\frac{a}{l}\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{a}{l}=0,$$

adică ajungem la soluția (12.2).

Atragem atenția că la folosirea acestui procedeu nu trebuie să ținem seamă de loc de reacțiuni; în aceasta constă avantajul acestui procedeu. Mai departe, cu ocazia expunerii principiului deplasărilor virtuale al lui Lagrange, vom vedea motivul pentru care se elimină aceste reacțiuni.

STATICA GRAFICĂ

CAPITOLUL XIII

POLIGON FUNICULAR

§ 54. Importanța staticii grafice. Poligon funicular. La rezolvarea multor probleme ale staticii se pot aplica procedee grafice. Totuși, în prezent, cu tehnica larg dezvoltată a calculelor, cu utilizarea mașinilor de calculat care în multe cazuri fac inutile chiar și tabelele de logaritmi, ținînd seamă că exactitatea procedeelor grafice este limitată, precizia rezultatului depinzînd de exactitatea construcțiilor și măsurătorilor pe desene, apare naturală întrebarea, dacă este rațional să se studieze procedeele grafice și să ne ocupăm de ele sau să le considerăm ca ceva de domeniul trecutului. O asemenea părere asupra procedeelor grafice de rezolvare a problemelor statice, ar fi greșită. Procedeele grafice de rezolvare a problemelor statice au un avantaj față de rezolvările algebrice; ele ne permit ca într-un singur tablou să cuprindem problema în ansamblul ei și fac ca rezultatele obținute să fie sugestive, ușurînd găsirea imediată a greșelilor strecurate. Calculele algebrice nu au aceste proprietăți; prin utilizarea lor, rezolvarea problemei se desfășoară fără a fi sugestivă și fiecare rezultat se obține ca urmare a celuilalt. În plus, deși exactitatea calculelor algebrice poate fi cît de mare dorim, totuși în fiecare problemă practică datele sînt de obicei aproximative; de aceea efectuarea calculelor algebrice cu o exactitate mai mare decît a premiselor de calcul este în general inutilă; exactitatea procedeelor grafice este foarte des suficientă. În sfîrșit, din cauza iuțelii și ușurința aplicării în rezolvarea unor probleme de statică într-o serie de cazuri practice procedeele grafice sînt mai avantajoase decît calculele algebrice. De aceea, procedeele grafice sînt foarte folositoare cînd sîntem nevoiți să studiem mai multe variante spre a alege dintre ele pe cea mai avantajoasă; o dată varianta aleasă, putem aplica procedeele exacte, dar totdeauna destul de groaie, ale calculului algebric. Toate aceste considerente ne obligă să folosim chiar și în prezent procedee grafice pentru rezolvarea problemelor de statică.

La mijlocul secolului al XIX-lea, diferitele procedee grafice existente atunci pentru rezolvarea problemelor de statică au fost strînse într-un studiu separat, punîndu-se bazele unei științe speciale — *statica grafică*. Construcțiile din statica grafică au fost dezvoltate mai ales pentru sisteme de forțe în plan. În prezentul curs vor fi examinate pe scurt unele construcții numai pentru problemele plane; o expunere cu mult mai amănunțită a acestor probleme se poate găsi în lucrarea prof. V. L. Kirpicev, „Bazele staticii grafice" (1933). Există construcții în statica grafică și pentru sistemele de forțe spațiale, dar aceste construcții sînt destul de complicate și prin urmare ele nu vor fi studiate în cursul de față. Cei ce doresc să le cunoască, le pot găsi în lucrarea prof. B. N. Gorbunov și prof. A. A. Umanski „Statica sistemelor spațiale" (1932). Statica grafică în spațiu folosește procedeele geometriei descriptive, reprezentare convențională a figurilor din spațiu pe un desen plan.

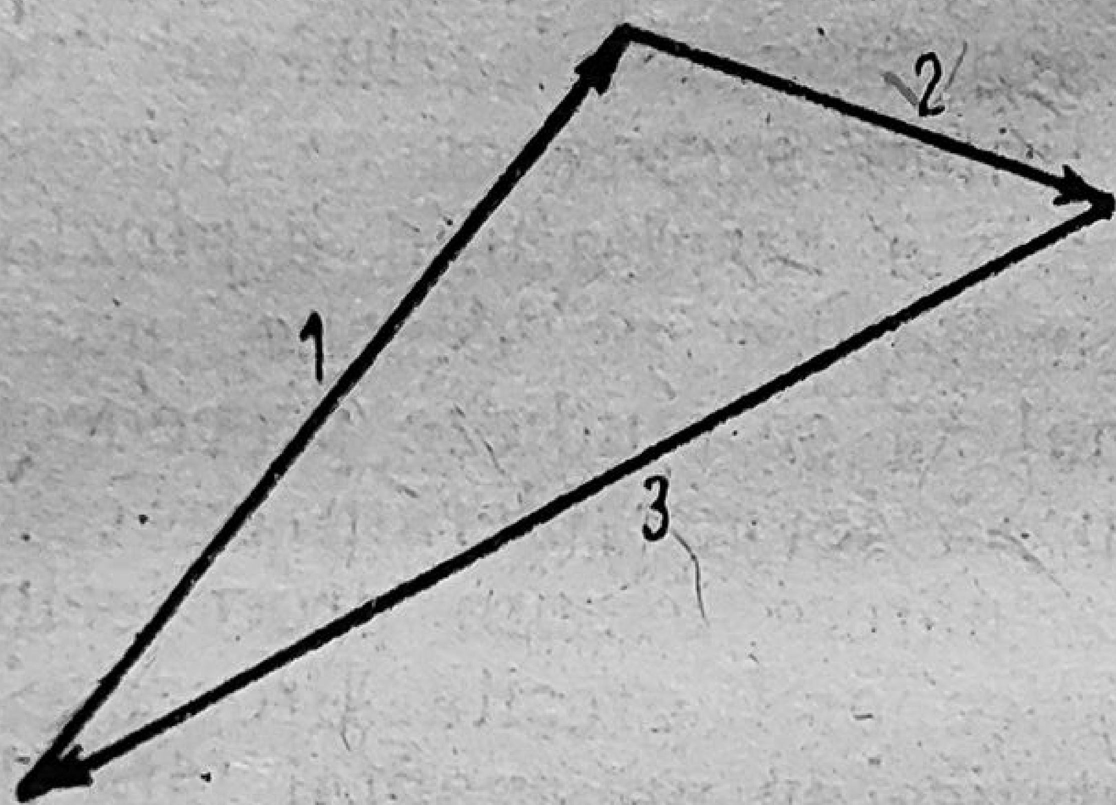


Fig. 106

Dacă avem un sistem plan de forțe, atunci putem întîlni numai trei cazuri; sau sistemul se reduce la o rezultantă, sau la un cuplu, sau se echilibrează. Ca și mai înainte, vom reprezenta forțele prin vectori (segmente de dreaptă cu săgeți), notînd acești vectori prin cifre. Noi știm că dacă poligonul forțelor construit pentru sistemul plan de forțe dat este închis, atunci sistemul de forțe, fie că se reduce la un cuplu, fie că este în echilibru. În ambele cazuri, sensul săgeților care reprezintă forțele, stabilesc sensul de parcurgere al perimetrului poligonului. În cazul a trei forțe vom obține în acest fel triunghiul forțelor (fig. 106). *Este evident că dacă se modifică sensul unui vector, atunci el va reprezenta rezultanta forțelor reprezentate prin ceilalți vectori.*

Să considerăm un sistem de forțe plane, de exemplu, sistemul format din patru forțe *1*, *2*, *3*, *4* reprezentat în fig. 107, stînga. Construim pentru acest sistem de forțe poligonul forțelor *a b c d e* reprezentat în fig. 107, dreapta. Dacă poligonul forțelor se va închide, atunci ori va avea loc echilibrul ori sistemul se va reduce la un cuplu; astfel, închiderea poligoanelor forțelor este

o condiție de echilibru, necesară dar nu și suficientă. Dacă însă poligonul forțelor este deschis, atunci sistemul de forțe se reduce numai la o rezultantă, așa cum se întîmplă în cazul fig. 107, unde dreapta de închidere *ae* a liniei frînte *a b c d e* dă mărimea, direcția și sensul rezultantei; desigur că laturile *ab*, *bc*, *ca*, și *de* ale acestei linii frînte trebuie să fie paralele și egale cu forțele *1*, *2*, *3*, *4*, pentru ca direcția *ae* să reprezinte cu adevărat direcția rezultantei $\bar{F}$. Pentru a cunoaște complet rezultanta $\bar{F}$, este necesar să găsim un punct oarecare prin care trece suportul acestei forțe $\bar{F}$. Pentru rezolvarea acestei ultime probleme să

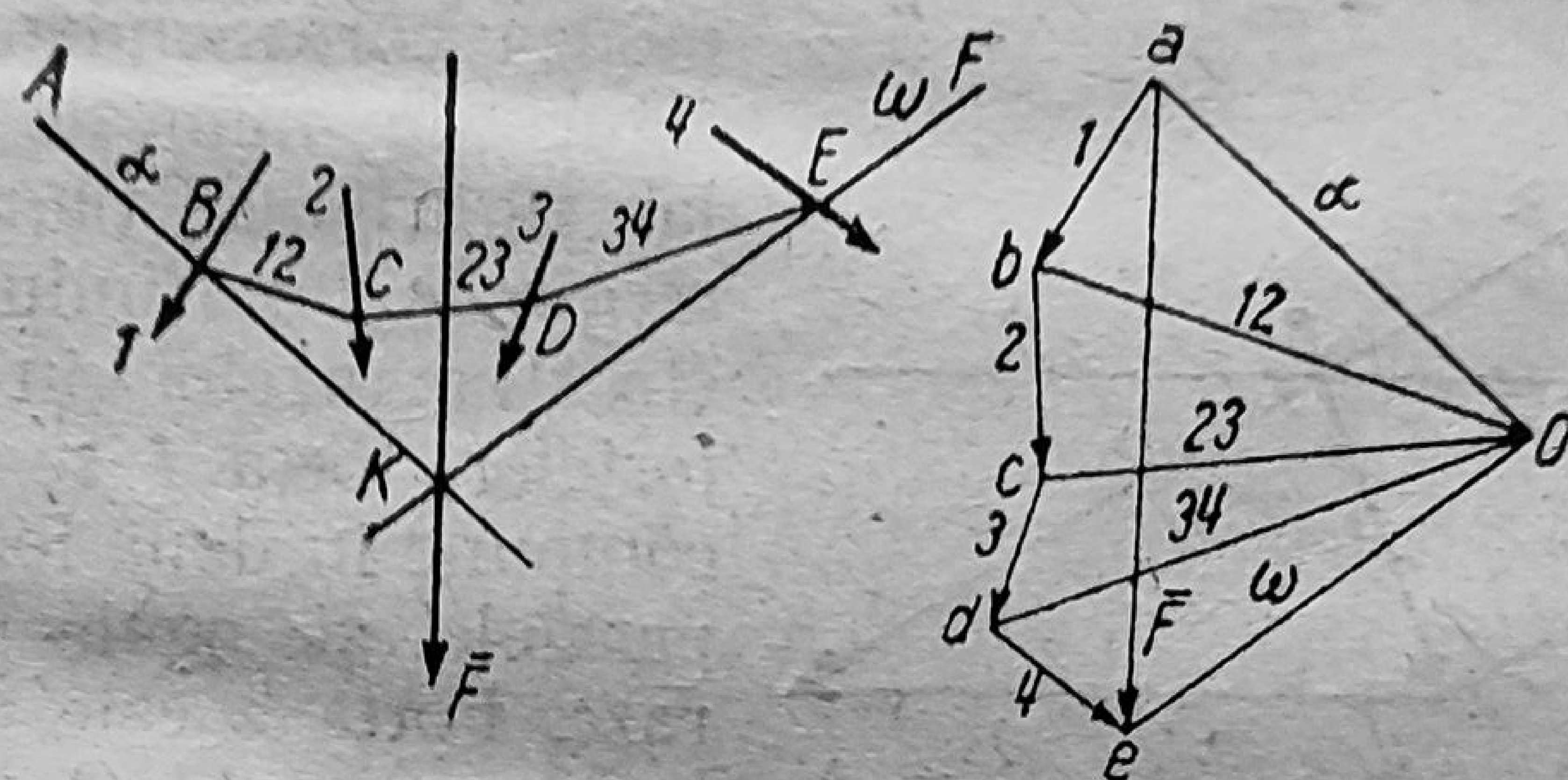


Fig. 107

luăm un punct oarecare *O*, din plan, pe care-l vom numi *pol*. Unim polul *O* cu vîrfurile liniei frînte (*1*, *2*, *3*, *4*). Vom denumi aceste drepte *raze*; prima și ultima rază le vom nota cu prima și ultima literă din alfabetul grecesc α și ω, iar razele intermediare prin cele două cifre ale laturilor liniei frînte în ale căror puncte de intersecție este dusă raza considerată. Astfel, raza *12* este dusă în punctul de intersecție al laturilor *1* și *2*; raza *23* este dusă prin punctul de intersecție al laturilor *2* și *3* etc. Ca și mai înainte vom numi poligonul (*1*, *2*, *3*, *4*) *poligonul forțelor*. Construim acum al doilea poligon, reprezentat în fig. 107, stînga. Luăm un punct arbitrar *A* al planului și ducem prin el dreapta *AB* paralelă cu raza α, pînă în punctul *B* unde această dreaptă intersectează suportul forței *1* așa cum se arată în fig. 107, stînga. Prin punctul *B* vom duce dreapta *BC* paralelă cu raza *12* pînă în punctul *C* unde intersectează suportul forței *2* etc. În sfîrșit, prin punctul *E* vom duce dreapta *EF* paralelă la raza ω. Astfel, vom obține linia poligonală *ABCDEF*, ale cărei laturi le vom nota la fel cu razele paralele cu ele. Această linie poligonală (α, *12*, *23*, *34*, ω) o vom numi *poligon funicular*, *poligon articulat* sau

o condiție de echilibru, necesară dar nu și suficientă. Dacă însă poligonul forțelor este deschis, atunci sistemul de forțe se reduce numai la o rezultantă, așa cum se întîmplă în cazul fig. 107, unde dreapta de închidere *ae* a liniei frînte *a b c d e* dă mărimea, direcția și sensul rezultantei; desigur că laturile *ab*, *bc*, *ca*, și *de* ale acestei linii frînte trebuie să fie paralele și egale cu forțele *1*, *2*, *3*, *4*, pentru ca direcția *ae* să reprezinte cu adevărat direcția rezultantei $\overline{F}$. Pentru a cunoaște complet rezultanta $\overline{F}$, este necesar să găsim un punct oarecare prin care trece suportul acestei forțe $\overline{F}$. Pentru rezolvarea acestei ultime probleme să

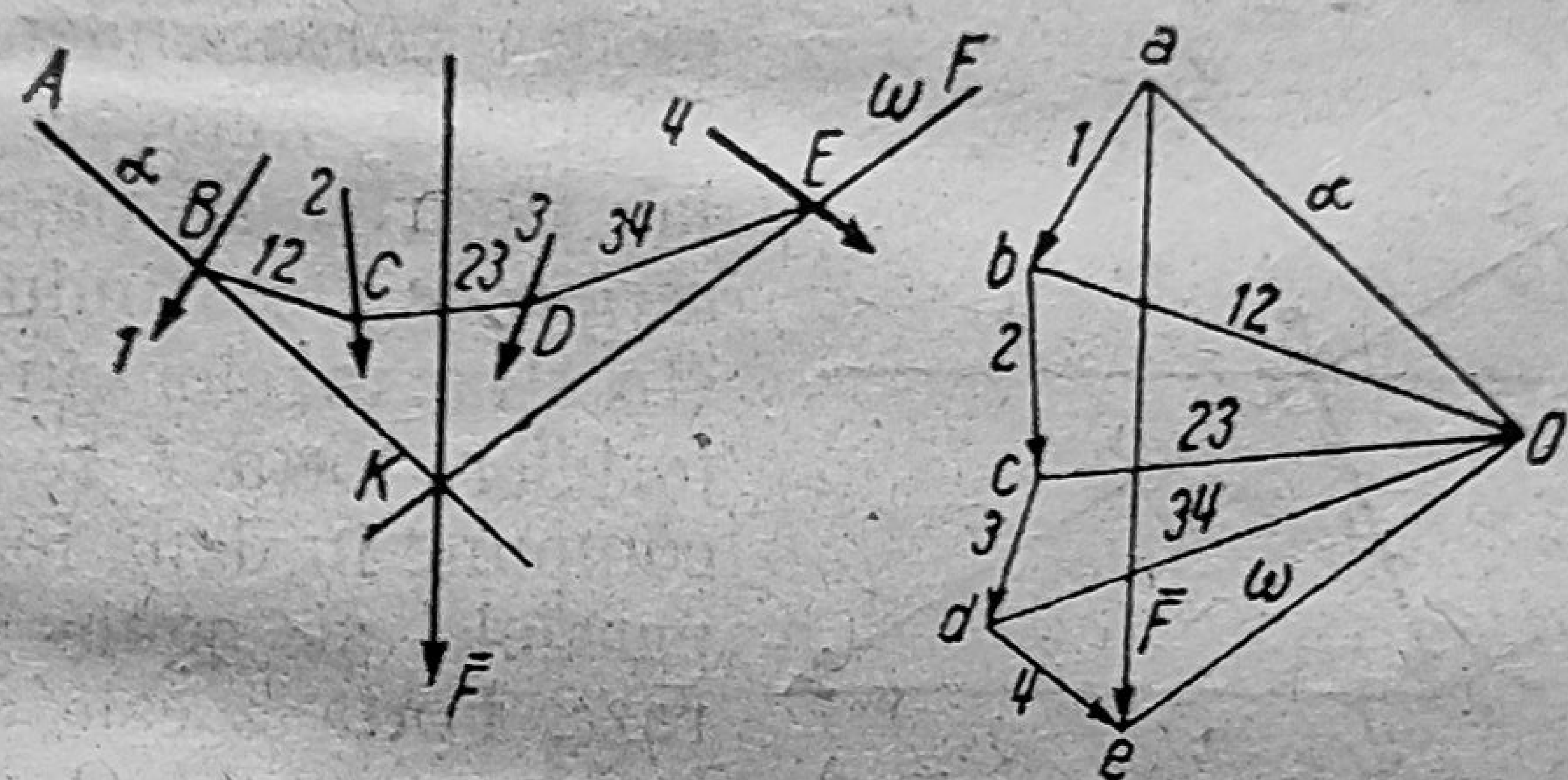


Fig. 107

luăm un punct oarecare *O*, din plan, pe care-l vom numi *pol*. Unim polul *O* cu vîrfurile liniei frînte (*1*, *2*, *3*, *4*). Vom denumi aceste drepte *raze*; prima și ultima rază le vom nota cu prima și ultima literă din alfabetul grecesc α și ω, iar razele intermediare prin cele două cifre ale laturilor liniei frînte în ale căror puncte de intersecție este dusă raza considerată. Astfel, raza *12* este dusă în punctul de intersecție al laturilor *1* și *2*; raza *23* este dusă prin punctul de intersecție al laturilor *2* și *3* etc. Ca și mai înainte vom numi poligonul (*1*, *2*, *3*, *4*) *poligonul forțelor*. Construim acum al doilea poligon, reprezentat în fig. 107, stînga. Luăm un punct arbitrar *A* al planului și ducem prin el dreapta *AB* paralelă cu raza α, pînă în punctul *B* unde această dreaptă intersectează suportul forței *1* așa cum se arată în fig. 107, stînga. Prin punctul *B* vom duce dreapta *BC* paralelă cu raza *12* pînă în punctul *C* unde intersectează suportul forței *2* etc. În sfîrșit, prin punctul *E* vom duce dreapta *EF* paralelă la raza ω. Astfel, vom obține linia poligonală *ABCDEF*, ale cărei laturi le vom nota la fel cu razele paralele cu ele. Această linie poligonală (α, *12*, *23*, *34*, ω) o vom numi *poligon funicular*, *poligon articulat* sau

poligonul lui Varignon. Atragem atenția asupra următoarei legături dintre ambele desene reprezentate în fig. 107. Laturile ambelor figuri sînt respectiv paralele. Fiecărui triunghi din prima figură îi corespund trei drepte care se întretaie într-un punct din cealaltă figură și invers. În adevăr, să examinăm, de exemplu, triunghiul format de dreptele *12*, α, *1* din poligonul forțelor. În poligonul funicular, dreptele corespunzătoare se întretaie în punctul *B*. Triunghiului format de poligonul funicular, de dreapta *12* și prelungirile segmentelor *1* și *2*, îi corespund în poligonul forțelor dreptele *1*, *2* și *12*, care se întretaie în punctul *b*. O asemenea corespondență a două figuri se numește *reciprocă*, iar figurile se numesc și ele *reciproce*. Folosindu-ne de construcția razelor în poligonul forțelor, forța *1* se poate descompune în două forțe α și *12*, paralele și egale cu aceste raze. Forța α este dirijată înspre punctul *O*, forța *12* dinspre punctul *O*. Mutînd

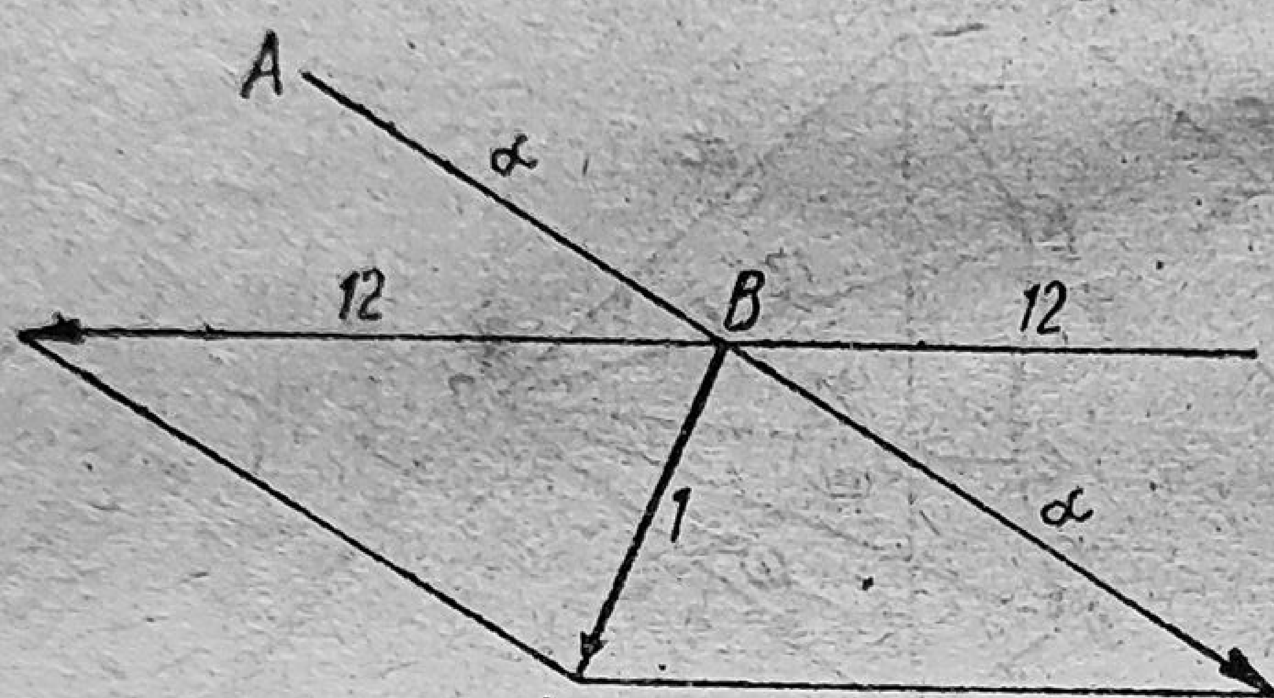


Fig. 108

forțele *1*, α și *12* în punctul *B*, vom vedea că de fapt am efectuat în acest fel descompunerea forței 1 în două forțe, paralele cu razele α și *12*, după legea paralelogramului (fig. 108) și nu este de loc nevoie să desenăm acest paralelogram, deoarece forțele necunoscute α și *12* ne sînt date direct pe desen în poligonul forțelor. Tot astfel forța *2* poate fi descompusă în două forțe *12* și *23*, dintre care prima este dirijată înspre punctul *O*, iar a doua este dirijată dinspre punctul *O*. Mutînd aceste forțe în poligonul funicular, vedem că de-a lungul laturii sale *12* se vor așeza două forțe egale cu raza *12* dar dirijate în sens opus. Continuînd această construcție, vom găsi că sistemul de forțe date *1*, *2*, *3*, *4*, se poate înlocui cu forțe care merg de-a lungul laturilor poligonului funicular. De-a lungul fiecărei laturi intermediare *12*, *23*, *34*, sînt dirijate cîte două forțe direct opuse și respectiv egale cu razele *12*, *23* și *34*; prin urmare aceste forțe se echilibrează între ele. Rămîn neechilibrate cele două forțe dirijate de-a lungul laturilor extreme α și ω și egale respectiv cu razele α și ω. Forța α are direcția *aO*, iar forța ω direcția *Oe*. În acest fel, sistemul forțelor date *1*, *2*, *3*, *4*, s-a redus numai la două forțe concurente α și ω. Prelungind suporturile lor vom obține punctul *K*, prin

care trebuie să treacă rezultanta lor $\overline{F}$; însă direcția și mărimea rezultantei $\overline{F}$ sînt cunoscute din poligonul forțelor. Ducînd prin punctul K o dreaptă paralelă cu segmentul ae și măsurînd pe ea forța $\overline{F}$, problema este complet rezolvată.

Este evident că acest procedeu este aplicabil pentru orice număr de forțe, oricum ar fi ele situate și în orice ordine ar fi luate.

Trebuie numai să se rețină că forța aplicată unui solid este un vector alunecător și de aceea laturile poligonului funicular

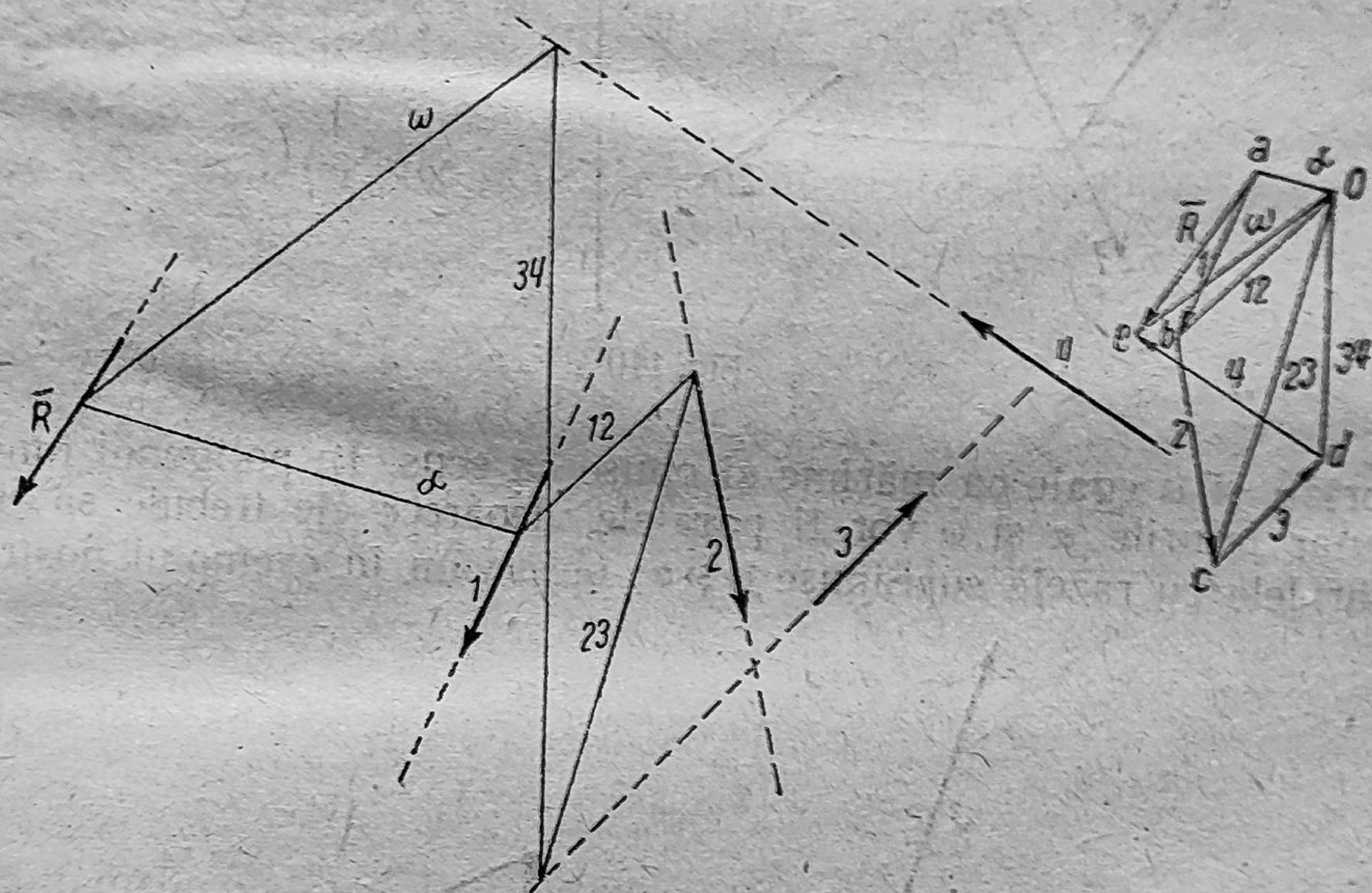


Fig. 109

pot fi limitate atît de forțele înseși, cît și de suporturile lor. In fig. 109 este dată construcția pentru o altă așezare a celor patru forțe *1, 2, 3, 4* diferită de cazul din fig. 107. Și aici aceste patru forțe pot fi înlocuite prin două forțe α și ω iar forțele α și ω pot fi înlocuite prin rezultanta $\overline{R}$ care trece prin punctul de intersecție al laturilor α și ω ale poligonului funicular.

Presupunem acum că poligonul forțelor va fi închis. In acest caz rezultanta este egală cu zero și sistemul forțelor se reduce la un cuplu sau se echilibrează. Să examinăm cazul a trei forțe, reprezentat în fig. 110. Construind poligonul forțelor, vedem că el este închis. Vom lua într-un punct oarecare polul O și vom

duce razele α, *12*, *23*, ω. Deoarece originea și extremitatea poli-
gonului forțelor coincid, razele α și ω se vor suprapune. Prin ur-
mare sistemul celor trei forțe *1*, *2*, *3* se poate reduce la două

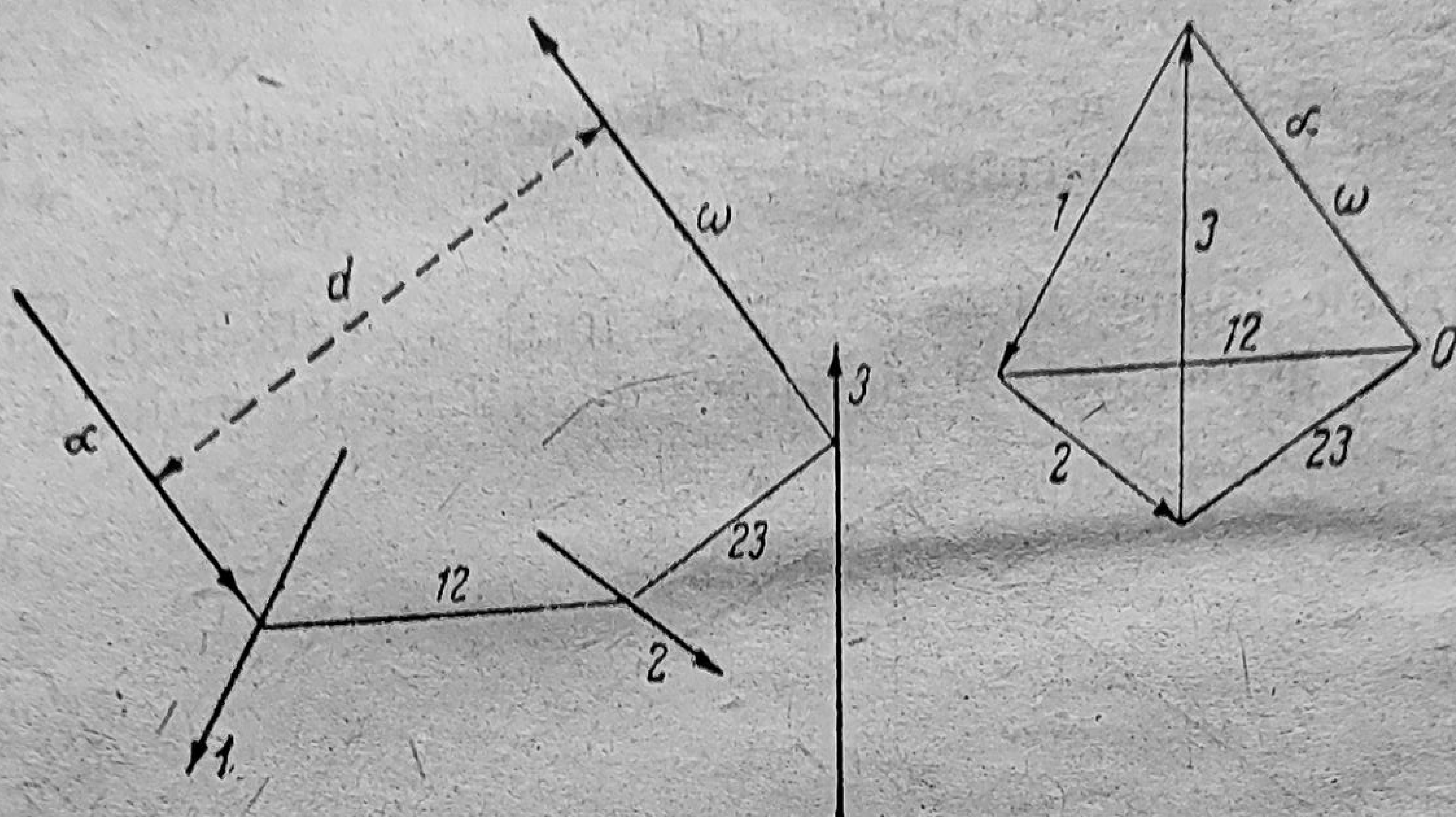


Fig. 110

forțe α și ω egale ca mărime și opuse ca sens. În poligonul funicular laturile α și ω vor fi paralele, deoarece ele trebuie să fie paralele cu razele suprapuse ω și α; observăm în exemplul nostru

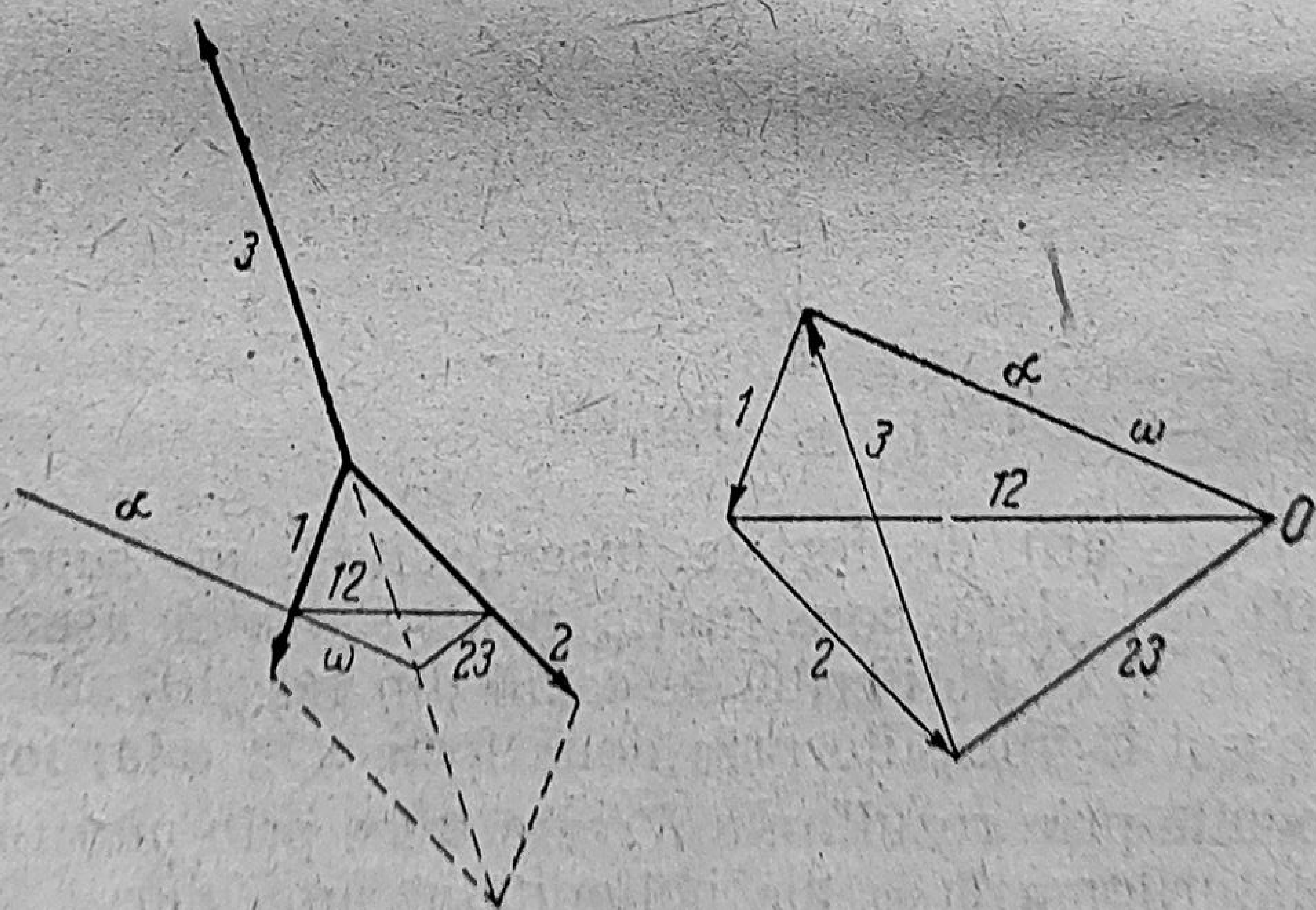


Fig. 111

că aceste laturi nu se suprapun în poligonul funicular. Prin urmare, sistemul de forțe dat se reduce la un cuplu (α, ω), și vom găsi ușor momentul acestui cuplu, măsurînd în poligonul for-

duce razele α, *12*, *23*, ω. Deoarece originea şi extremitatea poligonului forţelor coincid, razele α şi ω se vor suprapune. Prin urmare sistemul celor trei forţe *1*, *2*, *3* se poate reduce la două

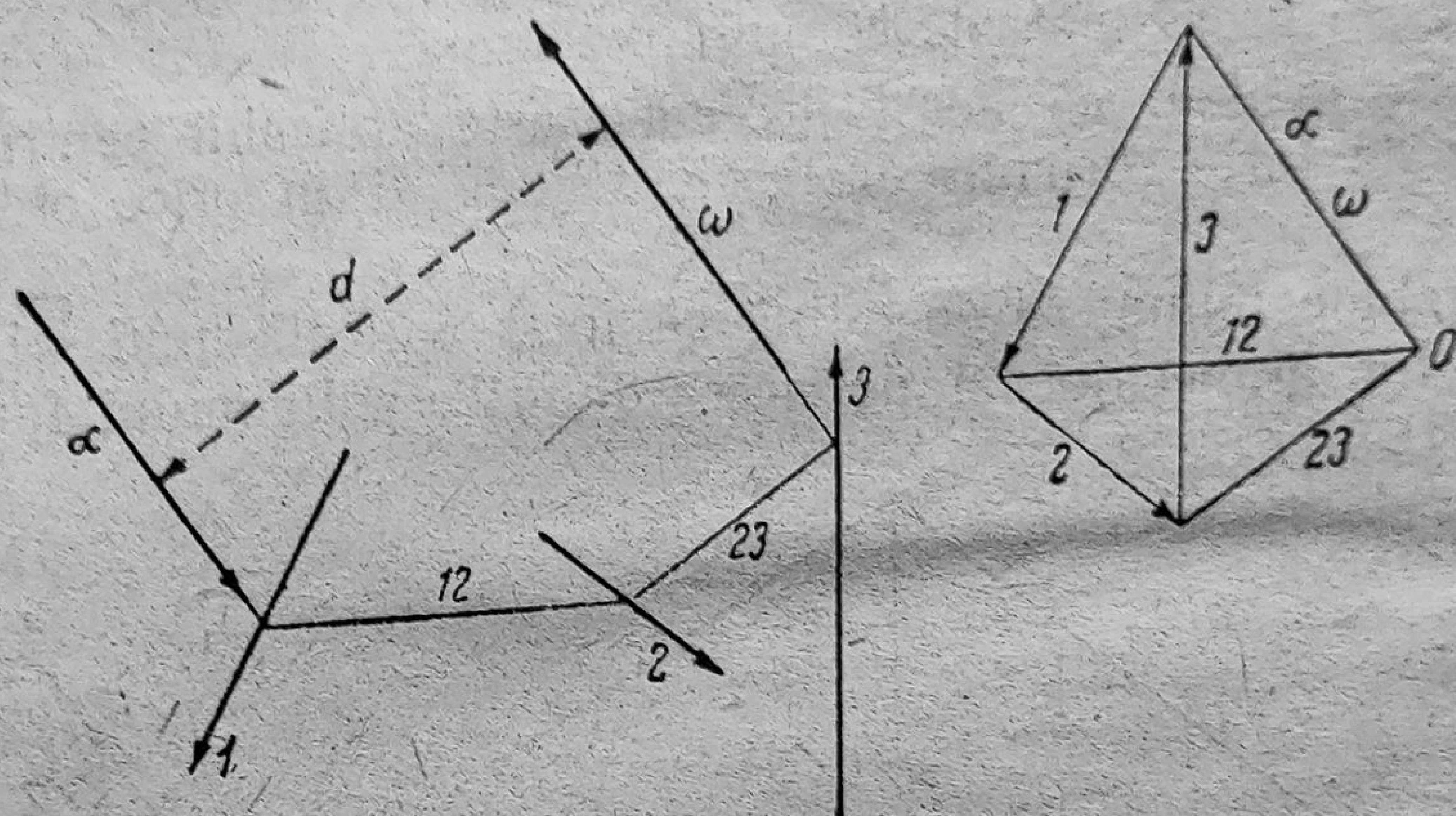


Fig. 110

forţe α şi ω egale ca mărime şi opuse ca sens. În poligonul funicular laturile α şi ω vor fi paralele, deoarece ele trebuie să fie paralele cu razele suprapuse ω şi α; observăm în exemplul nostru

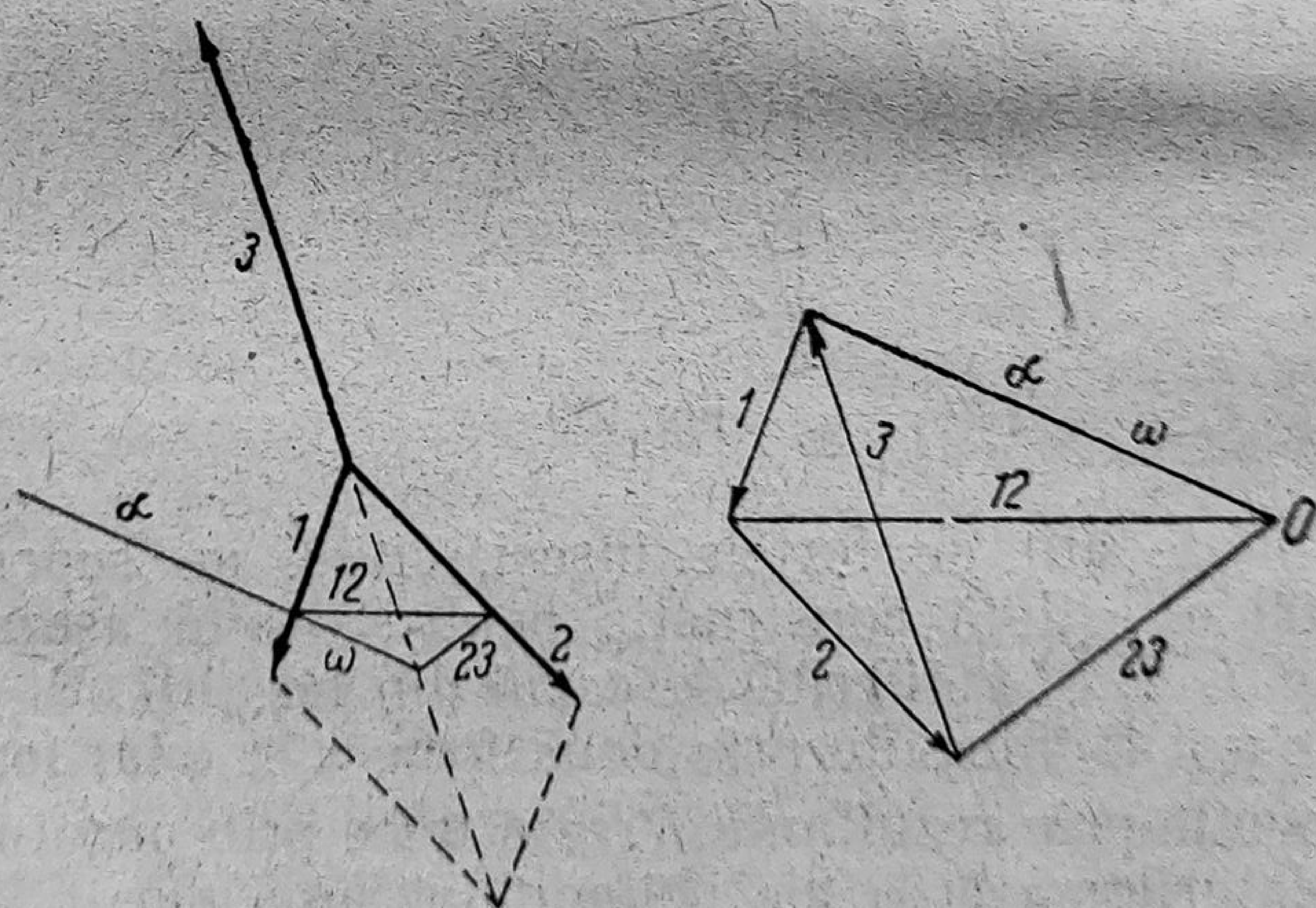


Fig. 111

că aceste laturi nu se suprapun în poligonul funicular. Prin urmare, sistemul de forţe dat se reduce la un cuplu (α, ω), şi vom găsi uşor momentul acestui cuplu, măsurînd în poligonul for-

țelor modulul $\alpha=\omega$, iar în poligonul funicular distanța d dintre laturile extreme α și ω, care reprezintă brațul cuplului.

Să presupunem, în sfîrșit, că nu numai poligonul forțelor, dar și poligonul funicular se va închide, după cum se arată în fig. 111; în acest caz, forțele egale α și ω, la care se reduce sistemul de forțe dat, vor fi situate de-a lungul unei drepte și fiind de sensuri diferite se vor echilibra. Prin urmare, sistemul de forțe dat este de asemenea în echilibru. Astfel, obținem următoarea teoremă:

Pentru ca un sistem de forțe în plan să fie în echilibru, este necesar și suficient ca poligonul forțelor și poligonul funicular să fie închise.

Să considerăm două forțe *1* și *2* (fig. 112). Construim pentru ele poligonul forțelor și poligonul funicular. Dacă ne imaginăm

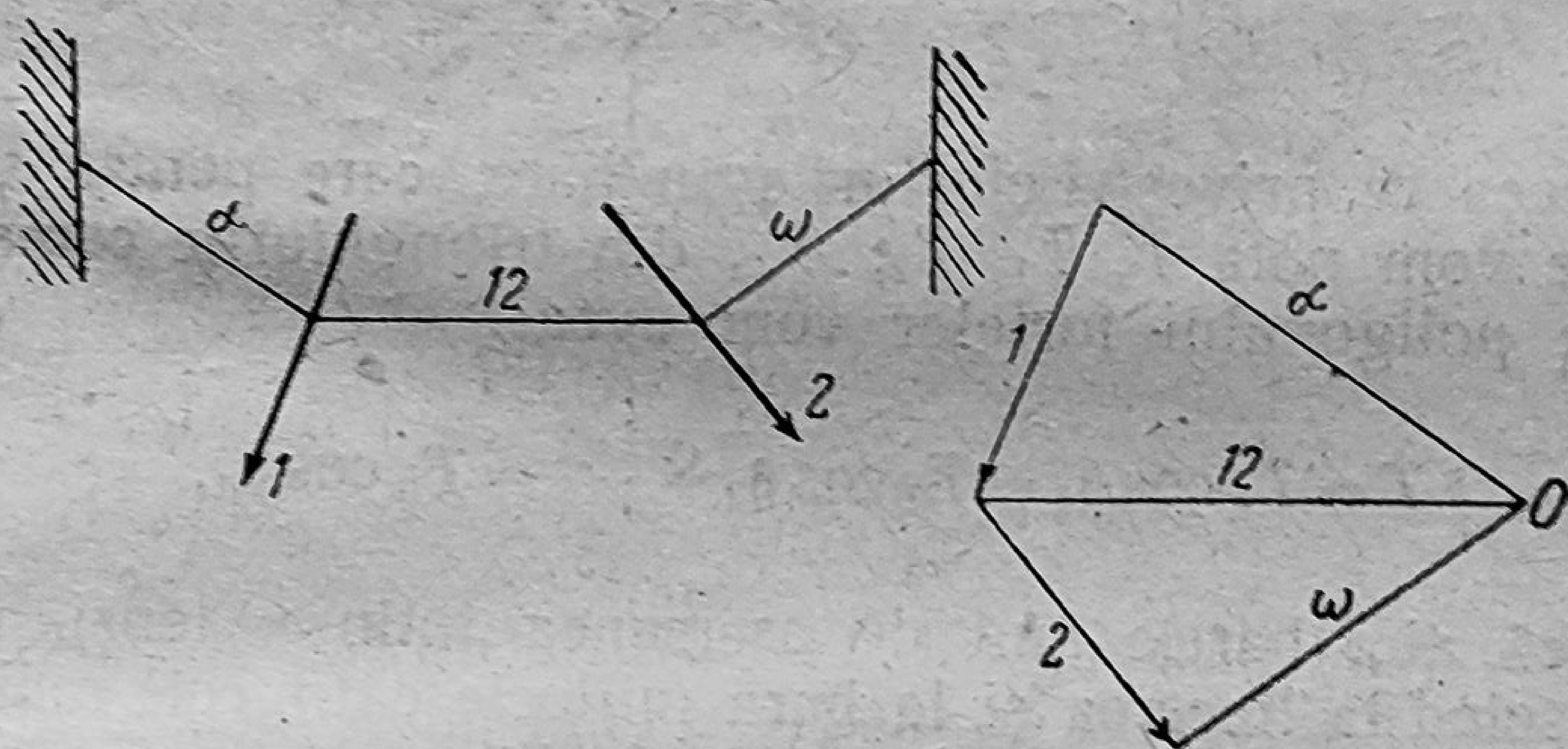


Fig. 112

că laturile poligonului funicular sînt bare articulate, atunci un astfel de poligon articulat, sub acțiunea forțelor date *1* și *2* aplicate în articulațiile sale, va fi în echilibru. În adevăr, forțele *1* și *2* pot fi înlocuite prin eforturile α, *12*, ω, care acționează de-a lungul barelor. Neglijînd micile variații de lungime ale barelor sub acțiunea acestor forțe, vedem că forțele din barele extreme sînt echilibrate de reacțiunea barelor în cele două puncte de fixare. Pentru cazul arătat în fig. 112, toate barele sînt întinse, după cum ne putem convinge ușor examinînd direcțiile forțelor α, *12* și ω. De aceea, în acest caz barele se pot înlocui prin lanțuri sau frînghii, ceea ce desigur nu se poate face dacă barele sînt comprimate. Din cele de mai sus se înțelege de ce acest poligon se numește *poligon articulat sau poligon funicular*.

Să mai examinăm și cazul poligonului articulat, reprezentat în fig. 113. In nodurile lui sînt aplicate forțe egale și paralele p.

Din poligonul forțelor găsim:

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{2p}{h}, \quad \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{p}{h},$$

unde h este distanța polară sau

$$\operatorname{tg}\beta_2 = 2\operatorname{tg}\beta_1, \quad \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{2}.$$

In general, pentru orice număr de bare vom avea:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{2} = \frac{\operatorname{tg}\beta_3}{3} = \cdots = \frac{\operatorname{tg}\beta_n}{n}.$$

In ceea ce privește eforturile în bare, care pentru simetria notării le vom nota $T, T_1, T_2, \ldots$, din triunghiurile corespunzătoare ale poligonului forțelor vom avea:

$$T = T_1 \cos\beta_1 = T_2 \cos\beta_2 = \cdots = T_n \cos\beta_n.$$

Vedem că aici barele sînt de asemenea întinse, tensiunile din bare crescînd la trecerea și la bara mijlocie către cele marginale. O asemenea construcție se face la calculul podurilor suspendate.

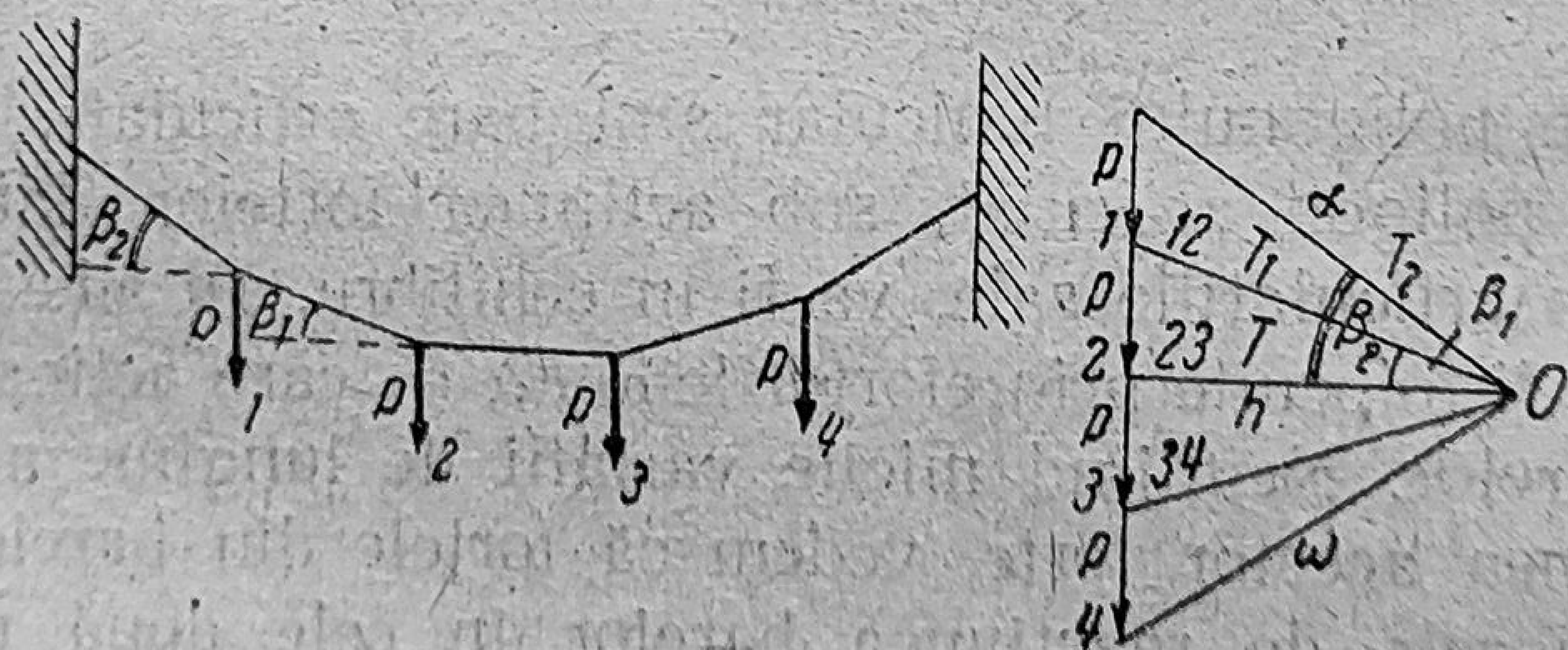


Fig. 113

Fie dat un sistem oarecare de forțe în plan, de exemplu, trei forțe 1, 2, 3 (fig. 114). Construim poligonul forțelor și poligonul funicular pentru un pol oarecare O luat arbitrar. Apoi,

luăm polul în alt punct oarecare O' și construim poligonul funicular pentru acest nou pol. Vom demonstra următoarea teoremă:

Laturile a două poligoane funiculare construite pentru același sistem de forțe, în două poziții diferite ale polului, se intersectează respectiv pe o dreaptă paralelă cu dreapta ce unește polii.

Să examinăm două poligoane funiculare (α, *12*, *23*, ω) și (α', *12'*, *23'*, ω'). Prelungim laturile α și α' pînă la intersecția lor în punctul A, laturile *12* și *12'* pînă la intersecția lor în punctul L și unim printr-o dreaptă punctele A și L. Vom obține un patrulater $ABB'L$ cu două diagonale. În poligonul forțelor îi

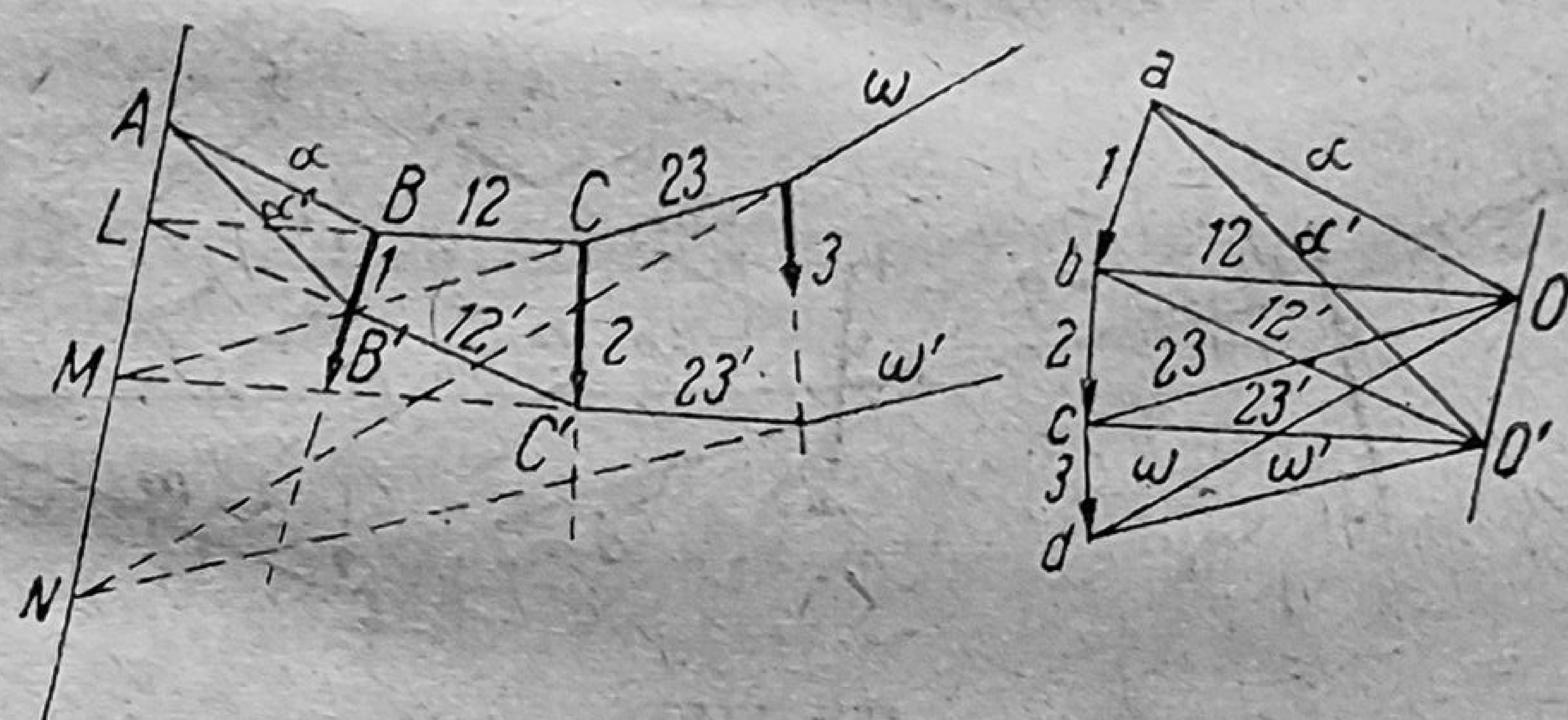


Fig. 114

va corespunde patrulaterul $aOO'b$. În general, și laturile și diagonalele le vom numi laturi. Vedem că cinci laturi ale primului patrulater sînt respectiv paralele cu cinci laturi ale celui de-al doilea patrulater; rămîne de demonstrat că și ultimele laturi ale ambelor figuri și anume AL și OO' vor fi paralele între ele. Observăm că patrulaterele $ABB'L$ și $aOO'b$ nu sînt asemenea: ele sînt însă figuri reciproce, deoarece unui triunghi al unei figuri îi corespund trei laturi curente din cealaltă figură și invers. Paralelismul laturilor AL și OO' poate fi dovedit fie geometric, fie pe considerente mecanice; vom alege ultima metodă. Forța *1*, dirijată de-a lungul lui BB', poate fi descompusă în două forțe α și *12*, reprezentate în poligonul forțelor prin vectorii $\overline{dO}$ și $\overline{Ob}$. De-a lungul suportului forței *1* vom introduce o forță nouă egală ca modul și direcție cu forța *1*, dar de sens contrar, adică de la B spre B'; această nouă forță *1* se poate descompune în două forțe: *12'* și α', reprezentate în poligonul forțelor prin vectorii $\overline{bO'}$ și $\overline{O'a}$. Aceste patru forțe obținute α, *12*, α' și *12'*, se echilibrează deoarece ele sînt echivalente cu cele două forțe *1*, care acționează în sens opus BB' și $B'B$. Aceste patru forțe se pot

grupa două cîte două altfel. Să considerăm forțele α', α și forțele $12'$, 12. Din poligonul forțelor rezultă că forțele α' și α au o rezultantă egală cu vectorul $\overline{O'O}$ și forțele $12'$ și 12 au o rezultantă egală cu vectorul $\overline{OO'}$. Din poligonul funicular vedem că rezultanta forțelor α' și α trebuie să treacă prin punctul lor de concurență A, iar rezultanta forțelor $12'$ și 12 trebuie să treacă prin punctul lor de concurență L. Deoarece rezultantele sînt egale respectiv cu vectorii $\overline{O'O}$ și $\overline{OO'}$, rezultă că prin punctele A și L trec două forțe egale ca mărime, paralele și de sens opus. Aceste forțe pot forma fie un cuplu, fie se echilibrează; în ultimul caz ele trebuie să fie situate de-a lungul dreptei AL și prin urmare dreapta

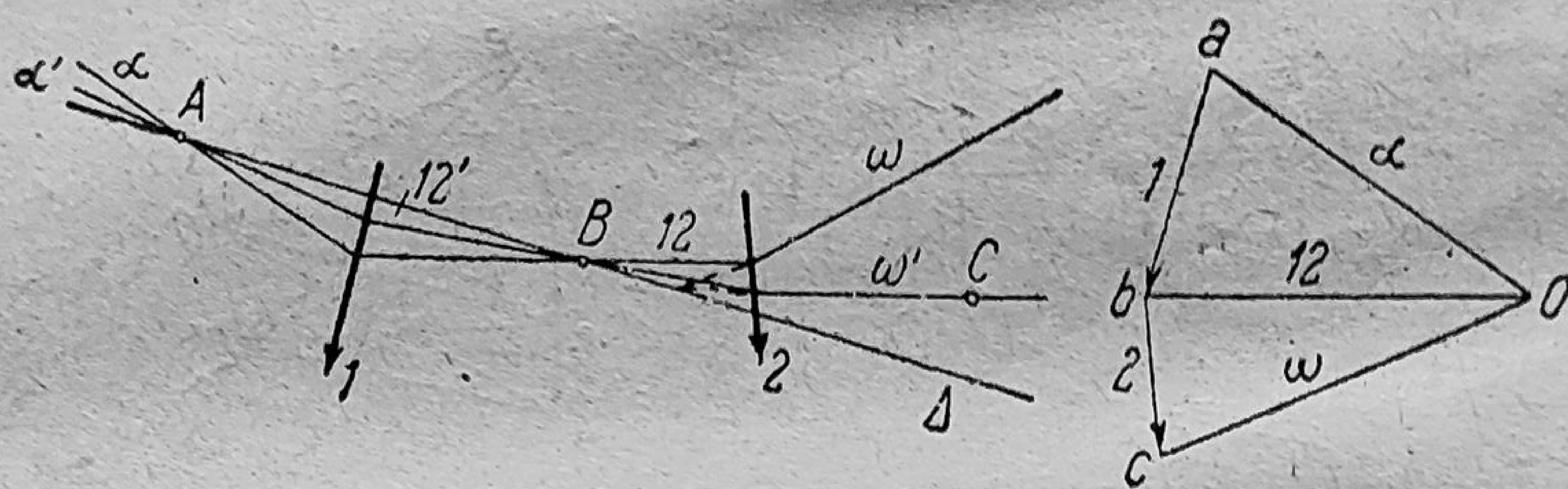


Fig. 115

AL trebuie să fie paralelă cu dreapta OO'. Aici are loc ultimul caz, deoarece sistemul de forțe considerat este în echilibru. Presupunînd că în lungul lui CC' și $C'C$ acționează forțe egale în modul cu forța 2, ne vom convinge în același mod că dreapta LM este paralelă cu dreapta OO' etc. Prin urmare, dreapta $ALMN$ este o dreaptă paralelă cu dreapta OO' și teorema este demonstrată.

Să aplicăm această teoremă la următoarea problemă: Se dau două forțe 1 și 2; să se construiască pentru ele poligonul funicular, care trece prin trei puncte date A, B, C, (fig. 115). Vom duce arbitrar prin punctul A latura α a poligonului funicular pînă la intersecția ei cu forța 1; ducem mai departe prin acest punct și prin punctul B latura 12. Aceste două laturi vor determina direcțiile razelor α și 12 din poligonul forțelor și totodată polul O. Unind punctul c cu punctul O vom obține raza ω; ducînd latura ω în poligonul funicular, vom găsi în general că ea nu va trece prin al treilea punct dat C. Prin urmare, poligonul funicular (α, 12, ω) nu este soluția problemei și este necesar să se caute alt poligon (α', $12'$, ω'), care ne va da soluția problemei și care corespunde unei alte poziții a polului. Deoarece latura α'

trebuie să treacă prin punctul A, iar latura $12'$ prin punctul B, atunci dreapta Δ, care trece prin aceste puncte A și B, este dreapta pe care sînt așezate punctele de intersecție ale laturilor respective ale poligoanelor funiculare (α, 12, ω) şi (α', $12'$, ω'). Prin urmare, laturile ω şi ω' trebuie să se întretaie tot pe această dreaptă. Să prelungim latura ω pînă la intersecția ei cu dreapta Δ; ducînd prin punctul obținut și prin cel de-al treilea punct C o dreaptă, tragem concluzia că această dreaptă este latura ω' a poligonului funicular căutat. Ducînd o dreaptă prin punctul de intersecție al laturii ω cu forța 2 și prin punctul B, vom obține latura $12'$ și, în sfîrșit, ducînd o dreaptă prin punctul de intersecție a laturii $12'$ cu forța 1 și prin punctul A, vom obține latura α' a poligonului funicular căutat, care reprezintă soluția problemei propuse.

§ 55. Reprezentarea grafică a momentelor. Să trecem acum la reprezentarea grafică a momentelor forțelor. Fie, date, de

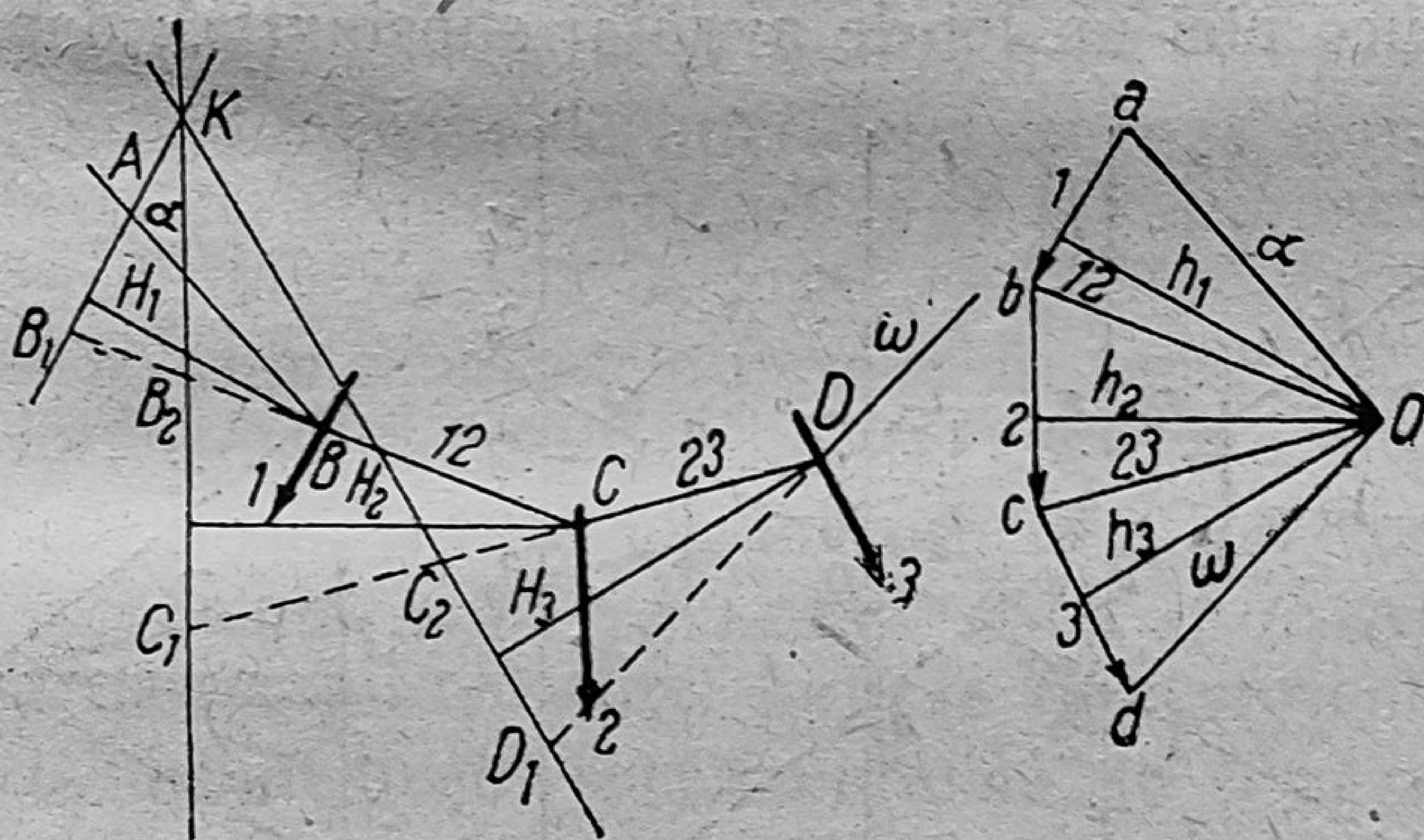


Fig. 116

exemplu, trei forțe 1, 2, 3. Să se găsească momentele lor în raport cu un punct oarecare K (fig. 116). Vom duce prin punctul K drepte paralele cu forțele. Distanțele H_1, H_2, H_3 dintre aceste drepte și forțele 1, 2, 3 reprezintă brațele, și, înmulțind aceste brațe respectiv cu forțele 1, 2, 3 vom obține momentele acestor forțe. Construim poligonul forțelor și poligonul funicular pentru un pol oarecare O. Prelungim laturile poligonului funicular care se întretaie cu o forță oarecare (de ex. 1), pînă la intersecția lor cu dreapta (KB_1) care trece prin punctul K și este paralelă cu această forță. Vom obține triunghiurile ABB_1, B_2CC_1,

C_2DD_1 cu înălțimile H_1, H_2, H_3. În poligonul forțelor le vor corespunde triunghiurile asemenea cu laturi paralele aOb, bOc, cOd cu înățimile h_1, h_2, h_3. Din asemănarea acestor triunghiuri rezultă:

$$\frac{AB_1}{ab}=\frac{H_1}{h_1}, \quad \frac{B_2C_1}{bc}=\frac{H_2}{h_2}, \quad \frac{C_2D_1}{cd}=h_3,$$

sau

$$ab \cdot H_1 = \text{mom}_K(1) = AB_1 \cdot h_1,$$

$$bc \cdot H_2 = \text{mom}_K(2) = B_2C_1 \cdot h_2,$$

$$cd \cdot H_3 = \text{mom}_K(3) = C_2D_1 \cdot h_3.$$

Vedem că prin construcția de mai sus am transformat brațele H_1, H_2, H_3, în h_1, h_2, h_3, schimbînd respectiv segmentele *1, 2, 3* care reprezintă forțele în segmentele AB_1, B_2C_1 și C_2D_1.

În cazul unei poziții arbitrare a forțelor, o astfel de transformare nu aduce nici un fel de avantaj substanțial; dar nu același

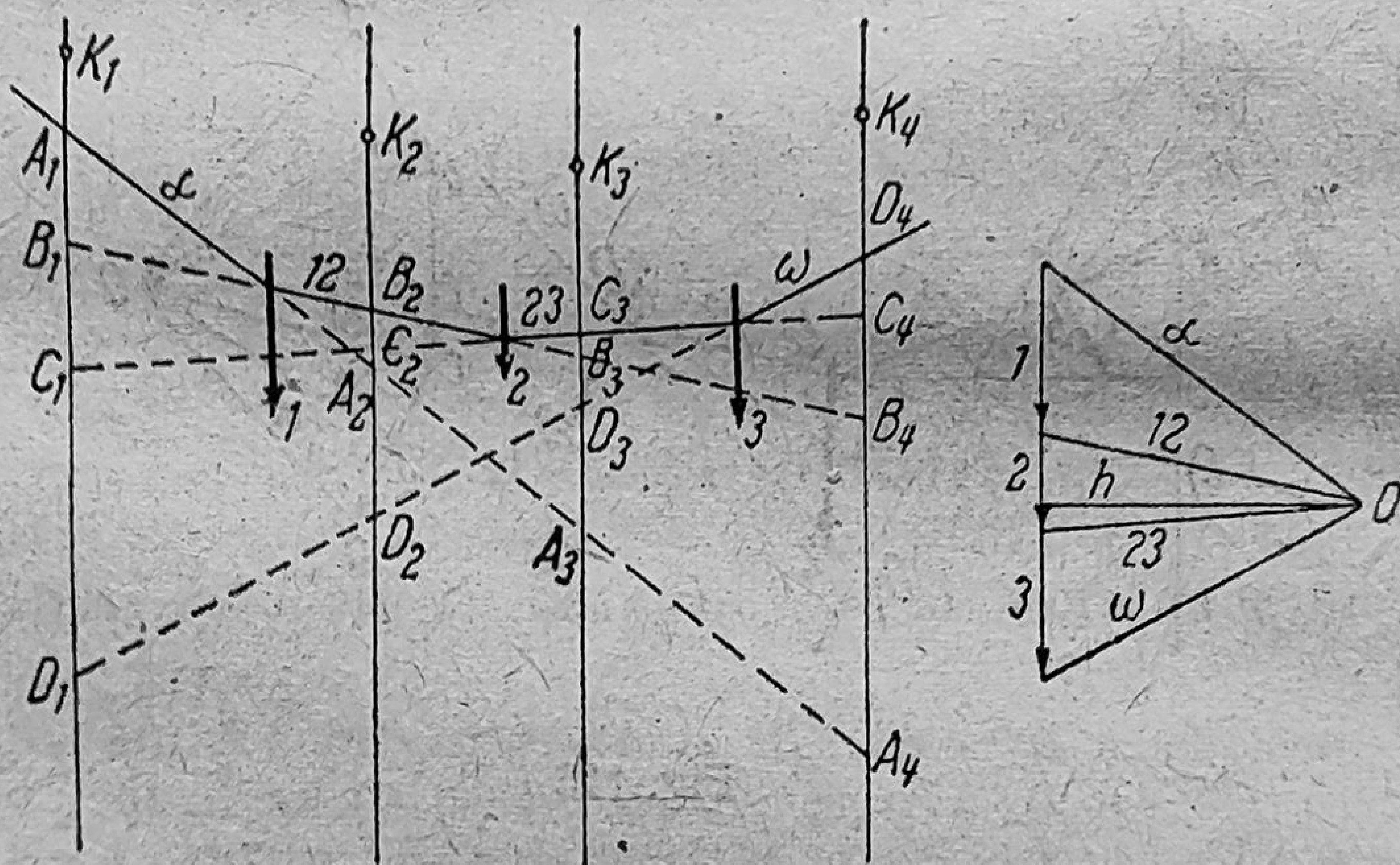


Fig. 117

lucru se va întîmpla dacă forțele date sînt paralele. Atunci toate dreptele care trec prin punctul K se vor suprapune și toate brațele h_1, h_2, h_3 vor fi egale între ele.

Să considerăm un sistem oarecare de forțe paralele, de exemplu, trei forțe *1, 2, 3*, (fig. 117). Alegem o distanță polară oarecare și construim poligonul forțelor care în acest caz se reduce la o dreaptă cu polul O, situat la distanța h față de dreaptă.

Construim apoi poligonul funicular. Vom găsi momentul fiecărei forțe în raport cu punctul K_1. Conform celor precedente vom avea:

$$\mathrm{Mom}_{K_1}(1) = A_1B_1 \cdot h,$$

$$\mathrm{Mom}_{K_1}(2) = B_1C_1 \cdot h,$$

$$\mathrm{Mom}_{K_1}(3) = C_1D_1 \cdot h.$$

Deoarece la toate momentele brațul h este comun, momentele vor fi proporționale cu segmentele A_1B_1, B_1C_1 și C_1D_1, care pot fi considerate ca reprezentarea grafică a momentelor. Momentele tuturor forțelor în raport cu punctul K_1 sînt negative și vedem că vom obține momentul rezultant al sistemului de forțe direct pe desen. Astfel, momentul rezultant al sistemului de forțe *1* și *2* se va reprezenta prin segmentul $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$; momentul rezultant al sistemului de forțe (*1*, *2*, *3*) se va reprezenta prin segmentul $A_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1$.

Dacă drept origine a segmentului care reprezintă momentul vom lua punctul de intersecție al dreptei K_1A_1 cu raza precedentă, iar ca extremitate punctul de intersecție cu raza următoare, vom trage concluzia că momentele negative se vor reprezenta pe desen ca segmente dirijate de sus în jos.

Să găsim acum momentele forțelor în raport cu punctul K_2. Momentul forței *1* va fi pozitiv și se va reprezenta prin segmentul $\overline{A_2B_2}$ dirijat de jos în sus; momentul forțelor *2* și *3* vor fi negative și se vor reprezenta prin segmentele $\overline{B_2C_2}$ și $\overline{C_2D_2}$. Momentul rezultant al sistemului celor trei forțe se va reprezenta prin segmentul $\overline{A_2D_2}$, dirijat în jos și, prin urmare, va fi negativ.

Să găsim, mai departe, momentul forțelor în raport cu punctul K_3. Momentele forțelor *1* și *2* vor fi pozitive și se vor reprezenta prin segmentele $\overline{A_3B_3}$ și $\overline{B_3C_3}$; momentul forței *3* va fi negativ și se va reprezenta prin segmentul $\overline{C_3D_3}$; momentul rezultant al sistemului se va reprezenta prin segmentul $\overline{A_3D_3}$ și va fi pozitiv. În sfîrșit, pentru punctul K_4 toate momentele vor fi pozitive și momentul rezultant se va reprezenta prin segmentul $\overline{A_4D_4}$. Vedem că prin mutarea punctului K de la stînga spre dreapta, momentul rezultant care inițial este negativ scade în valoare absolută, apoi devine pozitiv și crește. Variația momentului fiind continuă, trebuie să existe o poziție a punctului K pentru care momentul să fie egal cu zero. Nu este greu de înțeles că în acest

caz punctul K se află pe suportul rezultantei. Într-adevăr, din teorema lui Varignon știm că momentul rezultant al sistemului de forțe paralele este egal cu momentul rezultantei; ultimul însă, evident, va fi egal cu zero, dacă rezultanta va trece prin punctul în raport cu care se determină momentul.

Este necesar totuși, de reținut, că la calcularea momentului trebuie să se înmulțească lungimea segmentului care reprezintă momentul, cu brațul h. Geometric, aceasta este echivalent cu calculul ariei dreptunghiului care are o latură egală cu h și cealaltă cu lungimea segmentului ce reprezintă momentul. Este evident că numai datorită egalității laturilor h, scăderea și adunarea momentelor se reduce la scăderea și adunarea segmentelor care reprezintă momentele, după cum se vede în fig. 118, care reprezintă sub formă de arii momentele forțelor 1, 2, 3, în raport cu punctul K_1. Este de asemenea evident că, măsurînd segmentele care reprezintă momentele, adică segmentele $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, ..., la scara forțelor, trebuie să măsurăm brațul h la scara lungimilor; se poate pune și condiția inversă, adică să se măsoare brațul h la scara forțelor, iar segmentele $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, ... — la scara lungimilor.

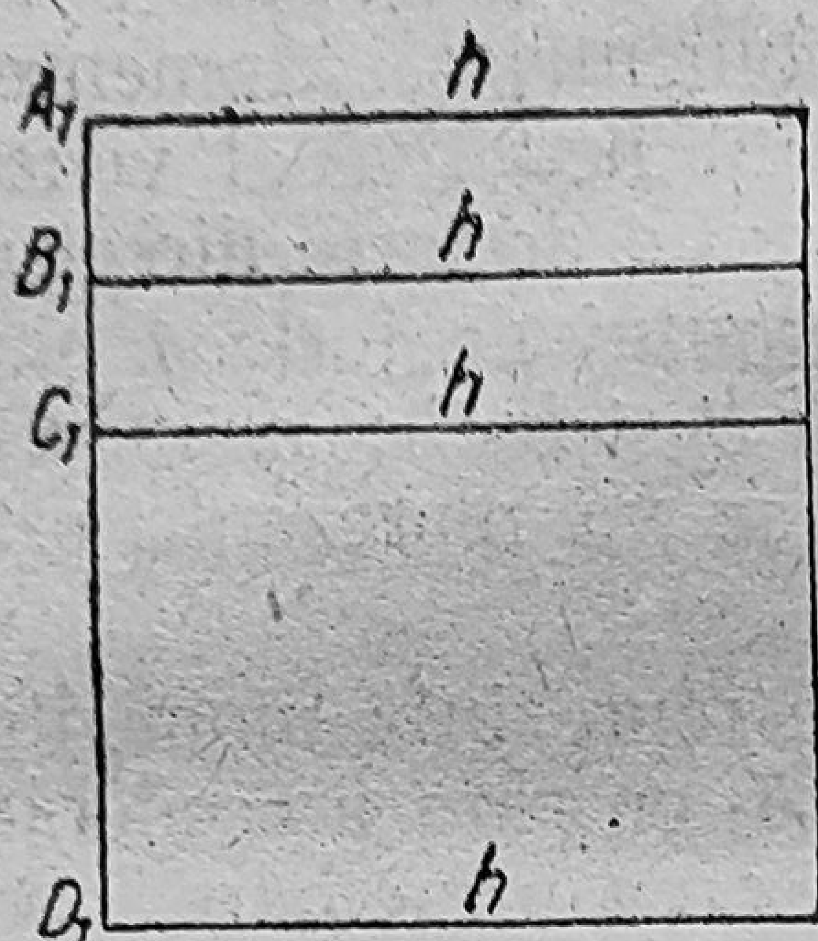


Fig. 118

Metoda expusă de reprezentarea grafică a momentelor poate fi aplicată pentru calculul grafic al sumelor de la numărătorii formulelor (6.12), pentru cazul figurilor plane. Fie dată figura plană, a cărei arie este egală cu σ, și o axă oarecare Δ, situată în planul acestei figuri plane. Să examinăm expresia

$$\lim \sum H \Delta\sigma,$$

unde $\Delta\sigma$ este elementul de suprafață al figurii plane considerate;

H — distanța de la centrul de greutate al acestui element pînă la axa Δ. Această mărime se numește *momentul static al suprafeței figurii plane date în raport cu o axă dată*. Este evident că dacă axa Δ coincide cu axa Oy sau Ox, vom obține:

$$\lim \sum x \Delta\sigma, \quad \lim \sum y \Delta\sigma,$$

adică vom ajunge la sumele din formulele (6.12). Împărțim figura plană considerată, prin drepte paralele cu axa Δ, în suprafețe ce pot fi asimilate cu trapeze atunci cînd distanțele dintre dreptele de secționare sînt mici; cele două suprafețe de la capete pot fi asimilate cu triunghiuri (fig. 119). Conform indicațiilor § 29, putem găsi poziția centrelor de greutate ale fîșiilor în care

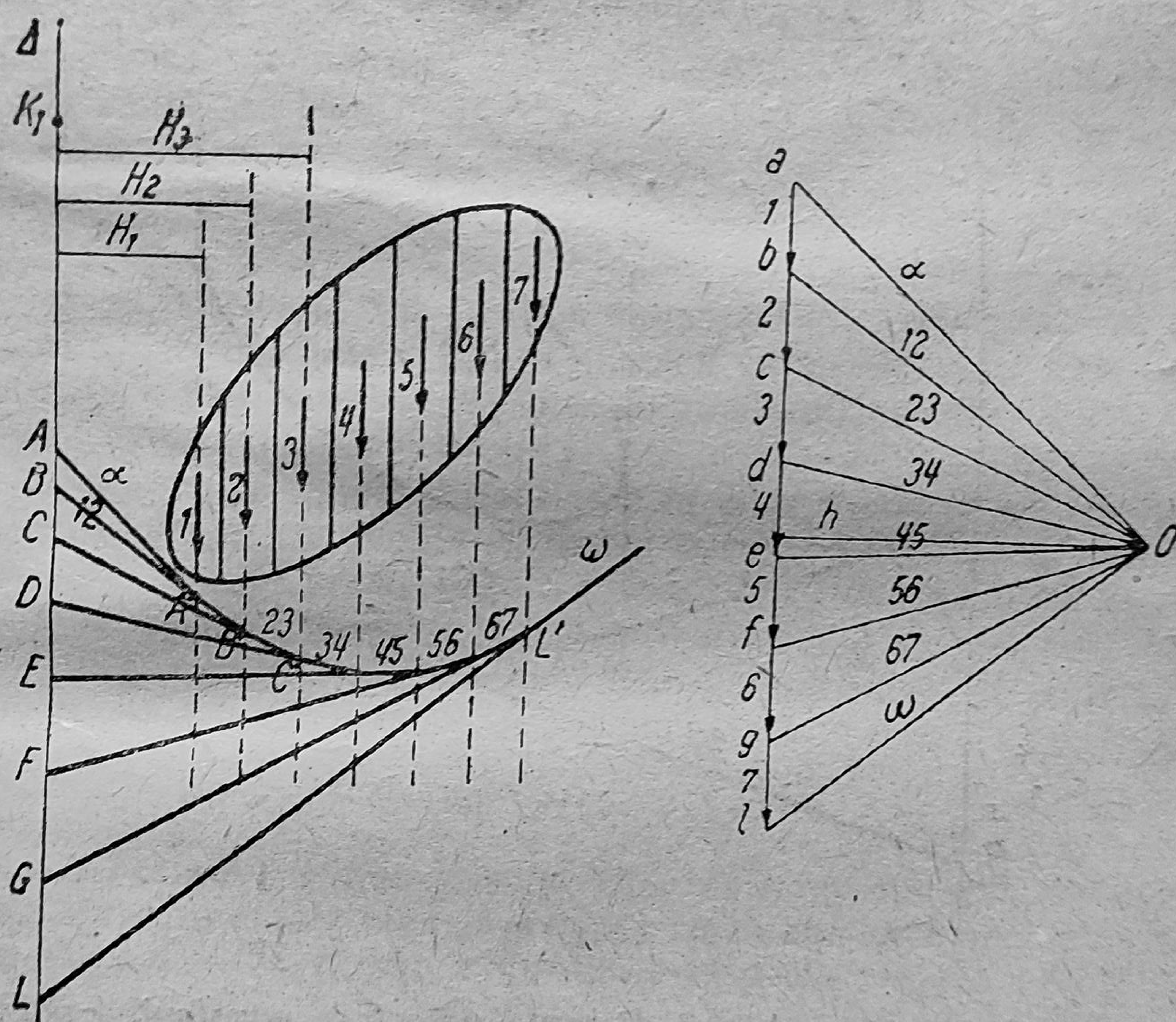


Fig. 119

s-a împărțit figura plană, și fie cu ajutorul proprietăților cunoscute din geometria elementară, fie direct pe desen, cu ajutorul unui planimetru, putem determina ariile $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3, \ldots$ ale acestor fîșii. Să reprezentăm aceste suprafețe $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3, \ldots$ prin vectorii *1*, *2*, *3*, ..., aplicați în centrele de greutate ale acestor suprafețe și paraleli cu axa Δ, modulii acestor vectori fiind proporționali cu ariile $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3, \ldots$ iar factorul de

proporționalitate fiind a. Astfel, vom reduce calculul sumei $H_1\Delta\sigma_1+H_2\Delta\sigma_2+H_3\Delta\sigma_3+$,... la calculul sumei

$$H_1 \cdot a \cdot 1+H_2 \cdot a \cdot 2+H_3 \cdot a \cdot 3+\ldots =$$
$$=a(H_1 \cdot 1+H_2 \cdot 2+H_3 \cdot 3\ldots),$$

adică de fapt la calculul momentului rezultant $H_1 \cdot 1+H_2 \cdot 2+$ $+H_3 \cdot 3+\ldots$ al vectorilor *1*, *2*, *3* în raport cu un punct oarecare K_1 situat pe axa Δ. Această problemă a fost rezolvată grafic;

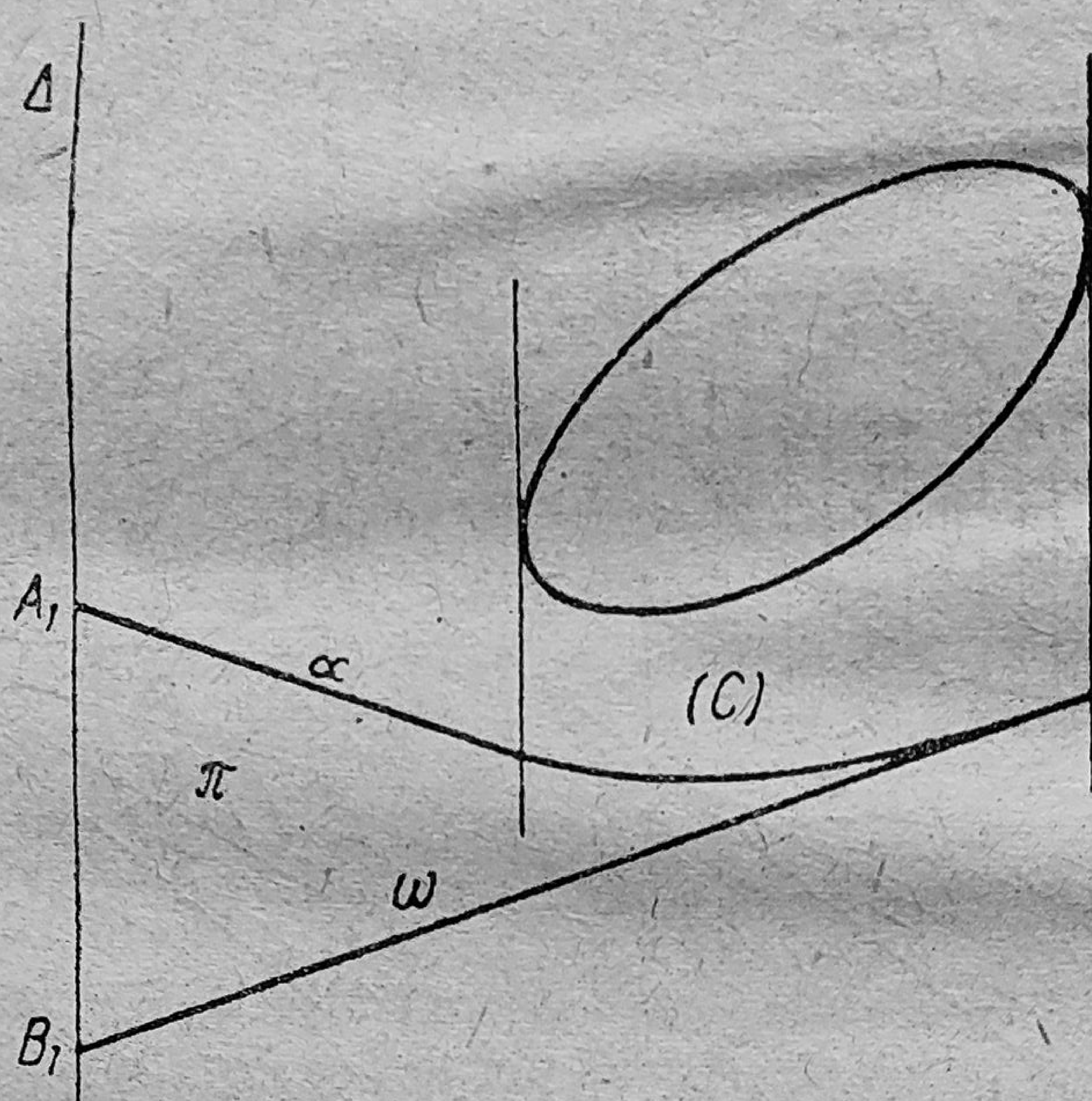


Fig. 120

am văzut că luînd arbitrar distanța polară h, construind poligonul funicular și prelungind laturile lui pînă la intersecția lor cu axa Δ, vom obține:

$$H_1 \cdot \Delta\sigma_1=H_1 \cdot a \cdot 1=AB \cdot ha,$$
$$H_2 \cdot \Delta\sigma_2=H_2 \cdot a \cdot 2=BC \cdot ha,$$
$$H_3 \cdot \Delta\sigma_3=H_3 \cdot a \cdot 3=CD \cdot ha,$$

astfel vom găsi:

$$\sum H\Delta\sigma=AL \cdot ha,$$

unde AL este segmentul axei Δ cuprins între laturile α și ω ale poligonului funicular, după cum se vede din fig. 119. Dacă nu-

mărul dreptelor de diviziune al figurii plane va crește la infinit, atunci poligonul funicular va tinde către o curbă (C), iar direcțiile laturilor sale α și ω către tangentele în capetele curbei (C), după cum se arată în fig. 120. Aceste tangente vor tăia pe axa Δ, segmentul A_1B_1 iar limita căutată a sumei va fi:

$$\lim \sum H\Delta\sigma = \iint H d\sigma = A_1B_1 \cdot ha.$$

Am văzut că mărimile h și a se pot lua arbitrar, dar sigur că lungimea segmentului A_1B_1 depinde de ele. Vom lua mărimile h și a astfel ca să avem $ha=\sigma$; în acest caz vom avea:

$$\frac{\lim \sum H\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\iint H d\sigma}{\sigma} = A_1B_1.$$

§ 56. Determinarea grafică a momentului de inerție al unei figuri plane. Fie dată o figură plană a cărei suprafață este egală cu σ, și o axă oarecare Δ situată în planul acestei figuri. Vom introduce următoarea definiție:

Se numește *moment de inerție al unei figuri plane în raport cu o axă situată în planul ei, limita sumei produselor elementelor de suprafață ale acestei figuri cu pătratele distanțelor de la centrele lor de greutate pînă la axa considerată.*

Prin urmare, introducînd pentru momentul de inerție în raport cu axa Δ notația I_Δ, avem:

$$I_\Delta = \lim \sum H^2\Delta\sigma = \iint H^2 d\sigma,$$

unde $d\sigma$ este elementul de suprafață, iar H — distanța de la centrul său de greutate pînă la axa Δ. Dacă axa Δ coincide cu axa Oy și cu axa Ox, atunci vom obține respectiv:

$$I_y = \lim \sum x^2\Delta\sigma = \iint x^2 d\sigma, \quad I_x = \lim \sum y^2\Delta\sigma = \iint y^2 d\sigma.$$

Adunînd ultimele două formule, vom avea:

$$I_x + I_y = \lim \sum (x^2+y^2)\,\Delta\sigma = \lim \sum r^2\Delta\sigma = \iint (x^2+y^2)\,d\sigma = \iint r^2 d\sigma,$$

unde $r^2=x^2+y^2$ este pătratul distanței de la centrul de greutate al elementului $d\sigma$ pînă la originea coordonatelor. Ultima expresie se numește *momentul de inerție polar în raport cu originea coordonatelor;* îl vom nota prin I_0, așa că vom avea:

$$I_0 = \lim \sum r^2\Delta\sigma = \iint r^2 d\sigma,$$

Momentele de inerție ale figurilor plane se întîlnesc în rezistența materialelor. Să examinăm suma

$$\sum H^2 \Delta\sigma = H_1^2 \Delta\sigma_1 + H_2^2 \Delta\sigma_2 + H_3^2 \Delta\sigma_3 + \ldots;$$

ea poate fi reprezentată sub forma:

$$H_1 \cdot H_1 \Delta\sigma_1 + H_2 \cdot H_2 \Delta\sigma_2 + H_3 \cdot H_3 \Delta\sigma_3 + \ldots,$$

dar la sfîrșitul § 55 am văzut că

$$H_1 \Delta\sigma_1 = AB \cdot ha, \quad H_2 \Delta\sigma_2 = BC \cdot ha, \quad H_3 \Delta\sigma_3 = CD \cdot ha, \ldots,$$

unde segmentele AB, BC, CD, ... sînt reprezentate în fig. 119. În acest fel vom avea:

$$\sum H^2 \Delta\sigma = (H_1 \cdot AB + H_2 \cdot BC + H_3 \cdot CD + \ldots)\, ha.$$

Din fig. 119 se vede că avem:

$$H_1 \cdot AB = 2 \text{ aria } \triangle ABA'$$
$$H_2 \cdot BC = 2 \text{ aria } \triangle BCB'$$
$$H_3 \cdot CD = 2 \text{ aria } \triangle CDC' \ldots$$

Prin urmare vom obține:

$$\sum H^2 \Delta\sigma = 2ha\, (\text{aria } \triangle ABA' + \text{aria } \triangle BCB' + \text{aria } \triangle CDC' + \ldots),$$

sau

$$\sum H^2 \Delta\sigma = 2ha \cdot \text{aria } AA'L'L,$$

unde aria $AA'L'L$ este suprafața figurii mărginite de raza α raza ω și celelalte raze ale poligonului funicular și de segmentul AL al axei Δ. Cînd numărul de elemente de divizare a figurii plane tinde către infinit (fig. 120) vom obține la limită

$$\lim \sum H^2 \Delta\sigma = \iint H^2 d\sigma = 2ha\pi,$$

unde π este aria figurii mărginite de curba (C) de tangentele α și ω în capetele acestei curbe și de segmentul axei Δ, așa cum se reprezintă în fig. 120. Desigur, totdeauna se poate lua numărul elementelor în care este divizată suprafața dată, suficient de mare, încît aria $AA'L'L$ să fie destul de apropiată de aria π.

CAPITOLUL XIV

APLICAŢII ALE METODELOR GRAFICE ÎN STATICĂ

§ 57. Centrul de greutate. Ne vom ocupa acum de aplicarea practică a construcţiilor grafice arătate mai înainte. Să examinăm mai întîi problema determinării grafice a centrului de greutate al figurilor plane.

Vom distinge două cazuri: cînd figura plană are axă de simetrie şi cînd nu are axă de simetrie. Presupunem întîi că figura are axă de simetrie. Ştim că centrul de greutate trebuie să

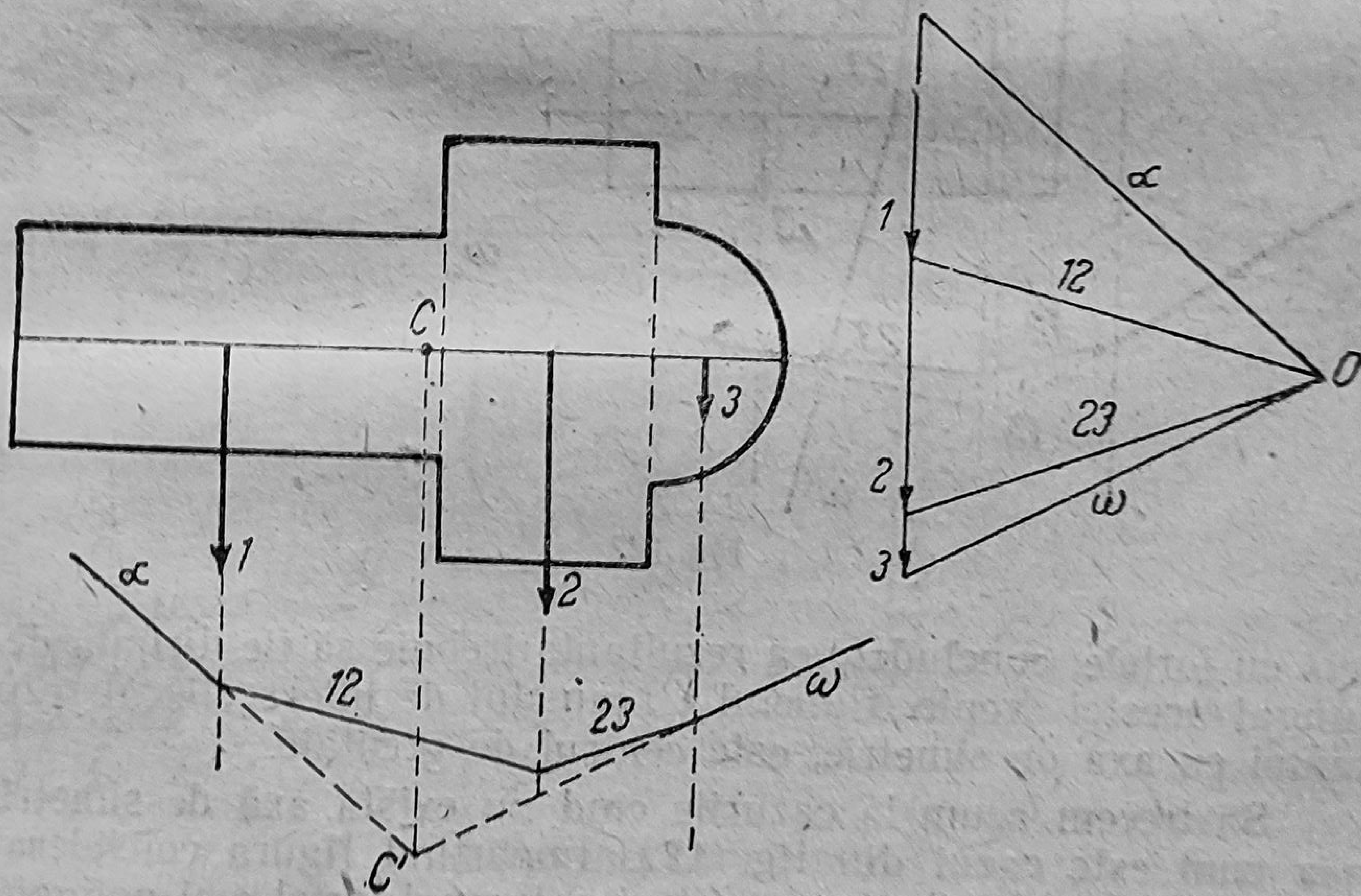


Fig. 121

fie situat pe această axă. Să admitem că putem diviza figura în figuri separate, ale căror centre de greutate şi greutăţi ne sînt cunoscute, aşa cum, de exemplu, se întîmplă în cazul reprezentat în fig. 121. Dacă figura plană este omogenă, atunci greutăţile

sînt proporționale cu ariile și este suficient să se măsoare aria fiecărei porțiuni, de exemplu, cu ajutorul planimetrului, pentru a se construi vectori proporționali cu greutatea. Pentru obținerea rezultantei sistemului de forțe, construim poligonul forțelor și poligonul funicular. Laturile extreme α și ω ale poligonului funicular se intersectează în punctul C'. Ducînd dreapta $C'C$, para-

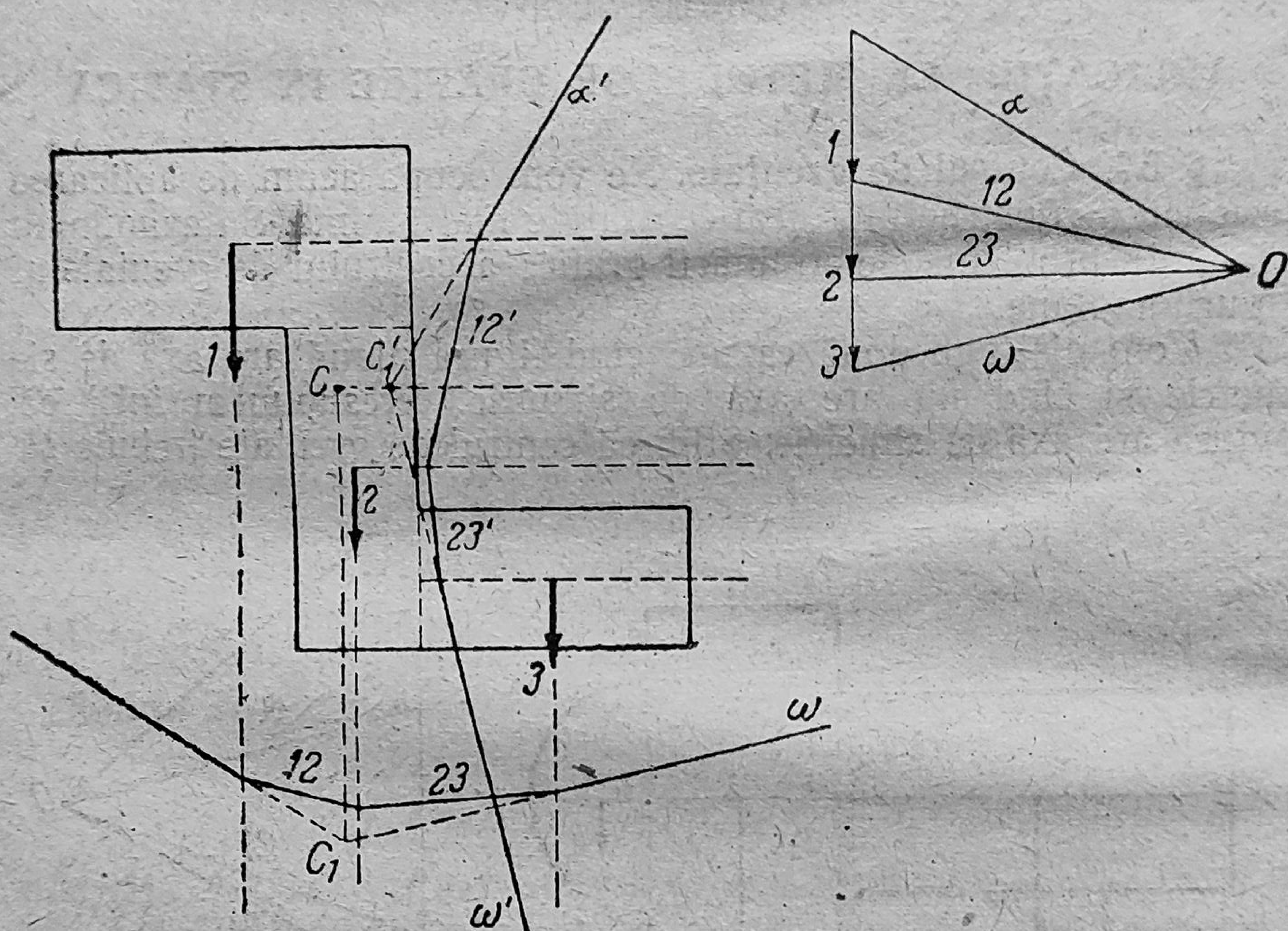


Fig. 122

lelă cu forțele, concludem că rezultanta trebuie să fie dirijată de-a lungul acestei drepte. Punctul C, punctul de intersecție al rezultantei cu axa de simetrie, este centrul de greutate.

Să trecem acum la cazurile cînd nu există axă de simetrie, așa cum este cazul din fig. 122. Împărțind figura considerată în trei dreptunghiuri, vom construi poligonul forțelor și poligonul funicular pentru sistemul de trei forțe obținut, *1*, *2*, *3*. Laturile extreme α și ω ale poligonului funicular se intersectează în punctul C_1. Ducînd prin acest punct dreapta C_1C paralelă cu forțele, deducem că rezultanta trebuie să fie dirijată de-a lungul acestei drepte C_1C și centrul de greutate trebuie să se afle pe această dreaptă. Știm (cap. V) că centrul forțelor paralele nu se

schimbă dacă toate forțele se rotesc cu același unghi. Rotim forțele *1*, *2*, *3*, de exemplu, cu un unghi drept și construim pentru această nouă poziție a forțelor poligonul funicular (α', *12'*, *23'*, ω'). Este evident că laturile noului poligon funicular vor fi respectiv perpendiculare pe laturile primului poligon funicular (α, *12*, *23*, ω); de aceea construirea poligonului (α', *12'*, *23'*, ω') se reduce la trasarea prin punctele date a unor drepte perpendiculare pe laturile α, *12*, *23*, ω. Ducînd prin punctul de intersecție C_1' al laturilor extreme α' și ω' ale noului poligon funicular, dreapta $C_1'C$, perpendiculară pe dreapta C_1C, tragem concluzia că centrul de greutate trebuie să fie situat pe această dreaptă $C_1'C$; prin urmare, centrul de greutate se găsește în punctul de intersecție al celor două drepte C_1C și $C_1'C$.

§ 58. Grinda pe două reazeme. Să presupunem că avem o grindă așezată pe două reazeme, iar asupra grinzii acționează

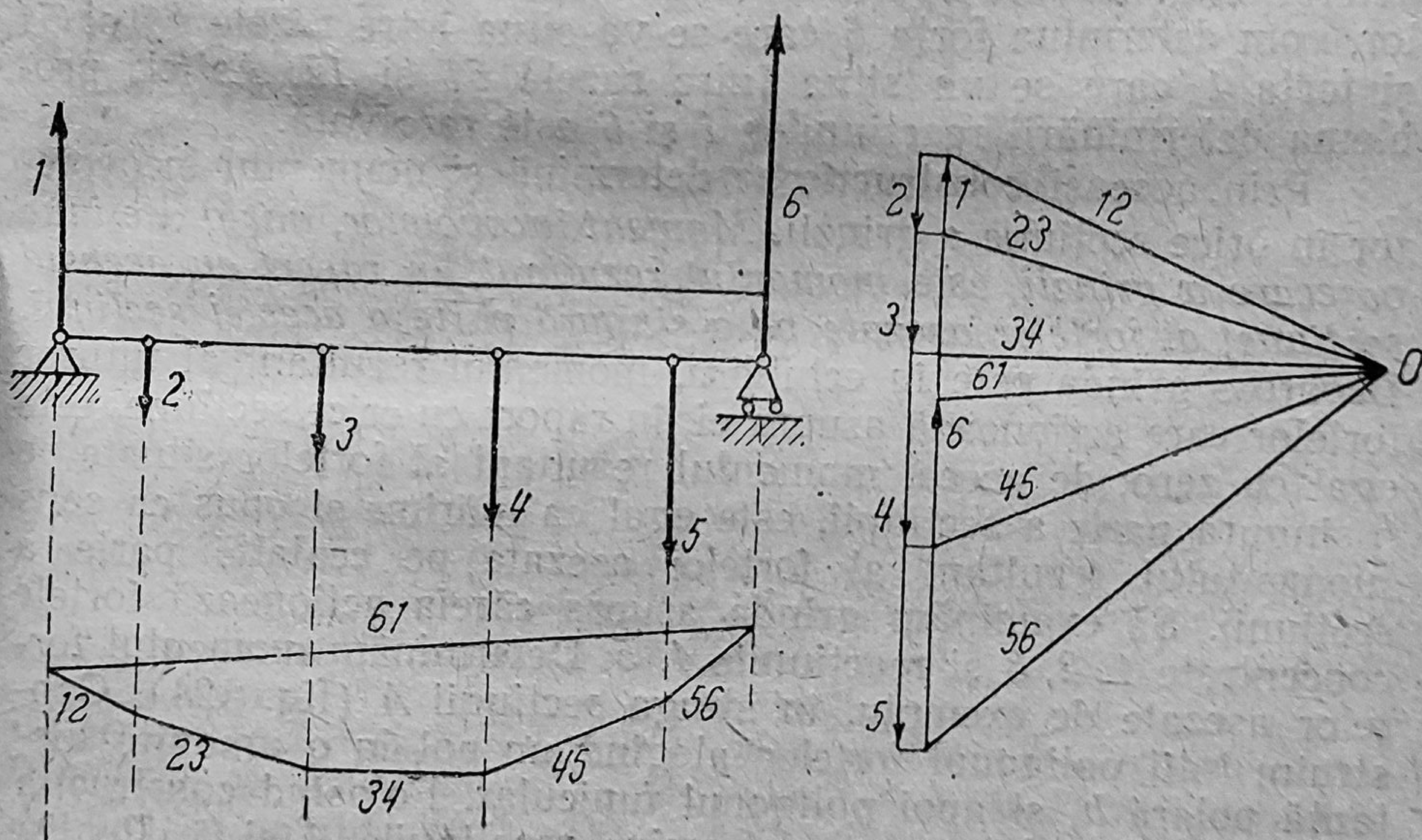


Fig. 123

forțele concentrate *2*, *3*, *4*, *5*. Vom neglija deocamdată greutatea proprie a grinzii (fig. 123). Să arătăm mai întîi cum se pot determina reacțiunile *1* și *6* ale reazemelor grinzii. Determinarea analitică a acestor reacțiuni nu prezintă nici un fel de dificultăți. Deoarece grinda este în echilibru sub acțiunea tuturor celor șase forțe, suma momentelor acestor forțe în raport cu orice punct

trebuie să fie egală cu zero. Luînd suma momentelor în raport cu fiecare reazem, vom obține două ecuații, în fiecare din ele intervenind numai cîte o singură reacțiune necunoscută, care se poate determina ușor. Această problemă se rezolvă ceva mai greu grafic. Deoarece toate cele șase forțe sînt în echilibru, poligonul forțelor și poligonul funicular trebuie să fie închise. Construim mai întîi poligonul forțelor *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, și *6*. Forțele *2*, *3*, *4*, și *5* se vor așeza pe dreaptă într-un singur sens; forțele *6* și *1* vor fi dirijate de-a lungul aceleiași drepte, dar în sens opus. Astfel, poligonul forțelor se reduce în acest caz la un segment de dreaptă de-a lungul căruia se găsesc forțele *2*, *3*, *4*, *5*, într-un sens și forțele *6* și *1* în sens opus. Vom duce razele *12*, *23*, *34*, *45*, *56* și cu ajutorul lor, poligonul funicular, care pentru ușurința desenului îl vom plasa sub grindă. Deoarece poligonul funicular trebuie să fie închis, direcția razei *61* din poligonul funicular este determinată. Ducînd apoi din polul *O* raza *61* în poligonul forțelor, vom determina forța *6* care se va situa între razele *56* și *61* și forța *1* care se va situa între razele *61* și *12*. Astfel, problema determinării reacțiunilor *1* și *6* este rezolvată.

Prin aceeași construcție se determină și momentul încovoietor în orice secțiune a grinzii. *Moment încovoietor, într-o secțiune oarecare a grinzii, este momentul rezultant, în raport cu această secțiune, al forțelor așezate pe o singură parte a acestei secțiuni.* Deoarece grinda este în echilibru, momentul rezultant al tuturor forțelor care acționează asupra ei, în raport cu orice secțiune, este egal cu zero; de aceea, momentul rezultant al forțelor situate pe o singură parte a secțiunii, este egal ca mărime și opus ca sens momentului rezultant al forțelor așezate pe cealaltă parte a secțiunii. Să examinăm grinda asupra căreia acționează forțele concentrate *1*, *2*, *3* și reacțiunile *4*, *5*. Determinăm momentul forțelor așezate de exemplu, în stînga secțiunii *A* (fig. 124). Construim întîi poligonul forțelor alegînd un pol la o anumită distanță polară *h*, și apoi poligonul funicular. Folosind construcția arătată mai înainte, vom determina reacțiunile *4* și *5*. Pentru determinarea momentului total al forțelor *5*, *1*, *2*, *3*, în raport cu secțiunea *A*, vom folosi reprezentarea grafică a momentului prin intermediul unor segmente. Ducem prin *A* dreapta Δ, paralelă cu forțele. Momentul forței *5* este negativ și se reprezintă prin segmentul determinat pe Δ de razele *45* și *51*. Momentul forței *1* este pozitiv și se reprezintă prin segmentul determinat de Δ de razele *51* și *12*; prin urmare, momentul rezultant al forțelor *5* și *1* este reprezentat prin segmentul determinat pe Δ de razele *45*

şi *12*. Continuînd cu aceleaşi raţionamente, este uşor să ne convingem că momentul rezultant al forţelor *5, 1, 2, 3* va fi reprezentat prin segmentul *ab*, determinat pe Δ de razele *45* şi *34*, adică de razele extreme ale sistemului format din cele patru forţe din stînga secţiunii. Momentul rezultant al forţelor, situate pe dreapta secţiunii *A* va fi reprezentat prin acelaşi segment dar de semn opus. Astfel, *momentul încovoietor pentru o secţiune oarecare se reprezintă printr-un segment paralel cu forţele interceptat de razele poligonului funicular în dreptul secţiunii considerate*. Pentru a obţine momentul, trebuie să nu uităm că efectuăm produsul dintre segmentul *ab* şi distanţa polară *h*; unul dintre aceste segmente trebuie să fie măsurat la scara forţelor, iar

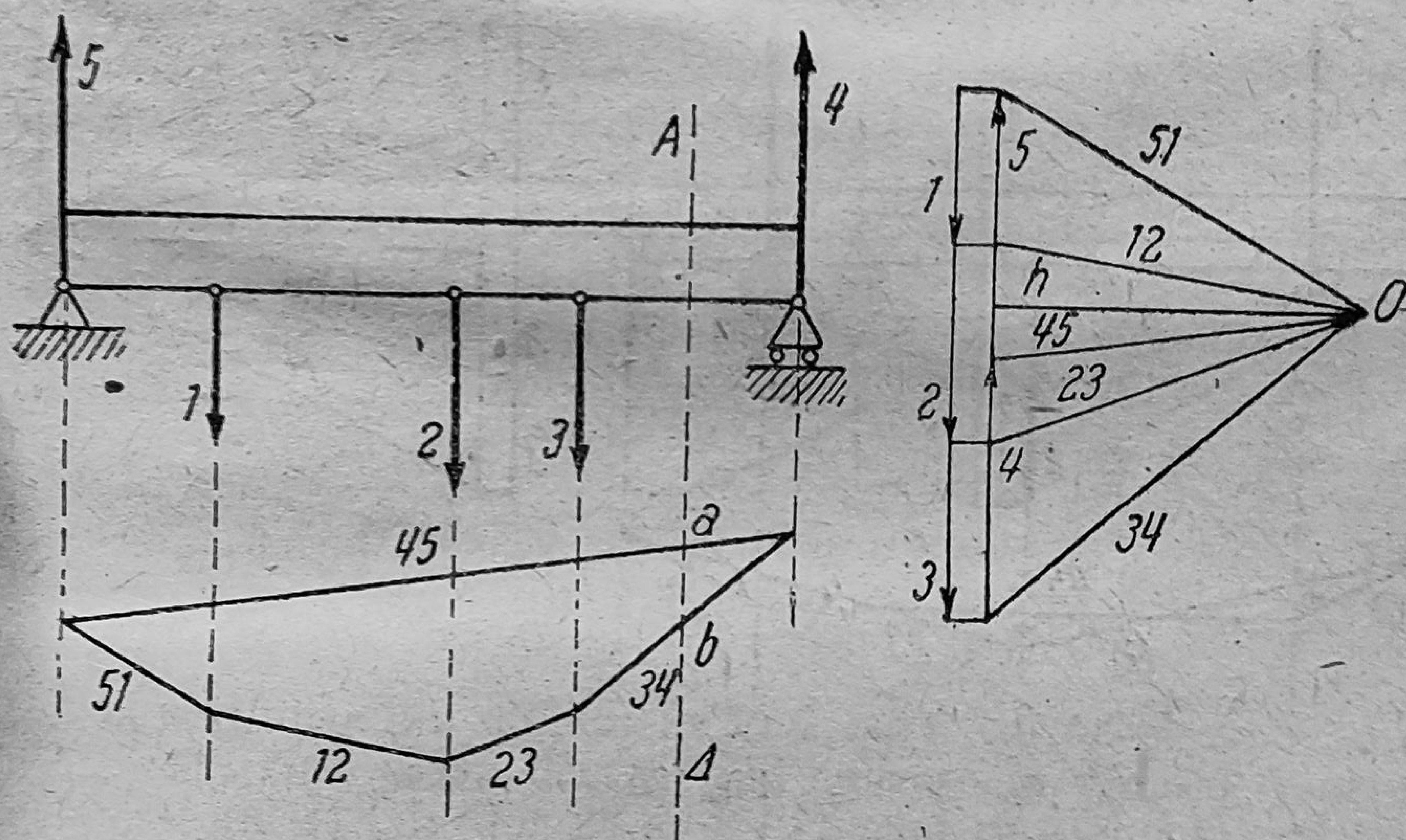


Fig. 124

celălalt la scara lungimilor. Dacă se consideră $h=1$, atunci segmentele *ab* ne dau chiar valoarea momentelor. De aceea, suprafaţa închisă în interiorul poligonului funicular se mai numeşte uneori şi *suprafaţa momentelor*. Vedem că momentul încovoietor este egal cu zero în punctele de rezemare, variază liniar între forţe şi poate atinge valoarea maximă numai în dreptul forţelor. De aceea secţiunea periculoasă, în care se produce momentul maxim, poate fi căutată numai în punctele de aplicaţie ale forţelor. Pentru a nu greşi la determinarea semnului momentului, este suficient să urmărim variaţia lui pe grindă de la extremitate pînă la secţiunea considerată. In adevăr, să ne deplasăm

puțin la dreapta capătului stîng al grinzii. În partea stîngă va fi situată numai forța *5*, al cărei moment este negativ și reprezentat prin segmentul interceptat de laturile poligonului funicular. La deplasarea ulterioară spre dreapta, acest segment nu se anulează nicăieri; prin urmare, ținînd seamă de variația sa continuă, momentul rămîne negativ și astfel pentru secțiunea *A*, momentul rezultant al forțelor aflate în stînga secțiunii este negativ. Reiese, pe baza observației anterioare, că momentul rezultant al forțelor așezate în dreapta punctului *A* este pozitiv.

Să cercetăm și cazul grinzii reprezentate în fig. 125, cînd momentul încovoietor la trecerea de la o secțiune la alta își

Fig. 125

schimbă semnul. La capetele grinzii sînt aplicate forțele *1* și *3*, la mijloc forța *2*; în reazeme acționează reacțiunile *4* și *5* pe care le vom determina cu ajutorul metodei arătate mai înainte. În cazul considerat, laturile poligonului funicular *12*, *45*, și *23*, *45*, se întretaie, și pentru punctele lor de întretăiere, momentul încovoietor este egal cu zero. Să urmărim variația momentului încovoietor pentru diferite secțiuni ce se deplasează de la stînga spre dreapta. Dacă vom lua o secțiune foarte apropiată de extremitatea din stînga a grinzii, atunci la stînga secțiunii va acționa numai forța *1*, al cărei moment în raport cu această secțiune este pozitiv. În dreptul forței *5*, momentul pozitiv atinge cea mai mare valoare, apoi scade și devine zero în punctul de intersecție al laturilor *12* și *45*. Nu este greu de înțeles ce se întîmplă. Forțele *1* și

5 dau o rezultantă paralelă cu forța *5*, orientată în același sens cu forța *5* și situată în dreapta forței 5. Deoarece, în conformitate cu teorema lui Varignon, momentul rezultant al forțelor *1* și *5* este egal cu momentul rezultantei lor, este evident că momentul rezultant va fi egal cu zero în punctul de aplicație al rezultantei. De aici rezultă că ducînd prin punctul de intersecție al laturilor *12* și *45* o dreaptă paralelă cu forțele, vom obține suportul rezultantei forțelor *1* și *5*. Deplasîndu-ne și mai departe spre dreapta, vom obține momente negative. În adevăr, momentul rezultant al forțelor *1* și *5* va fi egal cu momentul rezultantei lor care, evident, este negativ. Acest moment va crește în valoare absolută

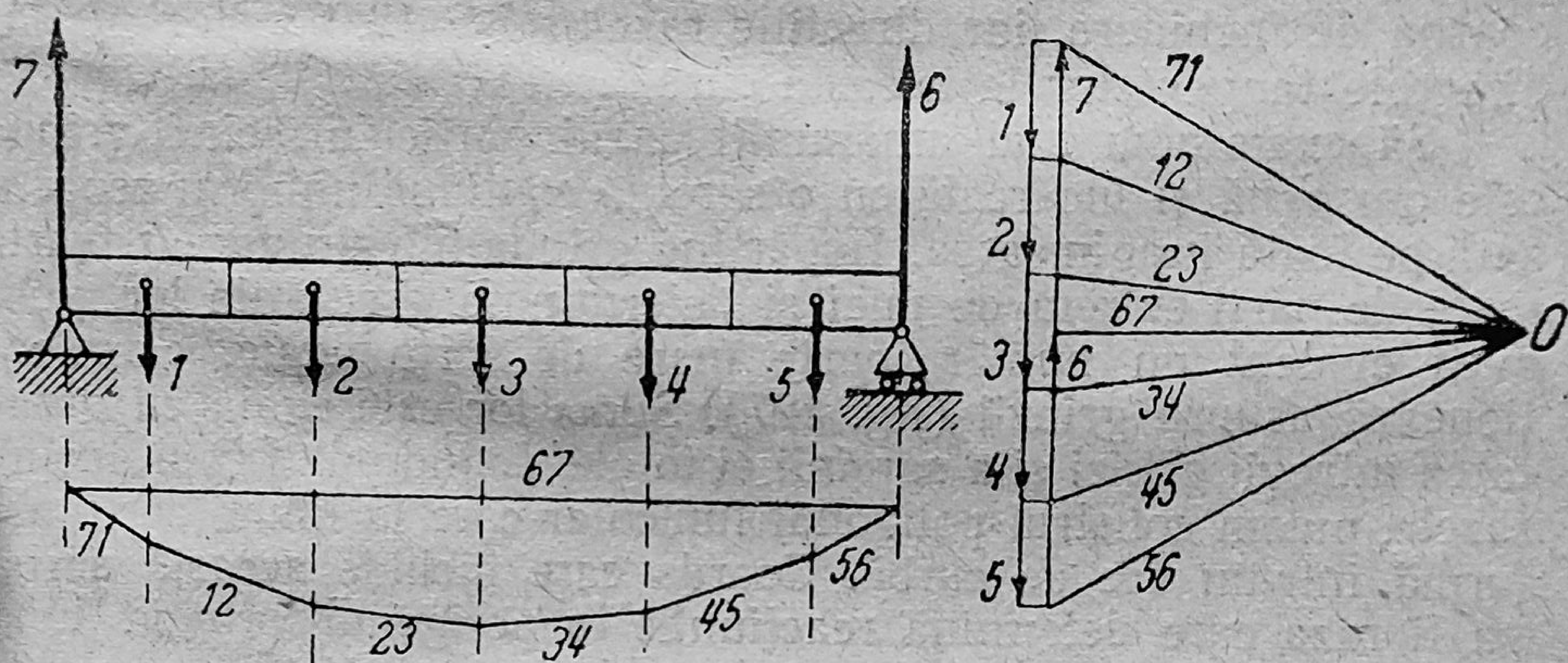


Fig. 126

pînă la secțiunea din dreptul forței 2, apoi va începe să scadă în valoare absolută și va deveni egal cu zero în dreptul punctului de intersecție al laturilor *23* și *45*. Ducînd prin punctul de intersecție al laturilor *23* și *45* o dreaptă paralelă cu forțele, este evident că vom obține suportul rezultantei forțelor *1*, *5* și *2*. Prin deplasarea mai departe spre dreapta, momentul devine pozitiv, atinge valoarea maximă în dreptul forței *4* și devine egal cu zero la capătul din dreapta al grinzii. Semnele puse în fig. 125 în poligonul funicular ne indică semnul momentului încovoietor. Vedem că și în acest caz mai complicat se poate determina ușor semnul momentului încovoietor pentru o secțiune oarecare, urmărind variațiile continue ale momentului în timpul deplasării secțiunii pe grindă.

Pînă acum, am neglijat greutatea grinzii și am examinat doar cazul forțelor concentrate, care acționează asupra ei. Presupunem acum că grinda are greutate și este încărcată continuu,

pe toată lungimea sa. Împărțim grinda în porțiuni separate și determinăm greutatea fiecărei porțiuni, care se compune din greutatea porțiunii cosiderate a grinzii și partea corespunzătoare a sarcinilor. Presupunem că am împărțit grinda în 5 părți cu greutățile *1*, *2*, *3*, *4*, *5* (fig. 126). Construind după metoda indicată mai înainte, poligonul forțelor și poligonul funicular pentru cele cinci forțe *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, vom determina atît reacțiunile *6* și *7*, cît și momentul încovoietor pentru orice secțiune a grinzii. Este evident că, construcția indicată ne va da un rezultat cu atît mai precis cu cît grinda va fi împărțită în mai multe părți. La limită, poligonul funicular se va transforma într-o curbă funiculară cu o coardă de închidere, iar direcțiile razelor *71*, *12*, *23* etc., ne dau direcțiile tangentelor la această curbă

Să examinăm mai amănunțit cazul particular, cînd grinda este omogenă și încărcată cu o sarcină continuă uniform repartizată pe toată lungimea sa. Împărțind grinda într-un număr foarte mare de părți extrem de mici și determinînd greutățile lor, vom avea evident un număr foarte mare de forțe egale, care acționează asupra grinzii (fig. 127). Suma lor este egală cu greutatea întregii grinzi și a sarcinii ei totale. Luînd polul O și ducînd razele, putem construi poligonul funicular care la limită se transformă într-un arc de curbă. Coarda care închide această curbă va fi raza care determină reacțiunile în poligonul forțelor. Vom arăta că în cazul considerat, curba este o parabolă. Pentru aceasta ne folosim de fig. 128. Notăm greutatea unității de lungime a grinzii prin q. Atunci greutatea unui element de lungime dy va fi egală cu qdy. La fiecare tangentă T la curba funiculară, îi va corespunde o rază paralelă OA, în poligonul forțelor și invers. Dirijăm axa O_1y paralel cu grinda, iar axa O_1x prin acel punct al curbei în care tangenta este paralelă cu O_1y. Să considerăm o tangentă oarecare T, dusă la curbă în punctul B și care formează cu axa O_1x unghiul α. Dacă $y=f(x)$ este ecuația curbei căutate, se știe că vom avea:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{dx}{dy}.$$

Notăm distanța polară CO din poligonul forțelor prin h. Deoarece $AO \parallel T$, atunci $\sphericalangle CAO=\alpha$, și avem:

$$AC=h\operatorname{ctg}\alpha=h\frac{dx}{dy}.$$

Să ne deplasăm acum de-a lungul grinzii spre dreapta cu o lungime infinit mică dy. Vom obține o nouă tangentă T_1, în

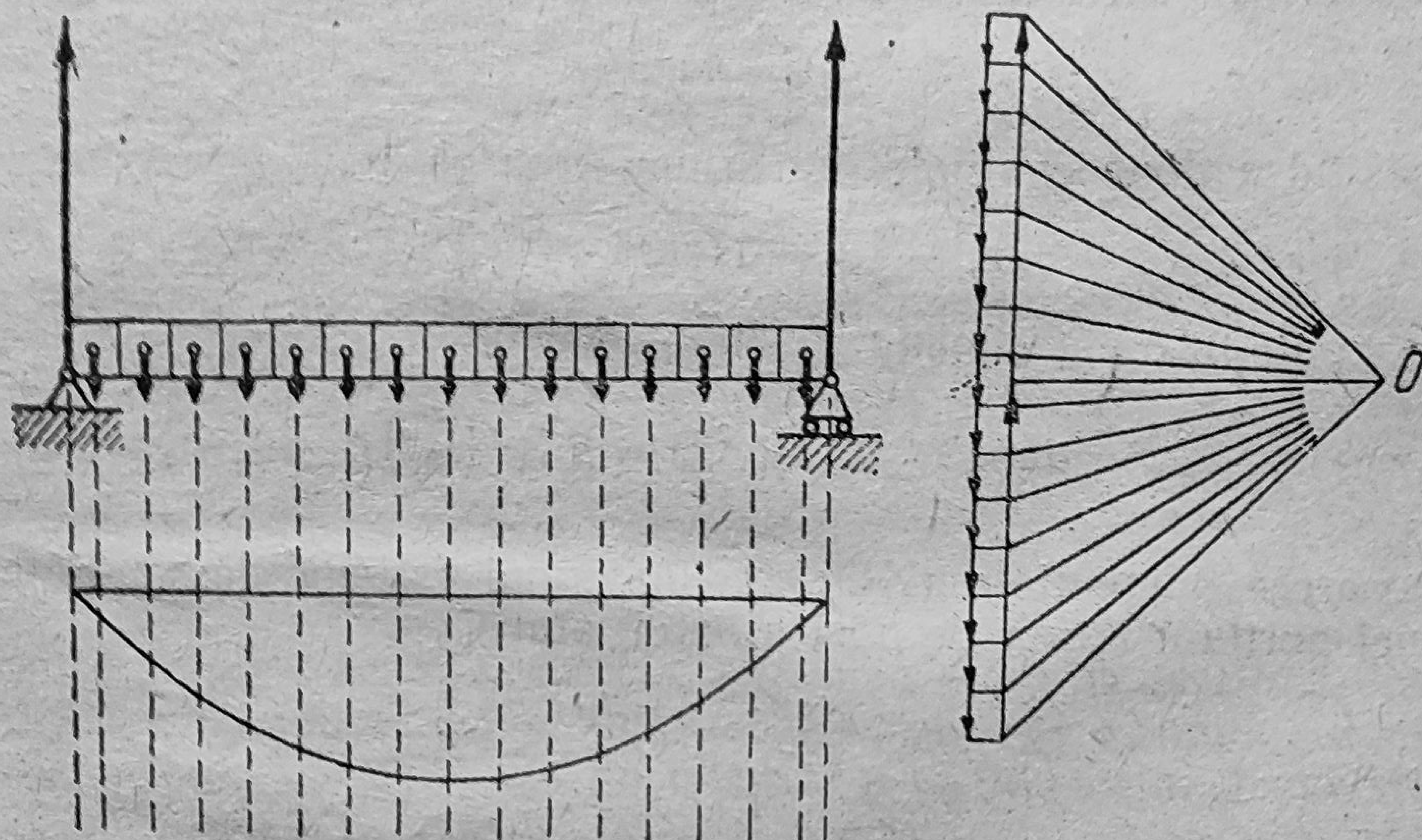


Fig. 127

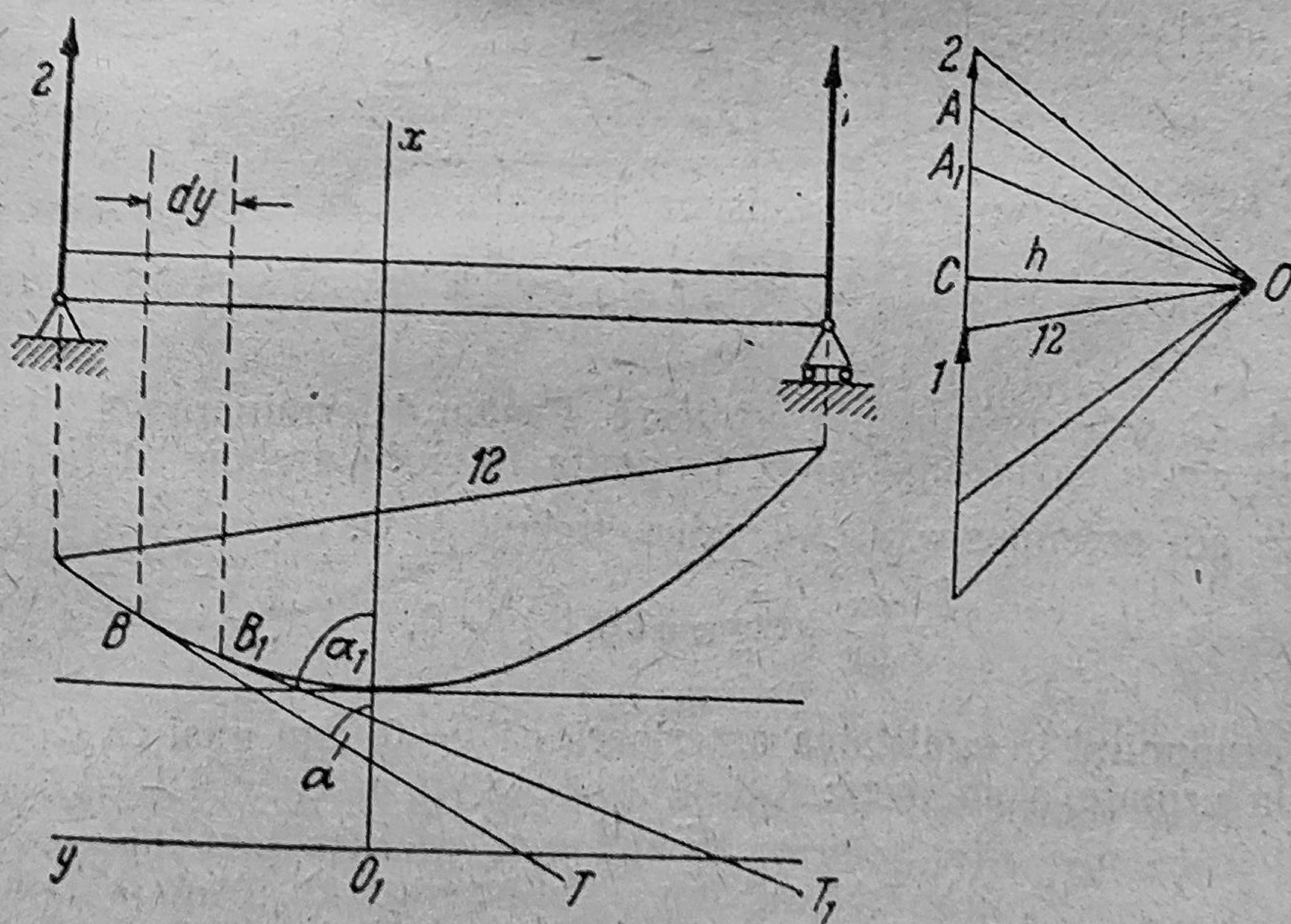


Fig. 128

punctul B_1 și o nouă rază $OA_1 \| T_1$, care formează cu axa O_1x unghiul α_1; prin urmare, vom avea:

$$A_1C = h \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Scăzînd a doua egalitate din prima, vom obține:

$$AC - A_1C = h (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha_1),$$

iar la limită cînd punctul A_1 tinde către A

$$d(AC) = h \cdot d(\operatorname{ctg} \alpha) = h \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right).$$

Deoarece diferențiala (AC) din poligonul forțelor dă greutatea unei porțiuni infinit de mici a barei, atunci

$$d(AC) = q\,dy,$$

și avem:

$$q\,dy = h \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right), \quad \text{sau } q = h\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = h\frac{d^2x}{dy^2}.$$

De aici găsim:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{q}{h}.$$

Integrînd, vom obține prima derivată:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{q}{h} y + C_1,$$

unde C_1 este o constantă arbitrară. Pentru determinarea ei observăm că în cazul cînd $y=0$, tangenta la curbă trebuie să fie așa cum am presupus axa O_1y, adică trebuie să avem: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Presupunînd în egalitatea anterioară că $y=0$ vom găsi că $C_1=0$; prin urmare, vom avea:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{q}{h} y.$$

De aici vom obține:

$$x = \frac{q}{h}\frac{y^2}{2} + C_2.$$

Pentru a determina pe C_2, vom nota abscisa punctului în care axa O_1x intersectează curba prin a. Pentru $y=0$, trebuie să avem:

$$a=C_2,$$

și vom avea:

$$x=\frac{q}{h}\frac{y^2}{2}+a \quad \text{sau} \quad y^2=\frac{2h}{q}(x-a).$$

În acest fel, am obținut ecuația unei parabole cu parametrul $p=\frac{h}{q}$. Dacă vom alege tangenta paralelă cu grinda ca axă O_1y, vom avea $a=0$, și vom obține ecuația de formă:

$$y^2=\frac{2h}{q}x.$$

Vom presupune acum că asupra grinzii în afară de sarcinile distribuite mai acționează și forțe concentrate, de exemplu, două forțe *1* și *2* (fig. 129). Să ne imaginăm că împărțim grinda în

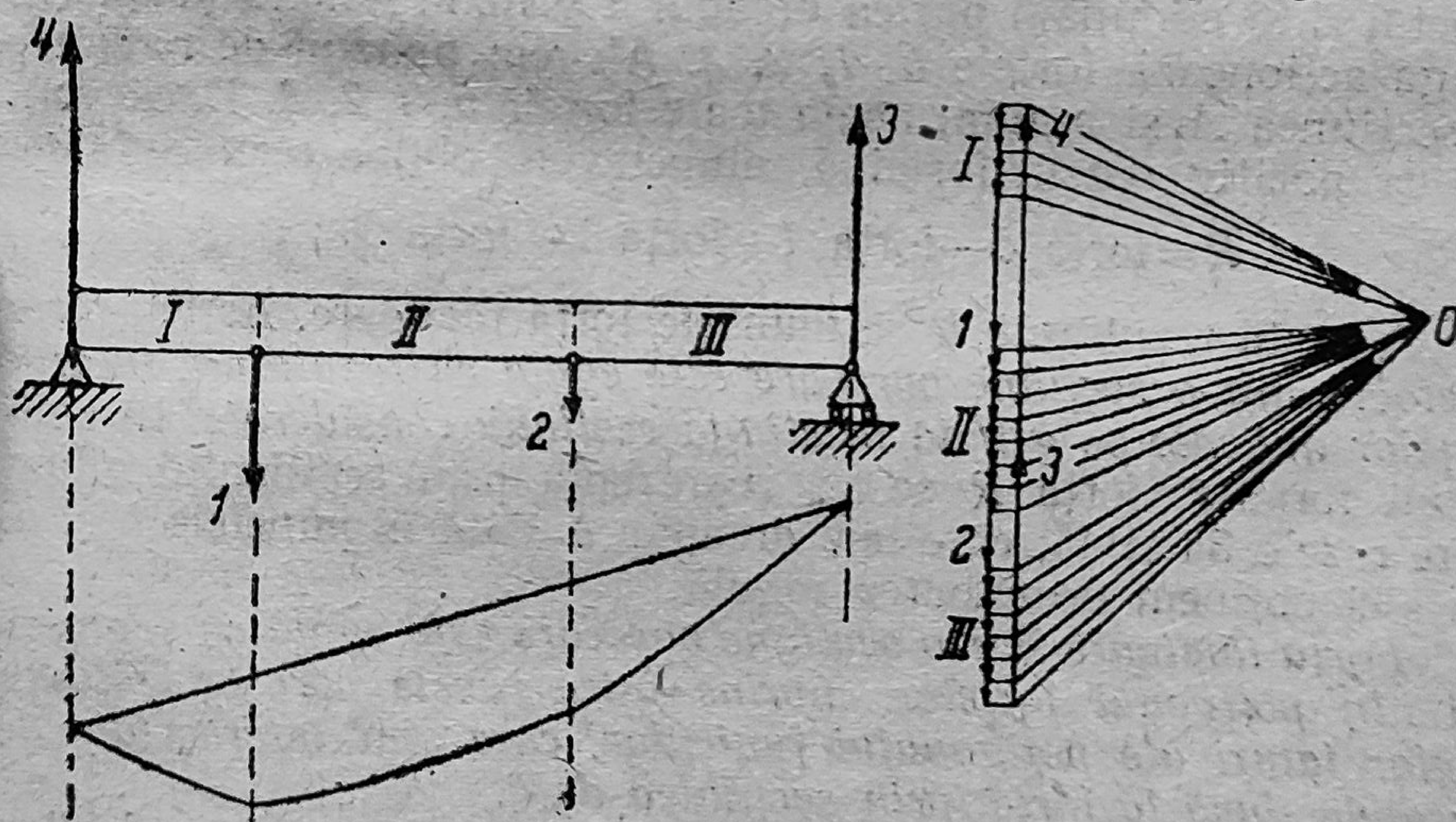


Fig. 129

trei sectoare: *I*, *II* și *III* în dreptul forțelor. Greutatea primului sector va fi reprezentată în poligonul forțelor prin segmentul de dreaptă *I*; lui îi va corespunde o mulțime infinită de raze. Poligonul funicular pentru sectorul *I* se va transforma după cele demonstrate anterior într-un arc de parabolă, ale cărei tangente în punctele extreme vor fi paralele cu razele extreme, duse la seg-

mentul I în poligonul forțelor. Mai departe, în poligonul forțelor trebuie să reprezentăm forța 1 apoi greutatea sectorului II; segmentului II îi va corespunde o infinitate de raze. Poligonul funicular pentru sectorul II se va transforma într-un arc de parabolă, ale cărui tangente în punctele extreme vor fi paralele cu razele extreme ale segmentului II din poligonul forțelor. În sfîrșit, vom figura în poligonul forțelor forța 2 și greutatea sectorului III. Sectorului III îi va corespunde de asemenea un arc de parabolă, ale cărui tangente în punctele extreme sînt paralele cu razele extreme ale segmentului III din poligonul forțelor. Ca și mai sus, coarda de închidere va indica direcția razei, care determină reacțiunile 3 și 4. Vedem că în cazul considerat suprafața momentelor este mărginită de trei arce de parabolă care se frîng în dreptul forțelor concentrate și la coarda de închidere. Tangentele în punctele extreme ale acestor arce de parabolă sînt paralele cu razele extreme ale porțiunilor hașurate în poligonul forțelor.

Să revenim la fig. 124. Ducem în grindă o secțiune prin punctul A și eliminăm partea dreaptă a grinzii. Asupra părții din stînga acționează forțele 5, 1, 2, 3. Alegem punctul de reducere în secțiunea A și mutăm acolo toate forțele 5, 1 2, 3. Dacă vom lua ca pozitiv sensul forței 5, atunci vom obține rezultanta R:

$$R = \text{forța } 5 - \text{forța } 1 - \text{forța } 2 - \text{forța } 3.$$

Această rezultantă R se numește forță tăietoare. Astfel, *forța tăietoare într-o secțiune oarecare este egală cu rezultanta tuturor forțelor aplicate pe grindă în stînga secțiunii considerate.* În poligonul forțelor, forța R se va reprezenta prin segmentul situat între razele 34 și 45, care taie dreapta Δ dată în punctele b și a. De aici obținem următoarea regulă:

Forța tăietoare într-o secțiune oarecare este egală cu segmentul din poligonul forțelor cuprins între razele corespunzătoare acelor laturi ale poligonului funicular, care sînt intersectate de paralela dusă la forțe, prin secțiunea dată.

Afară de rezultanta R, vom mai obține sistemul cuplurilor suplimentare. După cum știm, toate aceste cupluri se pot aduna, iar momentul cuplului rezultant va fi egal cu momentul rezultant al forțelor 5, 1, 2 și 3 în raport cu secțiunea A, adică cu momentul încovoietor $M = ab \cdot h$. Vedem că partea stîngă a grinzii se găsește sub acțiunea forței R, aplicate în secțiunea A și a cuplului, al cărui moment este egal cu momentul încovoietor M. Secționînd grinda pentru ca partea stîngă să rămînă în echilibru, este necesar ca să i se aplice în secțiunea A o forță egală ca

mărime și direcție și de sens opus forței tăietoare, și un cuplu al cărui moment este egal ca mărime și de sens opus momentului încovoietor M. Deoarece atunci cînd există partea dreaptă, partea stîngă rămîne în echilibru, este evident că toată acțiunea mecanică a părții drepte asupra părții stîngi se reduce la acea forță și la acel cuplu. De aici se înțelege cît de importantă este cunoașterea forței tăietoare și a momentului încovoietor pentru fiecare secțiune a grinzii; ele caracterizează forțele interioare care acționează în secțiunea considerată a grinzii.

Pentru toate celelalte amănunte, în particular pentru rezolvarea problemelor referitoare la găsirea momentelor maxime, influența deplasării sarcinilor etc., cititorul va consulta cursurile speciale de rezistența materialelor, de statică grafică și de statica construcțiilor.

CAPITOLUL XV

GRINZI CU ZĂBRELE

§ 59. **Generalități.** Orice element de construcție se deformează sub acțiunea forțelor exterioare aplicate asupra lui; forțele elastice care se dezvoltă în acest caz într-o secțiune a elementului de construcție se echilibrează cu forțele exterioare. Există elemente de construcție, ale căror deformații se pot reduce numai la compresiuni și întinderi, în timp ce alte elemente se pot totodată încovoia.

Elementele de construcție solicitate la încovoiere trebuie, în general, să fie mai larg dimensionate, ceea ce duce la un consum mai mare de materiale; în afară de aceasta calculul elementelor solicitate la încovoiere este dificil, trebuind să se țină seama și de proprietățile elastice ale materialului.

De aceea, de multe ori se tinde să se proiecteze elemente de construcție în care, pe măsura posibilității lor, nu apare încovoierea, ci numai compresiunea sau întinderea. De exemplu, piloni înalți pentru radiocomunicații sînt ancorați cu cabluri, pentru a echilibra presiunea vîntului prin tensiunea din cabluri și nu prin încovoierea pilonului. Balcoanele se sprijină cu contrafișe care se reazemă pe zidul clădirii, pentru a echilibra încărcătura balconului, mai curînd prin compresiunea contrafișelor decît prin încovoierea grinzilor încastrate în zid, pe care se fixează balcoanele. Construcțiile formate din bare articulate între ele, care lucrează numai la întindere și compresiune, se numesc *grinzi cu zăbrele*. Ca urmare a avantajelor pieselor supuse la întindere și compresiune arătate mai înainte, grinzile cu zăbrele sînt cele mai răspîndite elemente de construcție.

Pentru ca barele separate ale grinzii cu zăbrele să lucreze numai la întinderi și compresiune, trebuie să fie satisfăcute următoarele condiții:

1. *Barele trebuie să fie drepte și legate între ele la capetele lor (nodurile grinzii cu zăbrele).*

2. *Legăturile trebuie să fie articulații în care să nu apară frecare.*

3. *Forțele exterioare trebuie să fie aplicate numai în nodurile grinzii.*

În adevăr, să presupunem că în nodurile grinzii cu zăbrele sînt aplicate forțe. Sub acțiunea lor grinda începe să se deformeze; această deformație se va opri cînd forțele elastice de deformare vor crește în așa măsură, încît să echilibreze forțele exterioare. Este evident, că dacă nu există frecare în noduri, atunci în timpul deformării fiecare bară va lua o astfel de poziție, încît rezultantele tuturor forțelor aplicate la extremitățile ei să fie dirijate de-a lungul ei, adică să se se reducă fie numai la forțe de compresiune, fie la forțe de întindere. Vom observa că aceste deformări ale grinzii cu zăbrele sînt în general mici. Practic,

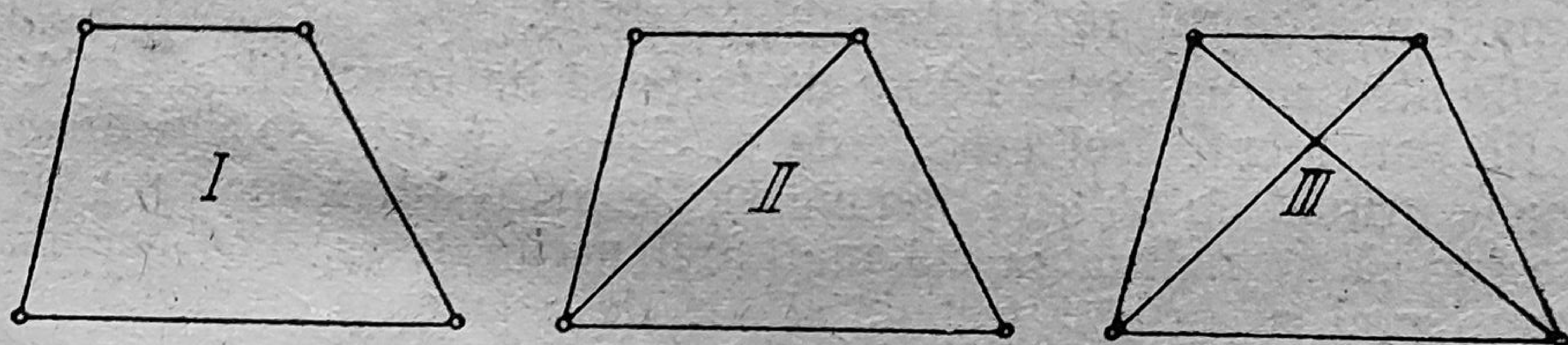


Fig. 130

îmbinarea prin articulații a barelor nu este comodă din punct de vedere constructiv și nu-și atinge scopul, deoarece datorită apariției ruginii, barele încep să se macine în articulații. De aceea, în prezent, barele se îmbină între ele rigid cu ajutorul niturilor. Din această cauză pot apărea în grinzi eforturi dirijate altfel decît de-a lungul barelor. Descompunînd aceste eforturi în două componente, una de-a lungul axei și una perpendiculară pe axa barei, vom constata că componenta perpendiculară pe axa barei, și care tinde să încovoaie bara, va fi în general mică. De aceea se neglijează eforturile de încovoiere și se calculează grinzile ca și cînd barele grinzilor cu zăbrele ar fi îmbinate între ele prin articulații ideale fără frecare.

Grinzile cu zăbrele pot fi plane, și în spațiu. Noi ne vom ocupa aici numai de grinzile cu zăbrele plane, în al căror plan acționează forțele date. Este evident că grinda trebuie să reprezinte un sistem invariabil sau, cum se mai spune, un *sistem rigid.* Să examinăm, de exemplu, grinzile reprezentate în fig. 130. Sistemul *I* nu este rigid. Pentru a-l face rigid este suficient să se unească nodurile opuse printr-o bară în diagonală, cum se arată

în fig. 130 (II). Legarea celorlalte două noduri printr-o a doua bară [(fig. 130 (III)] este de prisos din punctul de vedere al rigidității grinzii. Nu este greu să se stabilească relația dintre numărul barelor N și numărul nodurilor T ale unei grinzi rigide cu zăbrele, fără bare suplimentare. În adevăr, pentru fixarea primelor trei noduri, sînt necesare trei bare, fiecare nod următor din cele $N—3$ noduri va fi fixat prin două bare. Prin urmare,

$$T=3+(N-3)2=2N-3.$$

Dacă $T<2N—3$, atunci grinda cu zăbrele nu va fi rigidă și nu va putea fi utilizată în construcții. Dacă $T>2N—3$, atunci grinda cu zăbrele are bare suplimentare. Astfel de grinzi se folosesc în practică, dar calculul eforturilor în bare la asemenea grinzi duce la o problemă static nedeterminată care poate fi rezolvată numai cu ajutorul rezistenței materialelor.

Pentru ca un sistem plan de forțe să fie în echilibru, trebuie să fie satisfăcute trei ecuații de echilibru (§ 40) de aceea reazemele grinzii cu zăbrele trebuie să fie astfel alese încît reacțiunile lor să se reducă la cel mult trei necunoscute. Mai departe, fiecare nod al grinzii trebuie să fie de asemenea, în echilibru. Deoarece în nod acționează forțe concurente, numărul ecuațiilor de echilibru al nodului va fi egal cu două; prin urmare, pentru toate nodurile, numărul ecuațiilor va fi egal cu $2N$. Din combinarea acestor ecuații vor rezulta trei ecuații de echilibru a întregii grinzi cu zăbrele, pe care noi le folosim pentru determinarea reacțiunilor din reazime. Celelalte $2N—3$ ecuații independente, servesc la determinarea forțelor interioare a eforturilor în bare. Astfel, pentru ca grinda să fie static determinată, numărul barelor T trebuie să fie egal cu $2N—3$;

$$T=2N-3,$$

adică grinda rigidă fără bare suplimentare este în același timp static determinată.

Totalitatea barelor care limitează grinda în sus, formează *talpa superioară*, iar cele care o limitează în jos, formează *talpa inferioară*; partea tălpii dintre două noduri vecine se numește *panou*; barele dintre tălpile grinzii se numesc bare intermediare, montanți, contrafișe, diagonale etc.

A efectua calculul grinzii înseamnă a determina atît reacțiunile reazemelor, cît și eforturile în toate barele grinzii cu zăbrele,

sub acțiunea forțelor date. Din toate metodele existente, ne vom opri numai la următoarele trei.

§ 60. Metoda lui Ritter. Metoda lui Ritter se aplică grinzilor cu zăbrele la care o secțiune transversală ce separă grinda în două părți, intersectează cel mult trei bare ale căror eforturi nu sînt cunoscute. Să examinăm, de exemplu, grinda reprezentată în fig. 131, în ale cărei noduri sînt aplicate forțele *1* și *2*. Construind poligonul forțelor, cu distanța polară h și poligonul funicular, determinăm mai întîi așa cum s-a arătat mai înainte (§ 58) reacțiunile *3* și *4*. Ducem o secțiune transversală care intersectează barele a, b, și c. Eforturile în aceste bare le vom nota cu aceleași litere $\overline{a}$, $\overline{b}$ și $\overline{c}$. Forțele $\overline{a}$, $\overline{b}$ și $\overline{c}$ sînt acele forțe cu care partea dreaptă a grinzii acționează asupra părții din stînga. Este evident că partea din stînga a grinzii cu zăbrele trebuie să se găsească în echilibru, sub acțiunea a cinci forțe: *4*, *1*, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Deoarece direcțiile forțelor $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sînt cunoscute — ele coincid cu direcțiile barelor respective — atunci din cele trei ecuații de echilibru ale sistemului plan de cinci forțe (*4*, *1*, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$), vom putea determina cele trei forțe necunoscute $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ prin una din metodele arătate în § 40. Desigur că este preferabil să formăm ecuațiile astfel încît în fiecare dintre ele să intre numai cîte una din forțele necunoscute $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$; aceasta se poate realiza folosindu-ne de indicațiile date în observația din § 40. Presupunem, de exemplu, că vrem să determinăm forța $\overline{c}$. Pentru aceasta egalăm cu zero momentul rezultant al celor cinci forțe (*4*, *1*, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$) în raport cu punctul de intersecție *I* al barelor a și b. Este evident că momentele forțelor $\overline{a}$ și $\overline{b}$ vor fi în acest caz identic egale cu zero și vom obține o ecuație cu o singură forță necunoscută, forța $\overline{c}$. Dacă am vrea să găsim forța $\overline{a}$, ar trebui să egalăm cu zero momentul rezultant al forțelor *4*, *1*, a, $\overline{b}$, c în raport cu punctul *II* de intersecție al barelor b și c; de aici vom obține o ecuație pentru determinarea forței necunoscute $\overline{a}$. Dacă barele a și c nu ar fi paralele, atunci, egalînd cu zero momentul forțelor în raport cu punctul de intersecție al barelor a și c, am fi obținut o ecuație pentru determinarea forței necunoscute $\overline{b}$. În cazul cînd barele a și c sînt paralele așa cum este cazul din fig. 131, acest procedeu de determinare a forței $\overline{b}$ nu este aplicabil, deoarece punctul de intersecție al barelor a și c este situat la infinit. Totuși, determinarea forței b nu întîmpină nici un fel de dificultate; o vom

obține, de exemplu, egalînd cu zero suma proiecțiilor forțelor 4, 1, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, pe direcția perpendiculară pe barele a și c. Aplicarea rezultatelor care ne sînt cunoscute din statica grafică, ne permite să simplificăm și mai mult problema. Momentul forțelor 4 și 1 în raport cu punctul I este un moment încovoietor; știm că el este egal cu produsul segmentului mn, situat în interiorul poligonului funicular, cu distanța polară h și este în cazul considerat negativ (§ 58). Dacă vom nota înălțimea grinzii prin H, atunci momentul forței $\overline{c}$ trebuie să fie pozitiv și va fi egal cu $+Hc$. De aceea ecuația de echilibru căutată va căpăta forma:

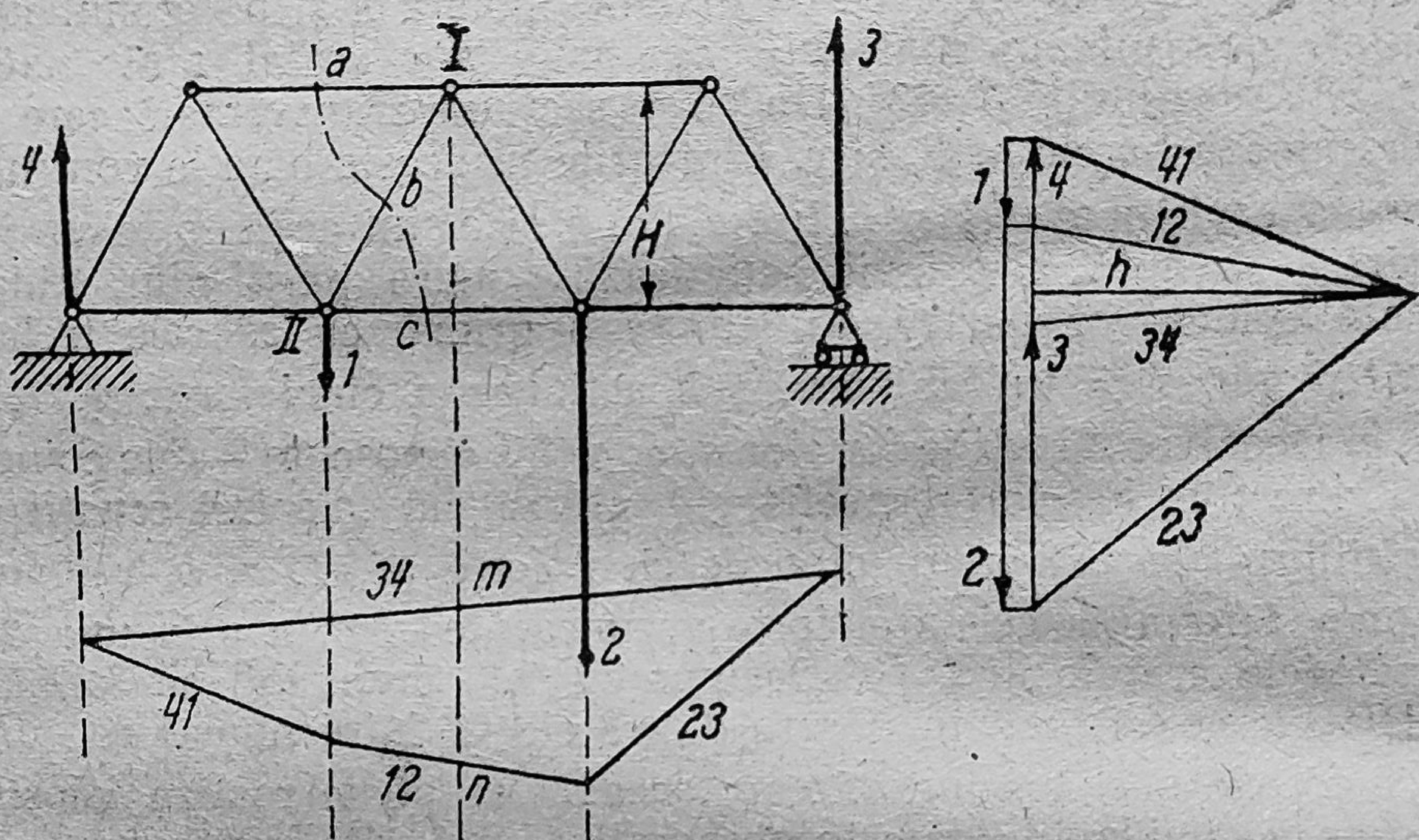


Fig. 131

$$+Hc - mn \cdot h = 0, \quad \text{sau} \quad c = mn\,\frac{h}{H};$$

forța $\overline{c}$ trebuie să fie dirijată de la secțiunea c către forța 2, adică efortul c este de întindere. Prin acest procedeu vom putea determina efortul în toate barele grinzii cu zăbrele.

§ 61. Metoda lui Culman. Această metodă este aplicabilă, ca și cea precedentă, la grinzile în care secțiunea a taie numai trei bare cu eforturi necunoscute. Fie dată grinda din fig. 132; în nodurile ei sînt aplicate forțele 1 și 2. Construind poligonul forțelor și poligonul funicular, vom determina pe cale obișnuită

reacțiunile 3 și 4 ale reazemelor. Ducem secțiunea care va întretăia barele a, b, și c. Să găsim rezultanta $\overline{R}$ a forțelor 4 și 1. Vom determina mărimea ei din poligonul forțelor și vom obține punctul prin care trece, prelungind laturile 34 și 12 ale poligonului funicular, pînă la întretăierea lor (pentru a nu complica desenul, aceste construcții nu sînt reprezentate în fig. 132).

Deplasăm originea forței $\overline{R}$ în punctul K de întretăiere a suportului ei cu prelungirea barei c și unim punctul K cu punctul de intersecție al barelor a și b. Cele patru forțe $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{R}$, trebuie

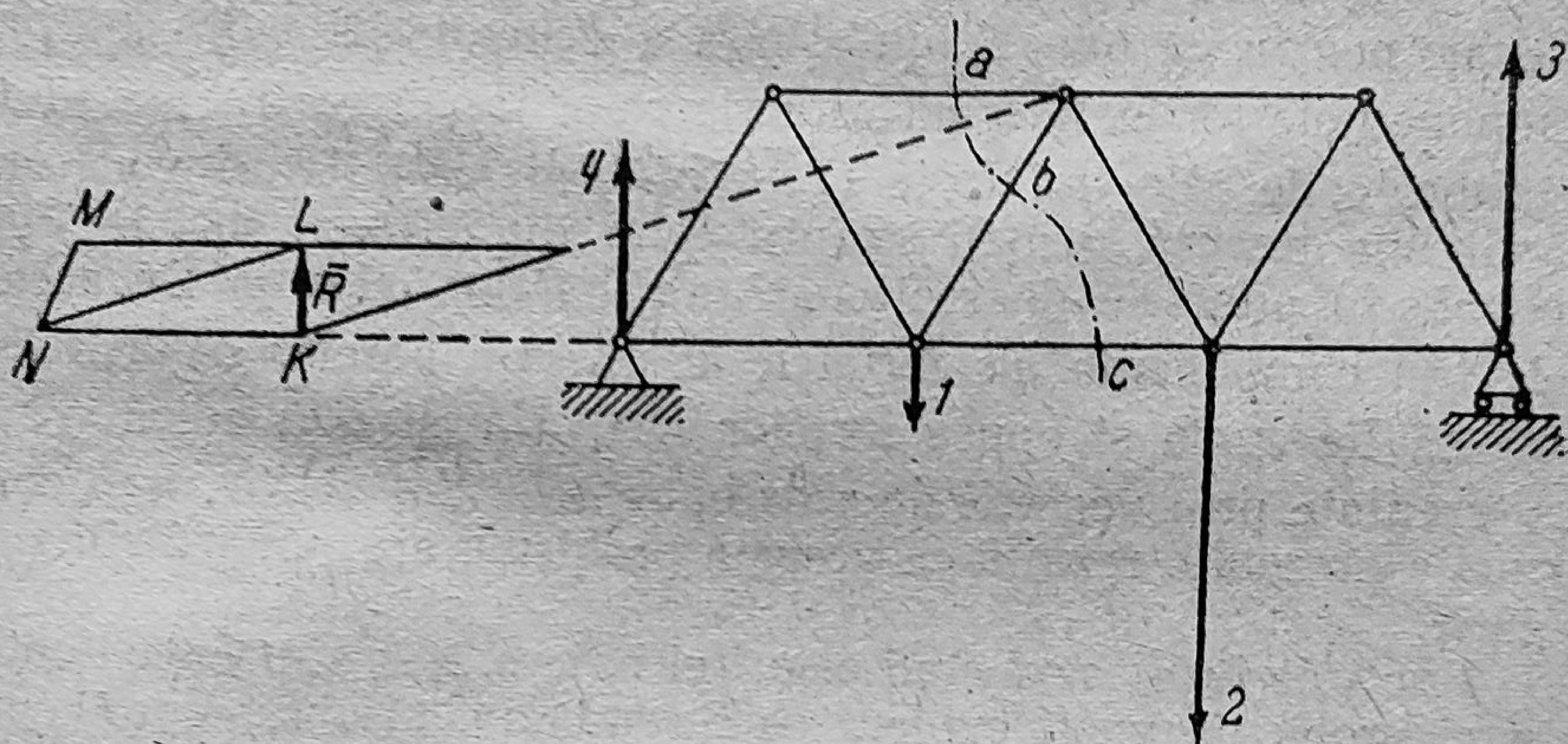


Fig. 132

să fie în echilibru; dar forțele $\overline{a}$ și $\overline{b}$ au o rezultantă care trece prin punctul de intersecție al barelor a și b. De aceea, forța $\overline{R}$ trebuie să se echilibreze cu această rezultantă și cu forța $\overline{c}$, adică aceste trei forțe trebuie să fie concurente și rezultanta forțelor $\overline{a}$ și $\overline{b}$ trebuie de asemenea să treacă și prin punctul K. Astfel am găsit direcția rezultantei forțelor $\overline{a}$ și $\overline{b}$. Acum nu este greu de găsit această rezultantă și forța $\overline{c}$ punînd condiția ca aceste două forțe să se echilibreze cu forța R; construim un triunghi LNK avînd una din laturi egală cu $\overline{R}$, iar celelalte laturi paralele cu direcțiile date ale forțelor căutate. Deoarece LN este rezultanta forțelor $\overline{a}$ și $\overline{b}$ vom determina aceste forțe descompunînd pe LN după două direcții paralele cu a și b. Pentru aceasta construim triunghiul LMN cu latura LN cunoscută, laturile LM

și MN fiind respectiv paralele cu barele a și b. Astfel, obținem toate cele trei forțe căutate:

$$\bar{a}=\overline{LM};\quad \bar{b}=\overline{MN};\quad \bar{c}=\overline{NK}.$$

Sensul forțelor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ se stabilește prin parcurgerea patrulaterului $KLMNK$ în sensul indicat de forța R. Vedem că barele a și b sînt comprimate, iar bara c este întinsă.

Nu este greu de observat că această metodă este de fapt echivalentă cu rezolvarea următoarei probleme: *descompunerea forței date $\bar{R}$ în trei forțe, care au suporturile date a, b, c.* În adevăr, pentru ca partea din stînga a grinzii să fie în echilibru, componentele forței $\bar{R}$ după direcția celor trei bare trebuie să fie echilibrate de cele trei forțe ($\overline{LM}$, $\overline{MN}$, și $\overline{NK}$) datorite acțiunii părții din dreapta grinzii asupra celui din stînga, forțele fiind aplicate în punctele de secționare ale barelor a, b, c. De aceea, cele trei componente ale forței R în direcția barelor a, b, c trebuie să fie egale și opuse forțelor $\overline{LM}$, $\overline{MN}$ și $\overline{NK}$, adică vor fi reprezentate prin vectorii de sens opus $\overline{ML}$, $\overline{NM}$ și $\overline{KN}$. Din construcția prezentă, rezultă că această problemă are numai o singură soluție.

Excepție face cazul cînd cele trei bare a, b, c sînt concurente; atunci problema va fi evident nedeterminată. Deoarece problema descompunerii unei forțe în patru sau mai multe forțe cu suporturi date, este o problemă nedeterminată, metoda lui Culman nu este aplicabilă la grinzi în care secțiunea transversală întîlnește mai mult decît trei bare cu eforturi necunoscute.

Vedem că ambele metode nu permit să se afle în același timp, eforturile în toate barele; determinarea acestor eforturi trebuie să se facă succesiv, prin construcții și calcule separate.

O b s e r v a ț i e. S-ar părea că metoda lui Culman nu este aplicabilă în cazul cînd forța *4* este egală cu forța *1*, deoarece în acest caz $R=0$. Dar atunci forțele *4* și *1* formează un cuplu; de aceea forța $\bar{c}$ și rezultanta forțelor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ trebuie de asemenea să formeze un cuplu cu momentul egal și opus. Dacă distanța de la nodul în care se intersectează barele a și b la c este egală cu H, trebuie să avem:

$$c \cdot H = \text{mom. cuplului } (4,1);$$

de aici vom găsi forța $\bar{c}$ și apoi forțele $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Dacă pe lîngă aceasta barele a și c sînt și paralele, este evident că $b=0$ și $a=c$.

§ 62. **Metoda Cremona-Maxwell.** Spre deosebire de cele două metode precedente, această metodă ne permite să reprezentăm într-un tablou, eforturile din toate barele grinzii. Teoria ei bazată pe studiul figurilor reciproce, a fost elaborată de către fizicianul Maxwell (1831—1879) și independent de el, pe altă cale, de către matematicianul italian Cremona.

Vom numi ca și pînă acum toate dreptele figurii plane — laturile sale. Vom da definiția figurilor reciproce:

Două figuri se numesc reciproce, dacă: 1) au același număr de laturi; 2) laturile ambelor figuri sînt respectiv paralele (sau perpendiculare, ceea ce este același lucru); 3) la laturile concurente în același punct pe o figură, le corespund pe cealaltă figură laturi paralele, care formează un poligon închis, și invers.

Am văzut exemplul unei astfel de figuri la poligonul forțelor și poligonul funicular, construite pentru doi poli diferiți (fig. 114). Vom da încă un exemplu. Să examinăm exagonul format din laturile *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* (fig. 133). Vom determina centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor (*1*, *2*, *3*), (*1*, *5*, *4*), (*5*, *2*, *6*), (*6*, *3*, *4*). Unind aceste patru centre prin drepte, vom obține un nou exagon cu laturile *1'*, *2'*, *3'*, *4'*, *5'*, *6'*. Vom demonstra că exagonul obținut va fi reciproc celuilalt exagon. Prima condiție, evident, este satisfăcută. Vom arăta acum că laturile *1* și *1'*, *2* și *2'*, *3* și *3'* etc. sînt perpendiculare între ele. Dreapta *1'* unește centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor (*1*, *2*, *3*) și (*1*, *5*, *4*), la care latura *1* este latură comună și totodată coarda comună a celor două cercuri. Se știe că dreapta care unește centrele a două cercuri secante este perpendiculară pe coarda comună

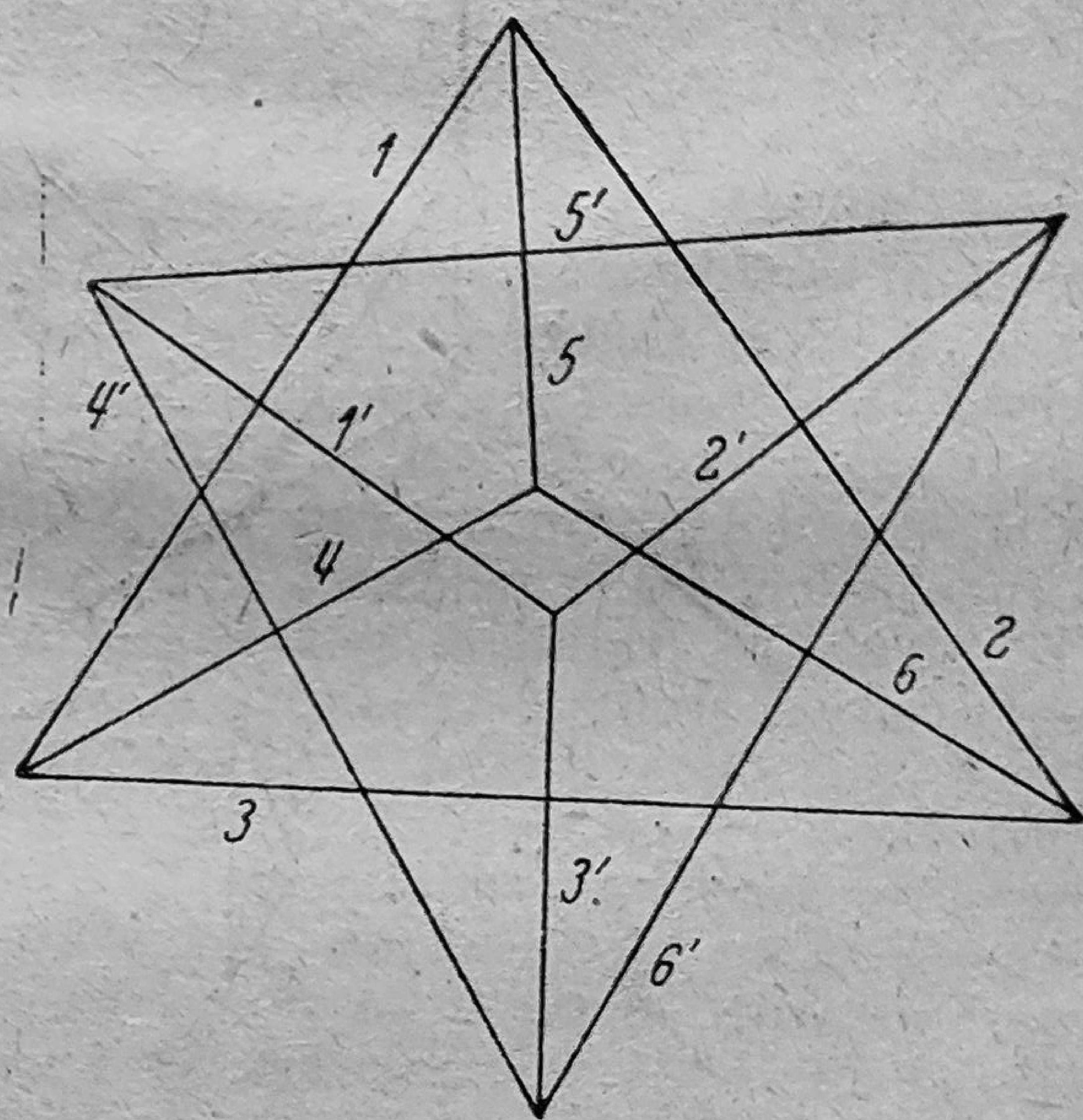


Fig. 133

pe care o împarte în două părți egale, deci laturile *1* și *1'* sînt perpendiculare. Aceeași demonstrație este valabilă pentru celelalte perechi de laturi. Astfel, a doua condiție este de asemenea satisfăcută. Să trecem în sfîrșit la cea de-a treia condiție. Laturile *1, 2, 3* formează un triunghi; laturile *1', 2', 3'* sînt concurente într-un punct. Laturile *1, 5, 2* sînt concurente într-un punct; laturile *1', 5', 2'* formează un triunghi etc. Prin urmare, a treia condiție este și ea satisfăcută și figurile sînt reciproce. Observăm

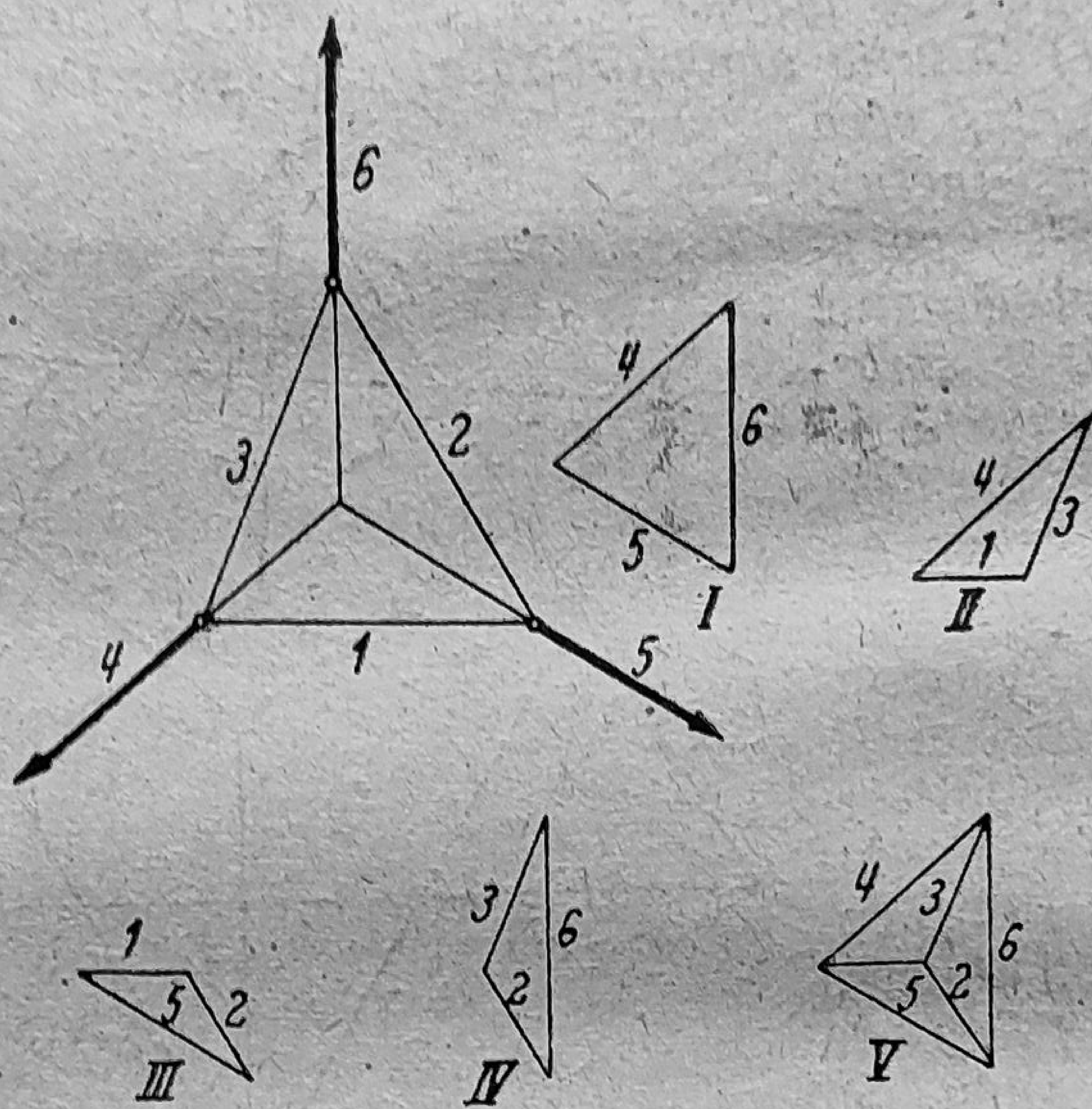


Fig. 134

că ambele exagoane pot fi considerate ca proiecții pe planul desenului a două tetraedre, iar muchiilor unui tetraedru îi corespund vîrfurile celuilalt, și invers, dacă prin muchii corespondente vom considera acelea care sînt perpendiculare una pe alta.

În construcțiile ce urmează vom numi laturi ale figurilor dreptele care reprezintă barele grinzii cu zăbrele, suporturile forțelor date, cum și reacțiunile din reazeme. Vom nota aceste laturi prin cifre; aceleași cifre vor servi și pentru reprezentarea forțelor care acționează de-a lungul acestor laturi.

Să examinăm cazul unei grinzi triunghiulare în ale cărei vîrfuri sînt aplicate forțele *4, 5, 6* (fig. 134). Barele grinzii le vom nota prin cifrele *1, 2, 3*. În primul rînd forțele date *4, 5, 6* trebuie să fie în echilibru; pentru aceasta ele trebuie să fie con-

curente şi poligonul forţelor *4*, *5*, *6* trebuie să fie închis, adică să fie un triunghi. Acest triunghi este construit în fig. 134 (*I*). Prelungind suporturile forţelor *4*, *5*, *6* pînă la punctul lor de concurenţă, putem considera figura obţinută ca proiecţia pe planul desenului a unui tetraedru, avînd muchiile laterale *4*, *5*, *6* şi baza formată de laturile *1*, *2*, *3*. Dacă toată grinda se găseşte în echilibru, atunci fiecare nod al ei trebuie să fie în echilibru. Să examinăm, de exemplu, nodul în care se întîlnesc laturile *4*, *1*, *3*. El trebuie să fie în echilibru sub acţiunea forţei date *4* şi eforturilor din barele *1* şi *3*. Aceste trei forţe trebuie să formeze un triunghi reprezentat în fig 134 (*II*), iar construirea acestui triunghi este elementară, deoarece ni se dă o latură *4* şi direcţiile celorlalte două laturi *3* şi *1*; de aici determinăm mărimea forţelor *1* şi *3*, iar sensul lor se stabileşte prin sensul dat al forţei *4* în acest triunghi. Mutînd forţele *1* şi *3* în nod, tragem concluzia că barele *1* şi *3* trebuie să fie întinse. Nodul în care se întîlnesc laturile *1*, *5*, *2* trebuie să fie de asemenea în echilibru; prin urmare, forţele *1*, *5*, *2* trebuie să formeze triunghiul reprezentat în fig. 134 (*III*). Sensul forţelor *1* şi *2* se determină prin sensul dat al forţei *5*. Mutînd forţele *1* şi *2* în nod, concludem că barele *1* şi *2* trebuie să fie ambele întinse. Observăm că forţa *1* am întîlnit-o de două ori; în triunghiul *II* şi în triunghiul *III*; ea are în aceste triunghiuri, sensuri opuse. Aceasta este evident, deoarece bara întinsă acţionează asupra celor două noduri pe care le uneşte cu forţe egale ca mărime şi direcţie, dar opuse ca sens. Trecînd la nodul format de laturile *6*, *3*, *2*, vom construi triunghiul *IV*, din care vom putea determina forţele *2* şi *3*. Această construcţie este de prisos, deoarece forţele *2* şi *3* au fost deduse deja din triunghiurile *III* şi *II*. Desigur, forţele *2* şi *3* în triunghiul *IV* vor fi de sens contrar cu forţele *2* şi 3 din triunghiurile *II* şi *III*. Vom observa că în construcţia triunghiurilor *II*, *III* şi *IV*, forţele date, *4*, *5*, *6* s-au întîlnit cîte o singură dată, iar eforturile în barele *1*, *2*, *3* de cîte două ori. Acest procedeu se poate extinde şi asupra grinzilor mai complicate; la început căutăm echilibrul forţelor date şi al reacţiunilor din reazeme, construind pentru ele poligonul forţelor, apoi, trecem la echilibrul nodurilor separate ale grinzii. Totuşi, dacă grinda este complicată, numărul acestor construcţii separate va fi foarte mare, şi vom fi nevoiţi să le trasăm de cîte două ori laturile care reprezintă eforturile în bare. Nu este greu de observat că această construcţie poate fi simplificată. Este evident că triunghiurile *II*, *III* şi *IV* se pot aşeza în triunghiul *I*, aşa cum se arată în fig. 134 (*V*). Figura *V* ne dă tabloul tuturor eforturilor

și înlocuiește figurile *I*, *II*, *III* și *IV*. Figura *V* și figura care reprezintă grinda cu forțele care-i sînt aplicate sînt reciproce. În adevăr, numărul laturilor ambelor figuri este același; laturile sînt paralele două cîte două; în sfîrșit, laturile concurente dintr-una din figuri sînt paralele cu laturile ce formează un triunghi în cealaltă figură și invers, așa cum este cazul laturilor *1*, *2*, *3*. Astfel metoda Cremona-Maxwell se reduce la construirea figurii reciproce a figurii formată de grinda cu zăbrele dată (cu forțele exterioare aplicate în nodurile ei). Ambele figuri reciproce se numesc *diagrame reciproce;* din această cauză metoda se mai numește și *metoda diagramelor reciproce*. Construirea diagramelor reciproce impune respectarea unor reguli fără de care construcția se poate greși ușor. Vom lămuri aceste reguli numai pentru cazurile cele mai simple, cînd forțele aplicate și reacțiunile reazemelor sînt concurente sau paralele.

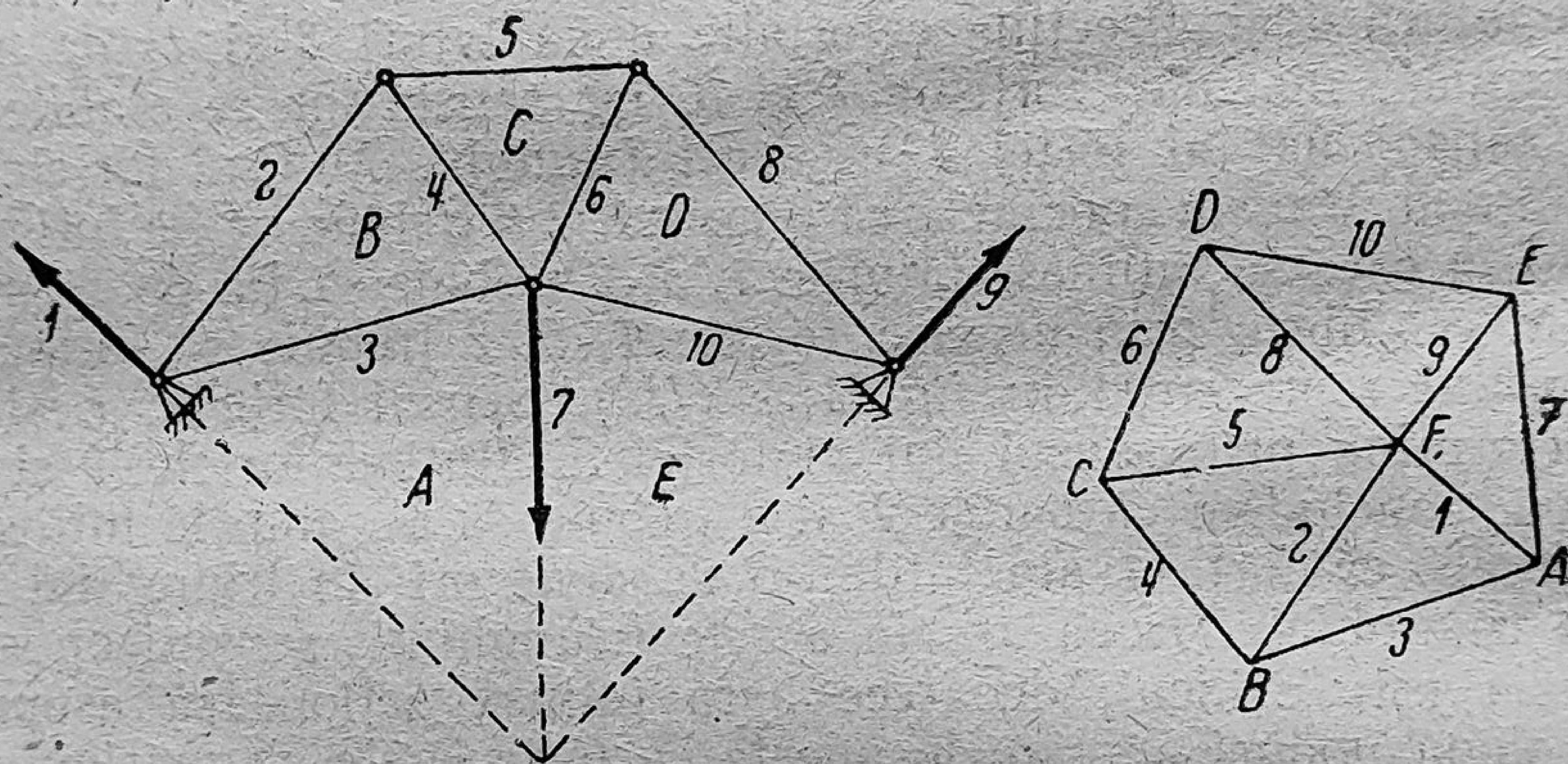


Fig. 135

Să cercetăm grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 135. Asupra ei acționează forța γ, iar în reazeme se dezvoltă reacțiunile *1* și *9*. Aceste trei forțe *1*, γ, *9* trebuie să fie concurente deoarece se găsesc în echilibru. Să le prelungim pînă la punctul lor de concurență și să numerotăm toate laturile figurii care se obține. Putem considera această figură ca proiecția pe planul desenului a unei piramide a cărei bază este un pentagon determinat de laturile *1*, *2*, *5*, *8*, *9* iar muchiile laterale *3*, *4*, *6*, *10*, *7*. Notăm baza acestei piramide prin *F* iar forțele laterale prin *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Problema constă în construirea unei figuri reciproce cu cea dată. Această figură reciprocă poate fi considerată și ca proiecția pe

planul desenului a unui poliedru ale cărui vîrfuri vor corespunde cu fețele celui dat, și invers. Cu alte cuvinte, de exemplu, fața A este formată de laturile 1, 3, 7; pe figura reciprocă în vîrful A trebuie să se întîlnească laturile paralele cu ele 1, 3, 7. Fața F este formată de laturile 1, 2, 5, 8, 9; în figura reciprocă, laturile paralele lor 1, 2, 5, 8, 9, trebuie să se întîlnească în vîrful F. *Astfel, pentru construirea diagramei, în primul rînd trebuie să ne imaginăm care este poliedrul a cărui proiecție este figura dată și să-i notăm fețele prin litere. Prin aceleași litere trebuie să se noteze vîrfurile figurii reciproce în care se unesc laturile cu aceleași cifre.*

Mai departe, *trebuie construit poligonul forțelor date și al reacțiunilor și să notăm vîrfurile lui cu litere, așa cum s-a arătat mai sus, parcurgînd figura într-un anumit sens*, de exemplu, în sensul acelor unui ceasornic. Dacă vom parcurge figura reprezentată pe desenul din stînga al fig. 135, în sensul acelor unui ceasornic, atunci după reacțiunea 1 vom întîlni reacțiunea 9, și apoi forța 7. Vom construi din aceste forțe un triunghi. Pentru a nota cu litere vîrfurile lui, vom observa că laturile 7 și 9 mărginesc fața E; de aceea, în figura reciprocă punctul de intersecție al laturilor 7 și 9 trebuie să fie notat prin E. În figura dată, laturile 1 și 7 mărginesc fața A; de aceea, în figura reciprocă, punctul de intersecție al laturilor 1 și 7 trebuie să fie notat prin A. În sfîrșit, 9 și 1 mărginesc fața F; de aceea în figura reciprocă, ultimul vîrf al triunghiului se va nota cu F.

Trecem apoi la acel nod al grinzii, unde se întîlnesc cel mult două bare cu eforturi necunoscute. Vom lua, de exemplu, nodul format de laturile 1, 2, 3. În figura reciprocă, aceste trei laturi trebuie să formeze un triunghi. O latură a acestui triunghi și anume latura 1 este cunoscută; ne sînt cunoscute și direcțiile celorlalte două laturi; deci construirea triunghiului este posibilă. Pentru a ști care latură va trece prin punctul A, și care prin F, vom observa că latura 3 mărginește fața A și latura 2 concomitent fețele F și B. Prin urmare, prin punctul A va trece latura 3 și prin F va trece latura 2. Celălalt capăt al laturii 2 trebuie să fie notat prin litera B. În adevăr, fața B este mărginită de laturile 2 și 3; prin urmare, în figura reciprocă, punctul de intersecție al laturilor 2 și 3 trebuie să fie notat prin B. Astfel, s-a construit triunghiul AFB în figura reciprocă și s-a obținut un nou vîrf B. Vom porni de la el. Fața B este mărginită de laturile 2, 3, și 4; prin urmare, în figura reciprocă, prin punctul B trebuie să treacă și latura 4. De aceea vom duce prin B o dreaptă paralelă cu bara

4 a grinzii. Dar latura 4 mărgineşte pe lîngă faţa B şi faţa C; de aceea pe figura reciprocă, latura 4 trebuie să treacă de asemenea şi prin vîrful C; adică al doilea capăt al laturii 4 trebuie să fie notat cu litera C. Pentru determinarea acestui punct C vom observa că faţa C este mărginită şi de latura 5 care este totodată şi o latură a poligonului F. În figura reciprocă, latura 5 trebuie să treacă prin F şi C. Punctul F îl avem; prin urmare, ducînd în diagrama reciprocă prin punctul F o dreaptă paralelă cu bara 5 a grinzii, la intersecţia cu latura 4, vom găsi punctul C. Mai departe, exact prin acelaşi procedeu, vom determina pe latura 6

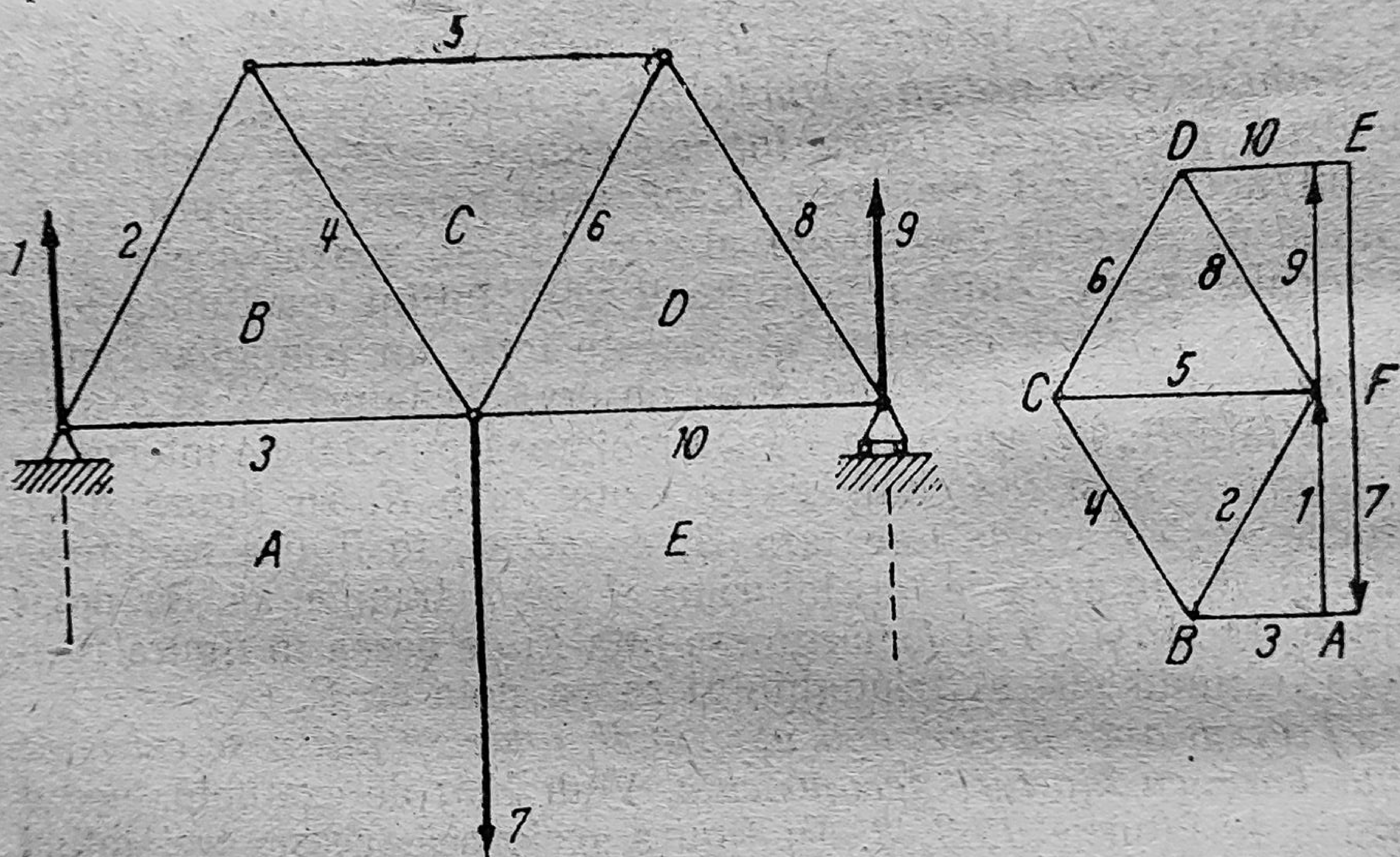


Fig. 136

un nou punct D, şi apoi vom ajunge la punctul E. Precum se vede, construcţia se execută într-o anumită ordine circulară. Astfel, *pornind de la primul vîrf luat în poligonul forţelor* (în exemplul dat de la vîrful A), *am construit celelalte poligoane ale forţelor, parcurgînd grinda într-un anumit sens.*

Diagrama reciprocă obţinută, reprezintă astfel, proiecţia unei piramide pe planul desenului, cu vîrful F şi cu baza $ABCDE$.

Mărimile eforturilor în toate barele grinzii ne sînt date prin lungimile laturilor acestei diagrame, măsurate la aceeaşi scară cu scara aleasă pentru reprezentarea forţei date 7. Rămîne să se stabilească sensul eforturilor. Pentru aceasta, începem de la un nod al grinzii, la care este aplicată o forţă cunoscută, de

exemplu forța *1*. Din triunghiul *AFB* deducem că forța *2* are sensul de la *F* spre *B* iar forța *3* de la *B* spre *A*, adică bara *2* împinge nodul și este deci comprimată, iar bara *3* trage de nod fiind deci întinsă. Pentru determinarea sensului forțelor *4* și *5*, vom apela la nodul unde se întîlnesc barele *2*, *4*, *5*. Deoarece bara *2* apasă asupra nodului considerat cu o forță egală și opusă presiunii ei pe primul nod, rezultă că modificînd în triunghiul *BCF* sensul forței *2*, adică de la *B* spre *F*, vom determina sensul forței *5* de la *F* spre *C*, și a forței *4* de la *C* spre *B*. Prin urmare, bara *5* va fi comprimată, iar bara *4* întinsă. Schimbînd sensul forței *5* în triunghiul *CFD*, adică în sensul de la *C* spre *F*, vom obține sensul forței *8* de la *F* spre *D* și a forței *6* de la *D* spre *C*, adică bara *8* va fi comprimată iar bara *6* întinsă. În sfîrșit, schimbînd sensul forței *8* în triunghiul *DEF*, adică în sensul de la *D* spre *F*, vom obține sensul forței *9* de la *F* spre *E* și al forței *10* de la *E* spre *D*. Prin urmare, bara *10* va fi întinsă, iar în ce privește sensul forței *9*, acesta ne este cunoscut, iar rezultatul obținut poate servi ca verificare a raționamentului făcut. Vedem că sensul obținut pentru forța *9* de la *F* spre *E* nu contrazice pe cel stabilit anterior.

În cazul cînd forțele date și reacțiunile sînt paralele între ele, metoda nu diferă principial față de cazul precedent. Trebuie numai să ne imaginăm că punctul de concurență al forțelor s-a îndepărtat la infinit. Este evident că unele fețe se vor transforma în acest caz în benzi infinite. Pentru a ne imagina aceasta, deformăm grinda precedentă pînă ce obținem grinda reprezentată în fig. 136. Fețele *A* și *E* vor deveni atunci benzi infinite; de asemenea și baza *F* va deveni o fîșie infinită mărginită de dreptele paralele *1*, *9* și de segmentele *2*, *5*, *8*. Construcția se face la fel ca și mai înainte, numai că triunghiul forțelor va deveni un segment rectiliniu *AE*, iar punctul *F* se va găsi pe acest segment între punctele *A* și *E*. Figura reciprocă obținută, poate fi considerată tot ca proiecția, pe planul desenului, a unei piramide pentagonale, al cărei vîrf se găsește în *F*, avînd de bază pentagonul *ABCDEA*, iar fața laterală reprezentată prin triunghiul *FAE* este perpendiculară pe planul desenului, așa că ea se proiectează pe acest plan, de-a lungul bazei *AE* al acestui triunghi *FAE*.

O b s e r v a ț i e. La aceste construcții ne-am servit de proprietatea semnalată de noi că figurile reciproce pot fi reprezentate

ca proiecții pe planul desenului a două poliedre care se găsesc într-un asemenea raport unul față de altul, încît fețele unuia corespund cu vîrfurile celuilalt și invers; laturile proiecțiilor sînt în acest caz paralele două cîte două. După cum a dovedit Maxwell, această proprietate este generală și poate fi demonstrată riguros. Pentru amănunte, cititorii vor consulta lucrarea citată a prof. V. L. Kirpicev „Bazele staticii grafice". Vom limita expunerea metodei diagramelor reciproce numai la raționamentele precedente. Utilizarea ei la cazurile cînd forțele nu vor fi concurente sau paralele și orice alte amănunte se pot găsi în cursurile speciale de statică grafică și de statica construcțiilor.

CINEMATICA

CAPITOLUL XVI

VITEZA UNUI PUNCT

§ 63. Sisteme de referință. Cuvîntul *cinematica*, provine din grecescul „kinema“ care înseamnă mişcare. Orice mişcare pe care o studiem este relativă, noi urmărim variaţia poziţiei corpului considerat în raport cu un solid oarecare, care în acest caz constituie sistemul de referință. Mişcarea în cinematică se studiază fără a ține seama de forțe și mase, iar ca sistem de referință se poate lua oricare solid, în raport cu care vrem să studiem mişcarea. Prin urmare, doi observatori care se servesc de două sisteme de referință diferite, vor descrie mişcarea oarecare a aceluiași obiect material, în general, în mod diferit, și din punct de vedere al cinematicii, ambii observatori vor avea deopotrivă dreptate. În acest fel, rămînînd numai în domeniul cinematicii, nu se poate stabili un singur sistem de referință absolut. Totuși căutarea unui sistem de referință absolut, a fost obiectul unor cercetări științifice susținute care ies însă din domeniul cinematicii.

În mecanica clasică se consideră imobil, sistemul inerțial de axe de coordonate ales în mod convențional printre alte sisteme inerțiale; deplasarea în raport cu acest sistem de axe coordonate, se numește *mişcare absolută*, iar deplasarea în raport cu orice alt sistem de axe de coordonate care nu sînt solidar legate de sistemul inerțial dat, se numește *mişcare relativă*. În acest curs de mecanică teoretică ne vom ocupa mai ales de mişcarea absolută. După cum vom vedea, pentru aplicațiile practice de pe pămînt putem alege în majoritatea cazurilor drept sistem imobil de axe de coordonate un sistem de axe de coordonate legate invariabil de suprafața pămîntului fără ca erorile să fie importante; numai în cazuri excepționale sîntem nevoiți să ținem cont de rotația pămîntului în jurul axei sale, iar mişcarea pămîntului în jurul soarelui nu influențează practic aplicațiile tehnice ale mecanicii teoretice.

În studiul mişcării punctului se poate cerceta atît mişcarea unui punct material, cit şi mişcarea unui punct geometric luat într-un solid oarecare. Deoarece descrierea elementelor mişcării ambelor puncte vor fi în multe cazuri asemănătoare, în expunerea cinematicii vom întrebuinţa în general cuvîntul „punct" fără adăugarea cuvintelor „material" sau „geometric", afară de cazurile cînd noţiunea de „punct" va impune precizări.

§ 64. Ecuaţiile mişcării şi traiectoria unui punct. Vom considera un punct oarecare fix din spaţiu O şi vom lua sistemul fix de axe coordonate $Oxyz$, cu originea în acest punct. Fie A un punct mobil care descrie în mişcarea sa o curbă oarecare (C); această curbă (C) se numeşte *traiectoria punctului*. În funcţie de forma curbei (C), mişcarea punctului va putea fi: *rectilinie* sau *curbilinie*. Unim punctul fix O cu punctul mobil A prin *vectorul de poziţie* $\bar{r}=\overline{OA}$; este evident că prin mişcarea punctului A, vectorul de poziţie $\bar{r}$ îşi va schimba în fiecare moment, în general, atît modulul său cît şi direcţia sa. Variaţia direcţiei vectorului de poziţie $\bar{r}=\overline{OA}$ va fi cunoscută dacă vom cunoaşte modul cum variază unghiurile formate de vectorul de poziţie $\bar{r}$ cu axele $Oxyz$. Prin urmare, vectorul de poziţie $\bar{r}$ este funcţie de timpul t, adică:

$$\bar{r}=\bar{f}(t). \tag{16.1}$$

Egalitatea (16.1) se numeşte *ecuaţia vectorială a mişcării punctului*. Introducem vectorii unitarii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$; atunci

$$\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z$$

$$\bar{f}(t)=\bar{i}f_1(t)+\bar{j}f_2(t)+\bar{k}f_3(t).$$

Introducînd aceste expresii ale lui $\bar{r}$ şi $\bar{f}(t)$ în ecuaţia (16.1) vom obţine:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t)\\ y&=f_2(t)\\ z&=f_3(t)\end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

Dacă punctul A prin mişcarea sa rămîne tot timpul în acelaşi plan, atunci luînd acest plan drept plan Oxy, vom avea în locul ecuaţiilor (16.2),

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t). \tag{16.3}$$

Ecuațiile (16.2) și (16.3) se numesc *ecuații scalare ale mișcării punctului;* dînd timpului t diferite valori, vom obține valorile corespunzătoare ale coordonatelor punctului mobil și astfel vom putea cunoaște în orice moment poziția punctului mobil și cu aceste puncte să construim traiectoria lui (C). De aici se vede că ecuațiile (16.2) și (16.3) se pot considera ca ecuații parametrice ale traiectoriei (C) a punctului A, iar parametrul este reprezentat prin timpul t.

Pentru a obține ecuațiile traiectoriei în forma analitică obișnuită, este suficient să eliminăm timpul t din ecuațiile (16.2), sau din ecuațiile (16.3).

Observăm, că traiectoria punctului și curba pe care se mișcă punctul, pot să difere între ele. Astfel, dacă punctul descrie o singură dată un cerc sau o porțiune de cerc, în acest caz traiectoria punctului și curba de mișcare a punctului, coincid între ele. În caz că punctul descrie același cerc de mai multe ori, cercul este curba de mișcare a punctului, iar traiectoria punctului va fi același cerc, însă repetat de mai multe ori.

Să examinăm cîteva exemple. Fie mișcarea unui punct de-a lungul unei drepte pe care o vom lua drept axă absciselor Ox, dată prin ecuația:

$$x = a \sin (kt + \varepsilon), \tag{16.4}$$

în care a, k și ε sînt constante. Mișcarea determinată prin ecuația (16.4) se numește *mișcare oscilatorie armonică*. Deoarece sinusul variază de la -1 pînă la $+1$, abscisa x a punctului variază în limitele $-a \leqslant x \leqslant +a$, adică punctul în mișcarea sa descrie tot timpul un segment de dreaptă de lungime $2a$ al cărui mijloc se găsește în O. Constanta a se numește *amplitudinea mișcării*. Din (16.4) rezultă că pentru $t=0$, abscisa punctului mobil va fi egală cu $a \sin \varepsilon$; astfel, ε determină poziția punctului în momentul $t=0$. Această constantă ε se numește *faza inițială*. Fie T un interval de timp constant. Să considerăm momentele t și $t+T$; momentului t, după formula (16.4) îi vor corespunde abscisa punctului egală cu $a \sin (kt+\varepsilon)$, iar momentului $t+T$ îi va corespunde după formula (16.4) abscisa punctului egală cu:

$$a \sin [k(t+T)+\varepsilon] = a \sin (kt+\varepsilon+kT).$$

Presupunem, că $kT = 2\pi$; atunci, din cauza periodicității funcției sinus, abscisa punctului, corespunzătoare momentului $t+T$, va fi egală cu abscisa punctului corespunzătoare momentu-

lui t şi după intervalul de timp T mişcarea punctului se repetă identic. De aceea mişcarea oscilatorie armonică este o *mişcare periodică*, iar intervalul de timp T se numeşte *perioadă*; din relaţia $kT=2\pi$ obţinem:

$$T=\frac{2\pi}{k}; \tag{16.5}$$

k se numeşte *pulsaţie*. Din formula (16.5) urmează că pulsaţia k este egală cu

$$k=\frac{2\pi}{T}.$$

Cu cît pulsaţia k va fi mai mare, cu atît perioada T va fi mai mică, adică cu atît mişcarea se va repeta mai des. Înlocuind pulsaţia k cu expresia ei în funcţie de perioada T, putem scrie, formula (16.4) sub forma:

$$x=a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varepsilon\right). \tag{16.4'}$$

Observăm, că dacă $\varepsilon=0$ sau $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$, atunci formulele (16.4) şi (16.4') vor deveni:

$$x=a\sin kt=a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\ (\varepsilon=0)$$

$$x=a\cos kt=a\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\ \left(\varepsilon=\frac{\pi}{2}\right).$$

Mişcarea oscilatorie armonică se întîlneşte în natură în fenomenele cele mai variate.

În mişcarea oscilatorie armonică, traiectoria punctului este un segment de dreaptă de lungime $2a$ cu centrul în punctul O. Să examinăm acum mişcarea punctului A în planul Oxy, dată prin ecuaţiile

$$x=R\cos kt,\quad y=R\sin kt \tag{16.6}$$

Ca să eliminăm timpul, ridicăm la pătrat ambele ecuaţii şi le adunăm vom obţine:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Astfel, traiectoria punctului A este circumferinţa (C), descrisă cu centrul în originea coordonatelor, cu raza egală cu R (fig. 137). Din fig. 137, rezultă că, dacă $\measuredangle AOx=kt$, adică dacă unghiul AOx va creşte proporţional cu timpul t, atunci vom obţine formulele (16.6), adică punctele B şi C vor avea mişcări oscila-

torii armonice, determinate prin formulele (16.6), respectiv de-a lungul axei Ox și de-a lungul axei Oy. Este evident, că mișcarea punctului A este periodică și perioada T, adică intervalul de timp între două treceri consecutive ale punctului A prin același punct al cercului, este egală cu

$$T=\frac{2\pi}{k}.$$

Deoarece $\widehat{KA}=Rkt$, mișcarea punctului A pe circumferința (C) va fi uniformă.

Observăm că ecuațiile (16.2) și (16.3) nu ne dau numai traiectoria, ci determină și caracterul mișcării punctului de-a lungul ei. În adevăr, să examinăm două sisteme de ecuații:

$$\left.\begin{aligned} x&=R\cos kt,\\ y&=R\sin kt;\end{aligned}\right\}\quad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=R\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\\ y&=R\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}\right\}\quad \text{(II)}$$

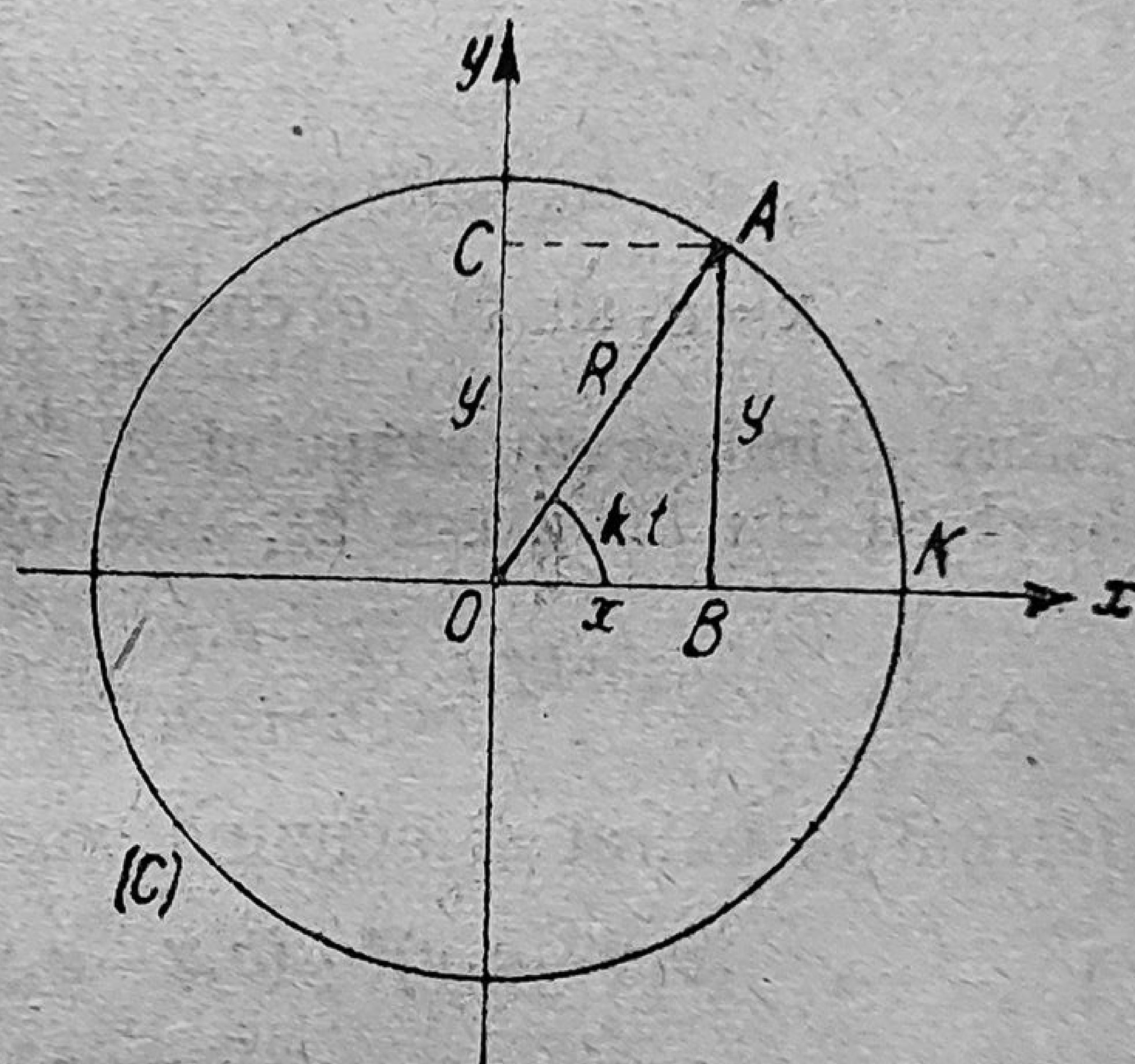


Fig. 137

Din ambele sisteme de ecuații obținem $x^2+y^2=R^2$, și pentru $t=0$, pentru ambele mișcări vom avea $x=R$, $y=0$; dar egalitățile $x=0$ și $y=R$ pentru primul sistem de ecuații vor avea loc cînd $kt=\frac{\pi}{2}$, iar pentru al doilea sistem, cînd $t=\infty$. Astfel, și într-un caz și într-altul, punctul se mișcă pe cercul $x^2=y^2=R^2$, dar în prima mișcare punctul parcurge un sfert de cerc, în intervalul de timp $\frac{\pi}{2k}$, iar în cea de-a doua mișcare, punctul va parcurge același drum, într-un interval de timp infinit de mare.

Să mai examinăm mișcarea dată prin ecuațiile:

$$x=a\cos kt,\quad y=b\sin kt. \tag{16.7}$$

Pentru a elimina timpul t vom împărți prima ecuație cu a și a doua cu b, vom ridica la pătrat și apoi adunînd vom avea:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Vedem că traiectoria punctului este o elipsă cu semiaxele a și b; mişcarea este periodică cu perioada egală cu $\frac{2\pi}{k}$.

În sfîrșit, fie mişcarea punctului în planul Oxy, dată prin ecuația vectorială:

$$\bar{r}=\bar{C}_1 \sin kt+\bar{C}_2 \cos kt. \tag{16.8}$$

Luăm:

$$\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y, \quad \bar{C}_1=\bar{i}a_1+\bar{j}b_1, \quad \bar{C}_2=\bar{i}a_2+\bar{j}b_2,$$

unde a_1, b_1, a_2, b_2, sînt constante. De aici obținem:

$$x=a_1 \sin kt+a_2 \cos kt, \quad y=b_1 \sin kt=b_2 \cos kt.$$

Pentru eliminarea timpului t, vom rezolva aceste ecuații în raport cu sin kt și cos kt; vom obține:

$$\sin kt=\frac{b_2x-a_2y}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad \cos kt=-\frac{b_1x-a_1y}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Ridicînd la pătrat și adunînd, vom obține:

$$(b_1x-a_1y)^2+(b_2x-a_2y)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2.$$

Aceasta este ecuația unei curbe de gradul doi care nu are puncte la infinit, adică o elipsă. Cînd $a_1b_2-a_2b_1=0$ avem:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=k_1 \quad \text{adică} \quad b_1=k_1a_1, \quad b_2=k_1a_2,$$

și vom obține:

$$y=b_1 \sin kt+b_2 \cos kt=k_1 (a_1 \sin kt+a_2 \cos kt)=k_1x,$$

adică traiectoria punctului este dreapta $y=k_1x$.

Să examinăm acum mişcarea unui punct în spațiu. Fie dată mişcarea unui punct, prin ecuația vectorială:

$$\bar{r}=\bar{k}_1t=\bar{r}_0. \tag{16.9}$$

Introducînd vectorii unitari $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, avem:

$$\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z, \quad \bar{k}_1=\bar{i}l+\bar{j}m+\bar{k}n, \quad \bar{r}_0+\bar{i}x_0+\bar{j}y_0+kz_0;$$

introducînd aceste expresii în formula (16.9), obținem:

$$x=lt+x_0, \quad y=mt+y_0, \quad z=nt+z_0; \tag{16.10}$$

de aici vom avea:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

Vedem că traiectoria punctului este dreapta care trece prin punctul (x_0, y_0, z_0), avînd coeficienții unghiulari, proporționali cu cantitățile (l, m, n). La același rezultat putem ajunge direct, din ecuația vectorială (16.9). În adevăr, pentru $t=0$, avem $\bar{r}=\bar{r}_0$; adăugînd vectorului $\bar{r}_0$ vectorul $\bar{k}_1 t$ constant ca direcție dar al cărui modul variază proporțional cu timpul t, după cum se arată în fig. 138, vom obține traiectoria rectilinie a punctului A. Deoarece cantitatea $k_1 t$ crește proporțional cu timpul t, mișcarea punctului A pe traiectoria lui va fi uniformă. Să mai examinăm și mișcarea unui punct, determinată de ecuațiile:

$$x=R\cos kt, \quad y=R\sin kt, \quad z=h\frac{kt}{2\pi}. \tag{16.11}$$

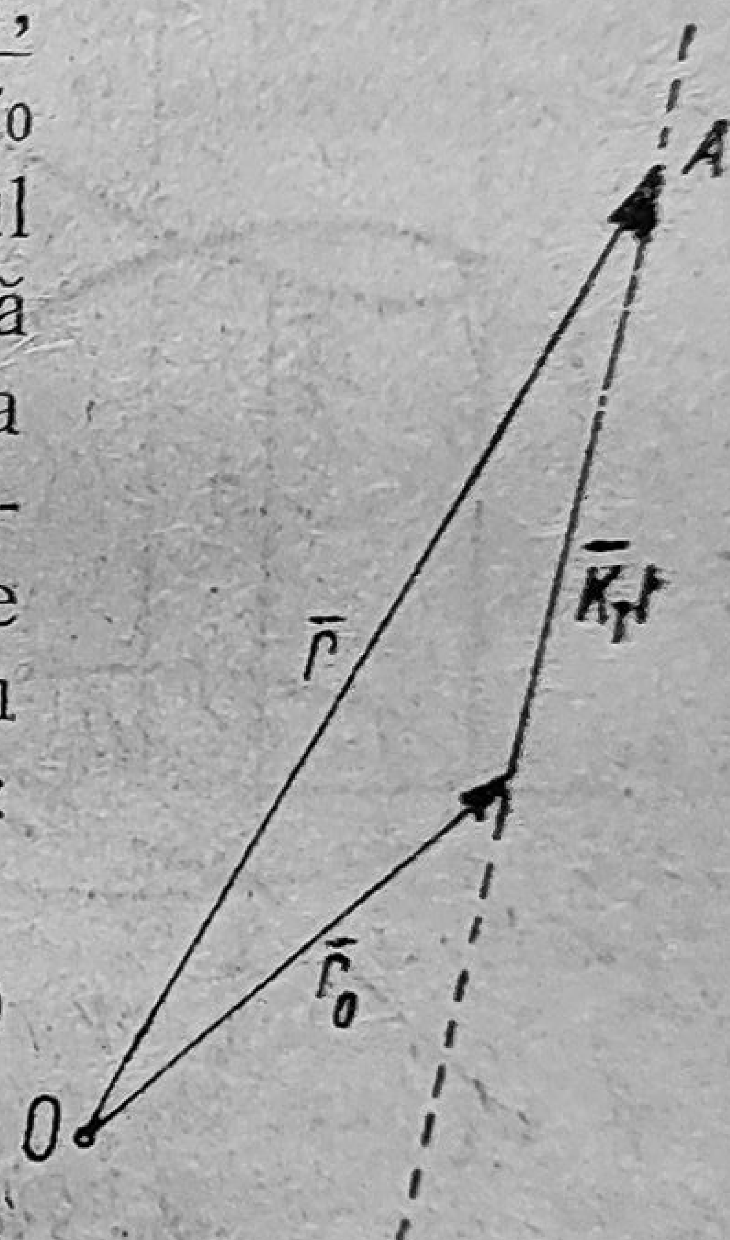


Fig. 138

Pentru a găsi traiectoria punctului, s-ar fi putut determina t din ecuația a treia, introducînd valoarea lui în primele două ecuații și apoi cercetînd cele două ecuații obținute; este însă mai simplu procedeul următor: se ridică primele două ecuații la pătrat și se adună rezultatele; obținem:

$$x^2+y^2=R^2.$$

De aici rezultă că punctul în mișcare va rămîne tot timpul pe un cilindru circular drept cu raza cercului de bază egală cu R și cu axa care coincide cu axa Oz (fig. 139). Pentru $t=0$ avem $x=R$, $y=0$, $z=0$, adică punctul mobil se găsește în punctul B_1 în planul Oxy, în punctul în care direcția pozitivă a axei Ox intersectează cilindrul. Cu creșterea timpului t de la zero, coordonata x va

începe să scadă, iar coordonatele y, z vor începe să crească, adică punctul mobil va porni pe suprafaţa cilindrului aşa cum se arată prin săgeata din fig. 139. Pentru valoarea $t=T$, iar $kT=2\pi$, vom obţine $x=R$, $y=0$, $z=h$, adică punctul mobil se va găsi pe aceeaşi generatoare a cilindrului ca în momentul iniţial, dar se va găsi la distanţa h de planul Oxy ajungînd în purctul B_2, unde $B_1B_2=h$. Vedem că punctul considerat se va mişca pe o linie elicoidală trasată pe cilindrul circular drept, iar după fiecare interval de timp $T=2\pi$, puncul va reveni pe generatoarea iniţială, însă într-o nouă poziţie, la distanţă h faţă de vechea poziţie. Astfel, traiectoria punctului este o elice circulară cu p a s u l h.

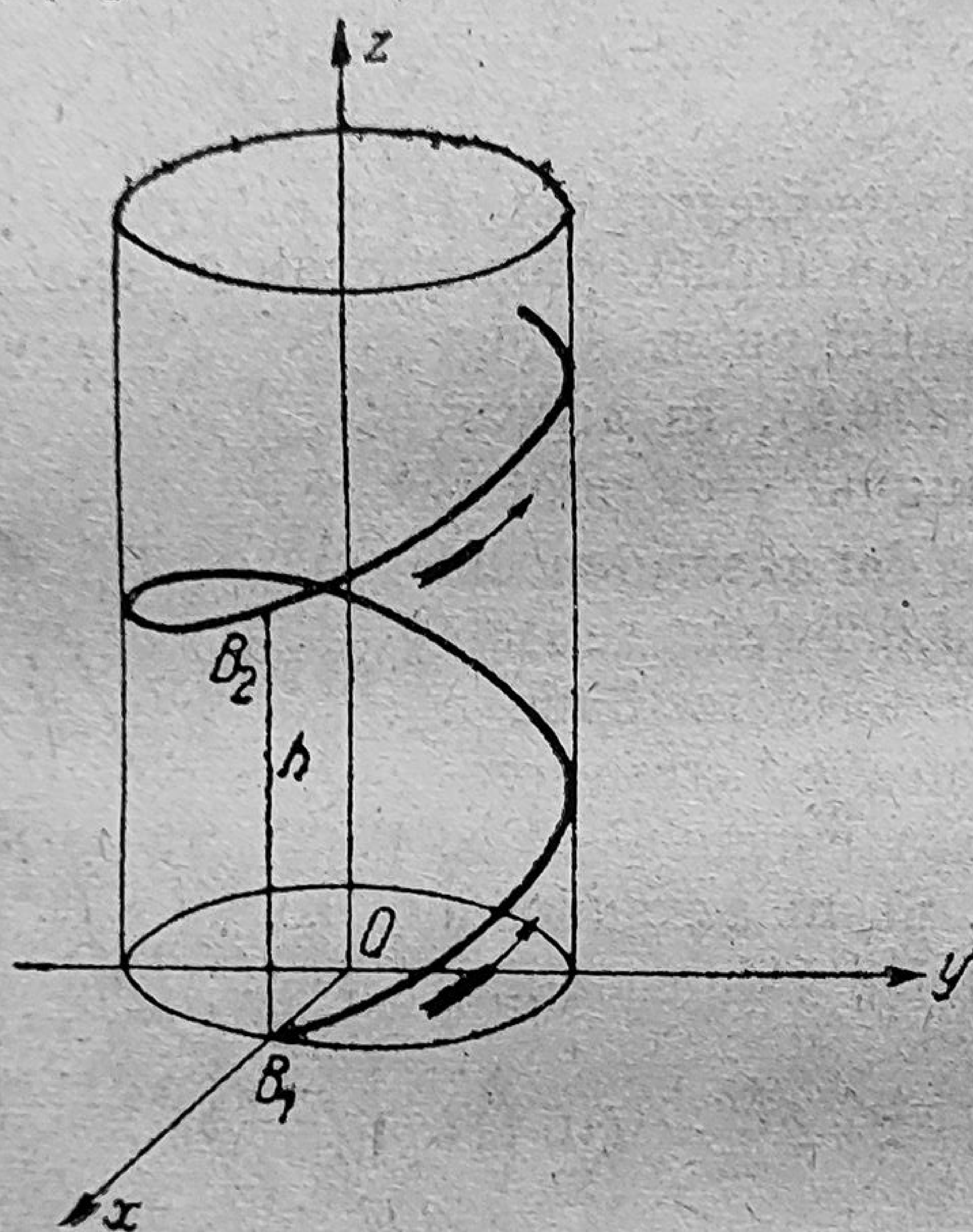


Fig. 139

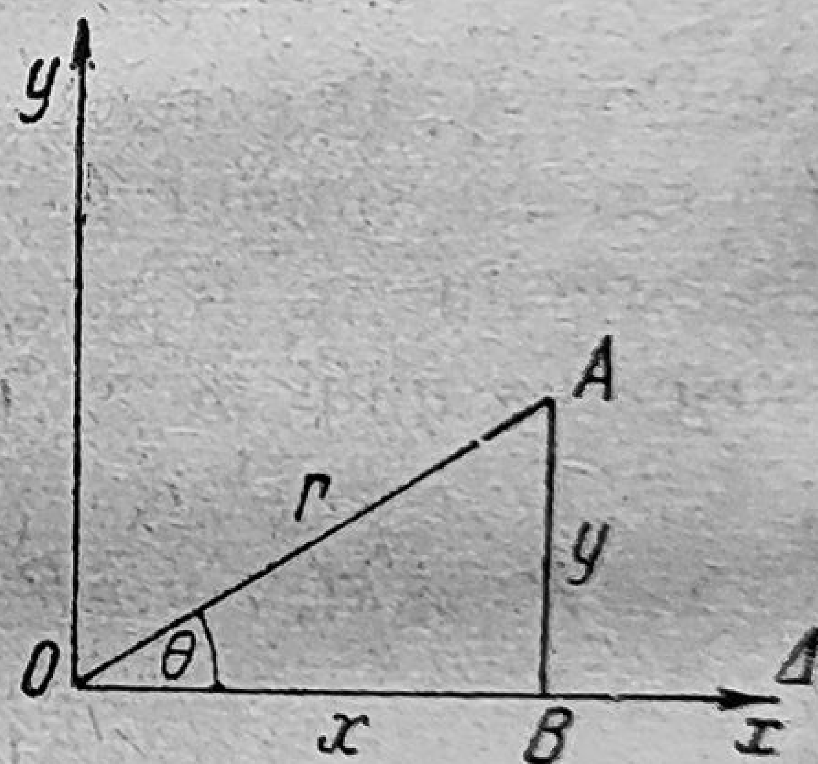


Fig. 140

Este evident că ecuaţiile mişcării punctului se pot reprezenta nu numai prin coordonate ortogonale, ci şi prin alte coordonate. Vom studia aici cazul coordonatelor polare în plan. Să presupunem că punctul mobil se deplasează într-un plan oarecare. Luăm în acest plan un punct fix O şi ducem din el o semidreaptă fixă Δ; punctul O se numeşte *pol*. Vom determina poziţia oricărui punct din acest plan prin raza vectoare $r=OA$ şi prin unghiul O, format de raza-vectoare AO cu dreapta Δ; pentru a obţine toate punctele din plan, este suficient ca mărimea r să varieze de la O pînă la ∞, unghiul Θ de la 0 pînă la 2π. Vom observa că raza vectoare $r=OA$, nu este vectorul de poziţie r ci modulul vectorului de poziţie r. Pentru a stabili legătura dintre coordonatele

polare (r, Θ) și cele ortogonale (x, y), vom lua punctul O ca origine a sistemului ortogonal de axe coordonate Oxy, iar direcția pozitivă a axei Ox o vom suprapune peste semidreapta Δ (fig. 140). Coborîm din punctul A o perpendiculară pe axa Ox; din triunghiul OAB avem:

$$x = r\cos\Theta, \quad y = r\sin\Theta; \tag{16.12}$$

de aici obținem ușor:

$$r = +\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{y}{x}, \quad \Theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{16.13}$$

Cu ajutorul formulelor (16.12) se poate transforma orice expresie din coordonate ortogonale într-o expresie în coordonate polare iar cu ajutorul formulelor (16.13) se poate rezolva problema inversă. Să presupunem, de exemplu, că mișcarea punctului ni se dă prin ecuațiile:

$$r = at, \quad \Theta = bt; \tag{16.14}$$

eliminînd timpul t, găsim:

$$r = k\Theta \left(k = \frac{a}{b}\right). \tag{16.15}$$

După ecuația (16.15) nu este greu de construit traiectoria punctului mobil. În adevăr, dînd unghiului Θ valorile $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$, vom obține pentru r valorile $0, k\alpha, 2k\alpha, 3k\alpha, \ldots$ Vedem că mișcarea punctului are loc pe o spirală care pornește din originea coordonatelor; această spirală se numește *spirala lui Arhimede*. Este ușor să ne convingem că mișcarea punctului care se determină prin ecuațiile:

$$r = r_0 e^{mt}, \quad \Theta = nt, \tag{16.16}$$

unde mărimile r_0, m și n sînt constante, are loc de asemenea pe o spirală; această spirală se numește *spirală logaritmică*.

Coordonatele ortogonale nu sînt totdeauna cele mai comode pentru orice problemă. De exemplu, studiul mișcării (16.14) pe *spirala lui Arhimede* este mai simplu în coordonate polare decît în cele ortogonale, deoarece după formulele (16.13) relațiile simple (16.14) și (16.15) devin în coordonate ortogonale mai complicate:

$$x = at\cos bt, \quad y = at\sin bt,$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = k\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pentru studiul coordonatelor polare în spaţiu vom lua un sistem ortogonal de axe de coordonate $Oxyz$. Dintr-un punct oarecare A din spaţiu vom coborî perpendiculara AB pe planul Oxy, vom duce segmentul OB şi din punctul B vom coborî perpendicularele BC şi BD pe axele Ox şi Oy (fig. 141). Coordonatele polare ale punctului A sînt

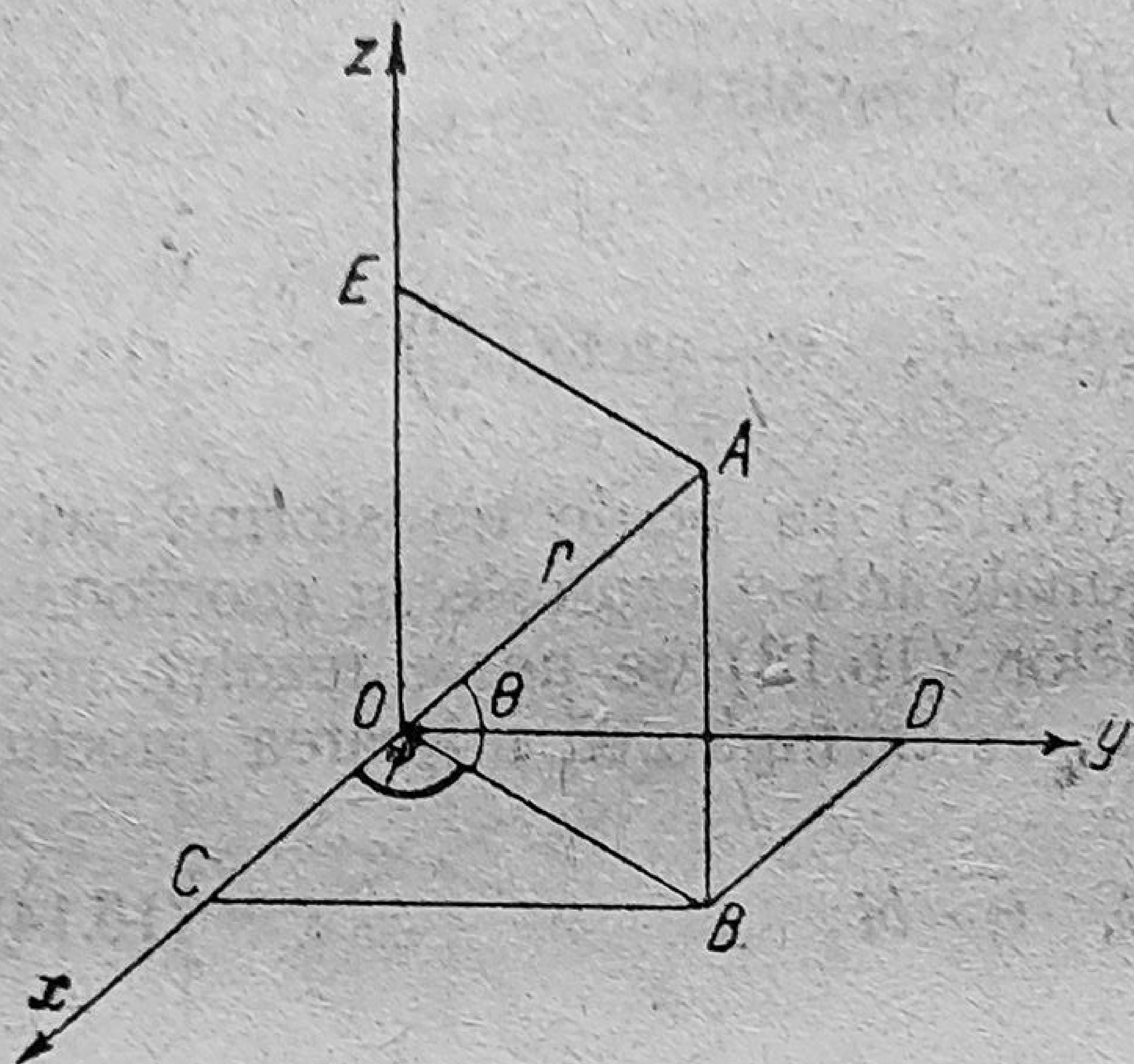


Fig. 141

$$r=OA, \quad \Theta=\sphericalangle AOB,$$
$$\varphi=\sphericalangle xOB$$

Pentru a obţine toate punctele din spaţiu este suficient ca raza r să varieze de la 0 la ∞, unghiul Θ, de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, unghiul φ de la 0 la 2π.

Unghiul Θ este analog cu latitudinea geografică, unghiul φ cu longitudinea geografică, iar planul Oxy este analog cu planul ecuatorial şi semiplanul Oxz, unde $x>0$ este analog cu semiplanul primului meridian. Coordonatele ortogonale ale punctului A vor fi:

$$x=OC=DB, \quad y=OD=CB, \quad z=OE=BA.$$

Deoarece $OB=OA\cos\Theta=r\cos\Theta$ obţinem

$$OC=OB\cos\varphi=r\cos\Theta\cos\varphi$$

$$OD=OB\sin\varphi=r\cos\Theta\sin\varphi,$$

adică

$$x=r\cos\Theta\cos\varphi, \quad y=r\cos\Theta\sin\varphi, \quad z=r\sin\Theta \qquad (16.17)$$

Cu ajutorul formulelor (16. 17) se poate transforma o relaţie exprimată în coordonate ortogonale (x, y, z) într-una exprimată în coordonate polare (r, Θ, φ). Din formulele (16.17) avem:

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\Theta, \quad x^2+y^2+z^2=r^2, \quad \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{z^2}{x^2+y^2}=\operatorname{tg}^2\Theta,$$

adică

$$\left.\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}, \quad \varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \operatorname{tg}\Theta=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}, \quad \Theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}\right\} \quad (16.18)$$

De exemplu, din ecuațiile (16.11) obținem:

$$x^2+y^2=R^2, \quad x^2+y^2+z^2=R^2+h^2\frac{k^2t^2}{4\pi^2}.$$

De aceea:

$$r=\sqrt{R^2+h^2\frac{k^2t^2}{4\pi^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}kt, \quad \operatorname{tg}\Theta=h\frac{kt}{2\pi R},$$

sau

$$r=\sqrt{R^2+h^2\frac{k^2t^2}{4\pi^2}}, \quad \varphi=kt, \quad \operatorname{tg}\Theta=h\frac{kt}{2\pi R}.$$

Vedem că transformarea ecuațiilor de mișcare (16.11) în coordonate polare nu prezintă nici un avantaj în acest caz.

Dacă traiectoria punctului este cunoscută, vom cunoaște caracterul mișcării punctului, dacă vom cunoaște lungimea arcului de curbă parcurs de punct în funcție de timpul t. Și anume, fie s lungimea arcului parcurs de punct pe traiectoria lui, măsurată de la un punct oarecare fix al traiectoriei; este evident că putem determina mișcarea punctului pe traiectoria lui prin relația

$$s=f(t) \quad (16.19)$$

Formula (16.19) poate fi reprezentată grafic, măsurînd timpul pe axa absciselor, iar spațiul s pe axa ordonatelor sau invers. Astfel de grafice se folosesc în transporturi.

Fie punctul O un punct fix în spațiu; luăm punctul O ca origine a unui sistem de referință absolută. Fie punctul A determinat prin vectorul de poziție $\bar{\rho}_A=\overline{OA}$; deoarece punctul A este mobil, vectorul de poziție $\bar{\rho}_A$ este în funcție de timpul t.

Luăm punctul A ca originea unui al doilea sistem de referință mobil, ale cărui axe, în timpul deplasării sale, rămîn paralele cu axele sistemului fix. Să considerăm și punctul C determinat de vectorul de poziție $\bar{r}=\overline{AC}$, unde vectorul $\bar{r}$ este funcție de timpul t. Notînd vectorul de poziție $\overline{OC}$ prin $\bar{\rho}$, avem:

$$\bar{\rho}=\bar{\rho}_A+\bar{r}. \quad (16.20)$$

Deoarece axele sistemului fix şi mobil sînt paralele între ele, unghiurile formate de vectorul de poziţie $\overline{r}$ cu axele mobile de coordonate vor fi respectiv egale cu unghiurile formate de vectorul $\overline{r}$ cu axele de coordonate fixe.

Dacă, lăsînd în relaţia (16.20) vectorul $\overline{r}$ constant ca modul şi direcţie, vom varia numai vectorul $\overline{\rho}_A$, punctul C va avea o mişcare identică cu mişcarea punctului A, iar traiectoria punctului C se obţine din traiectoria punctului A, prin deplasarea acesteia din urmă cu distanţa $\overline{r}$ ca şi cum ar fi o curbă rigidă. Vedem că în acest caz mişcarea sistemului mobil de axe de coordonate care are originea în punctul A, mută sau transportă punctul C fixat de axele mobile de coordonate. Această mişcare a punctului C se numeşte *mişcare de transport*. Dacă însă vectorul $\overline{\rho}_A$ va fi constant şi va varia vectorul $\overline{r}$, atunci axele de coordonate mobile paralele la axele fixe cu originea în punctul O, vor deveni şi ele fixe şi punctul C se va mişca în raport cu aceste axe de coordonate. Această mişcare a punctului C se numeşte *mişcare relativă*. Dacă ambele mărimi $\overline{\rho}_A$ şi $\overline{r}$ vor varia, atunci conform relaţiei (16.20) punctul C va lua parte concomitent la ambele mişcări, cea de transport şi cea relativă; mişcarea punctului C obţinută prin aceasta se numeşte *mişcarea complexă* sau *compusă*. Ambele mişcări, de transport şi relativă se numesc *mişcări componente*. Operaţia de obţinere a mişcării compuse pe baza mişcărilor componente, se numeşte *compunerea mişcărilor*.

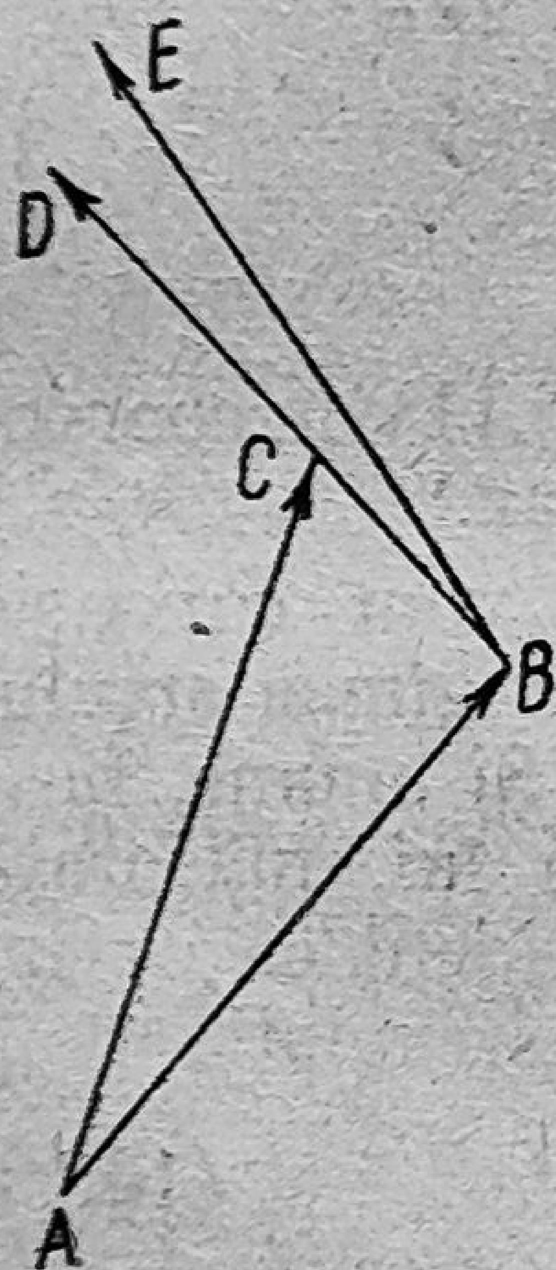


Fig. 142

§ 65. Derivata unui vector în raport cu un scalar. Fie dat vectorul $\overline{s}$ a cărui direcţie şi modul depinde de un parametru scalar t; în acest caz vectorul este funcţie vectorială de variabila independentă t.

Să presupunem că pentru o valoare oarecare t a parametrului, vectorul $\overline{s}$ capătă valoarea $\overline{s}=\overline{AB}$ (fig. 142), iar pentru valoarea $t=\Delta t$ a parametrului vectorul considerat îşi va schimba modulul şi direcţia sa, căpătînd valoarea $\overline{s}_1=\overline{AC}$.

Deoarece avem $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, presupunînd că $\overline{BC}=\Delta\,\bar{s}$, vom obține $\overline{AC}=\bar{s}+\Delta\,\bar{s}$; este evident că mărimea $\Delta\,\bar{s}$ este un vector. Vectorul $\Delta\,\bar{s}$ se numește *creșterea* vectorului $\bar{s}$. Să găsim raportul dintre această creștere geometrică și creșterea variabilei independente:

$$\frac{\Delta\bar{s}}{\Delta t};$$

pentru a calcula acest raport, vom observa că avem $\Delta\bar{s}=\overline{BC}=(\overline{BC})^0\,BC$ unde $(\overline{BC})^0$ este vectorul unitar care are direcția vectorului $\overline{BC}$. De aceea găsim:

$$\frac{\Delta\bar{s}}{\Delta t}=(\overline{BC})^0\frac{BC}{\Delta t}=(\overline{BC})^0\;BD=\overline{BD}.$$

Vom micșora necontenit $\Delta\,t$; atunci și scalarul BC se va micșora necontenit, vectorul unitar $(\overline{BC})^0$ își va modifica, în general, direcția sa în spațiu, iar raportul $\frac{\Delta\bar{s}}{\Delta t}=\overline{BD}$ poate să tindă în acest caz către o limită. *Limita raportului* $\frac{\Delta\bar{s}}{\Delta t}$, *cînd* $\Delta s,\Delta t\to 0$, *în cazul cînd există, se numește prima derivată a vectorului $\bar{s}$ în raport cu parametrul scalar t și se reprezintă prin simbolul* $\frac{d\bar{s}}{dt}$. Fie $\frac{d\bar{s}}{dt}=\lim\,(\overline{BD})=\overline{BE}$. Chiar din definiția derivatei vectorului, se deduce ușor că dacă avem $\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$, atunci să avem: $\frac{d\bar{a}}{dt}+\frac{d\bar{b}}{dt}=\frac{d\bar{c}}{dt}$ etc., adică la derivatele vectoriale care au, cum s-a văzut mai înainte module și direcții, li se aplică și legile adunării vectorilor. Astfel, *derivata unui vector în raport cu un scalar este un vector.* Este evident că prima derivată a vectorului se poate deriva din nou obținînd derivata a doua a vectorului care se reprezintă prin simbolul $\frac{d^2\bar{s}}{dt^2}$ etc.

Fie

$$\bar{a}=\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z.$$

Din definiția derivatei rezultă că trebuie să avem:

$$\frac{d\bar{a}}{dt}=\frac{d(\bar{i}a_x)}{dt}+\frac{d(\bar{j}a_y)}{dt}+\frac{d(\bar{k}a_z)}{dt}$$

Deoarece vectorii unitari situați de-a lungul axelor de coordonate fixe sînt constanți ca modul și ca direcție, obținem:

$$\frac{d\bar{a}}{dt}=\bar{i}\frac{da_x}{dt}+\bar{j}\frac{da_y}{dt}+\bar{k}\frac{da_z}{dt}. \qquad (16.21)$$

Nu este greu de arătat, că derivata vectorială a unui produs scalar sau vectorial al vectorilor se calculează după aceeași regulă ca și derivatele obișnuite ale produselor obișnuite. In adevăr, să se determine derivata produsului scalar $\frac{d(\bar{a}\cdot\bar{b})}{dt}$; deoarece produsul $\bar{a}\cdot\bar{b}$ este un scalar, și derivata lui este tot un scalar. Vom aplica același raționament ca și în calculul diferențial.

Această derivată este limita raportului

$$\left.\frac{(\bar{a}+\Delta\bar{a})\cdot(\bar{b}+\Delta\bar{b})-\bar{a}\cdot\bar{b}}{\Delta t}\right|_{\Delta a,\,\Delta b,\,\Delta t\to 0}$$

Deoarece:

$$(\bar{a}+\Delta\bar{a})\cdot(\bar{b}+\Delta\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\Delta\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\Delta\bar{b}+\Delta\bar{a}\cdot\Delta\bar{b},$$

vom obține:

$$\frac{(\bar{a}+\Delta\bar{a})\cdot(\bar{b}+\Delta\bar{b})-\bar{a}\cdot\bar{b}}{\Delta t}=\frac{\Delta a}{\Delta t}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\frac{\Delta\bar{b}}{\Delta t}+\frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t}\cdot\Delta b.$$

Trecînd la limită vom avea:

$$\frac{d(\bar{a}\cdot\bar{b})}{dt}=\frac{d\bar{a}}{dt}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\frac{d\bar{b}}{dt}+\frac{d\bar{a}}{dt}\cdot 0,$$

sau

$$\frac{d(\bar{a}\cdot\bar{b})}{dt}=\frac{d\bar{a}}{dt}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\frac{d\bar{b}}{dt}.$$

Vedem că derivata produsului scalar $\bar{a}\cdot\bar{b}$ se exprimă prin intermediul derivatelor vectoriale $\frac{d\bar{a}}{dt}$ și $\frac{d\bar{b}}{dt}$.

Exact în același fel se deduce formula

$$\frac{d(\bar{a}\times\bar{b})}{dt}=\frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b}+\bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt}$$

dar, desigur, derivata aflată în partea stîngă a acestei relații este un vector, deoarece produsul $\bar{a}\times\bar{b}$ este vector.

Să mai examinăm și vectorul $\bar{r}$ al cărui modul a este constant și care nu poate decît să se rotească, adică să-și schimbe direcția rămînînd în același plan (fig. 143).

Este evident, că extremitatea B a vectorului $\bar{r}$ va descrie un cerc cu raza r și cu centrul în punctul A. Derivata acestui vector $\bar{r}$ este egală cu limita raportului

$$\frac{\overline{BC}}{\Delta t}_{\Delta t \to 0}$$

sau cu limita expresiei

$$(\overline{BC})^0 \frac{BC}{\widehat{BC}} \frac{\widehat{BC}}{\Delta t}.$$

Dar limita raportului dintre coardă și arc este egală cu 1. Deoarece $\widehat{BC} = r\,\Delta\Theta$, unde $\Delta\Theta$ este unghiul cu care se rotește vectorul $\bar{r}$ cînd parametrul scalar variază cu Δt, vom avea:

$$\lim \left(\frac{\widehat{BC}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = r\frac{d\Theta}{dt}$$

Vectorul unitar $(\overline{BC})^0$ la limită se va transforma în vectorul unitar $\bar{n}^0$ perpendicular pe raza AB și dirijat în sensul rotirii acestei raze. Astfel, găsim:

$$\frac{d\bar{r}}{dr} = \bar{n}^0 r \frac{d\Theta}{dt}. \qquad (16.22)$$

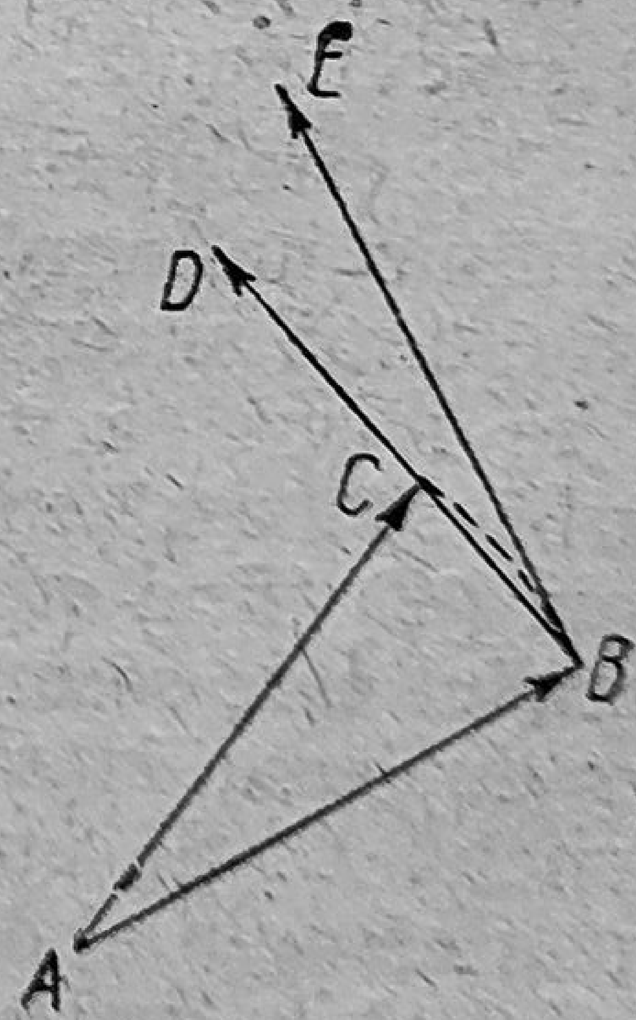


Fig. 143

Prin urmare, *derivata vectorială în raport cu un scalar al unui vector cu modulul constant, care se află tot timpul în același plan este egală ca mărime cu modulul acestui vector înmulțit cu derivata unghiului de rotație al vectorului în raport cu parametrul sclar și este dirijată perpendiculor pe acest vector în sensul rotirii lui.* Desigur, pentru derivata unghiului de rotație din formula (16.22) trebuie să se ia valoarea absolută, deoarece direcția derivatei geometrice considerate se determină complet prin direcția vectorului unitar $\bar{n}^0$.

§ 66. Determinarea vitezei unui punct. Noţiunea de viteză, în mişcarea rectilinie uniformă s-a încetăţenit atît de puternic în viaţa de toate zilele, şi este aşa de elementară, încît această noţiune apare şi în problemele din cursul elementar de artimetică. Toată lumea ştie că pentru obţinerea acestei viteze trebuie împărţit numărul care exprimă lungimea drumului parcurs, la numărul care exprimă mărimea intervalului de timp folosit pentru a-l parcurge. De aceea viteza nu este o lungime; ea depinde nu numai de lungimea drumului ci şi de timp şi anume, viteza este direct proporţională cu lungimea drumului şi invers proporţională cu timpul. Presupunem, de exemplu, că un punct oarecare parcurge în mişcare rectilinie uniformă, 40 m în 5 s; viteza acestui punct, va fi de 8 m/s. Se vede că la determinarea vitezei, lungimile s-au măsurat în metri, iar intervalele de timp în secunde şi, pentru aflarea vitezei, numărul care exprimă lungimea s-a împărţit la numărul care exprimă intervalul de timp. De aici rezultă că lungimea şi viteza sînt mărimi diferite; totuşi viteza de mişcare rectilinie uniformă ca şi forţele şi momentele forţelor, poate fi reprezentată printr-un segment de dreaptă, adică printr-o lungime, dacă convenim a reprezenta unitatea de viteză la o scară dată printr-o unitate de lungime. Putem deci reprezenta viteza la o anumită scară, printr-un segment de dreaptă, orientat în lungul traiectoriei rectilinii a punctului în sensul de mişcare al acestui punct.

Nu este greu de extins această noţiune de viteză din mişcarea rectilinie uniformă la cazul unei mişcări oarecare a punctului, neuniformă şi curbilinie. Să presupunem în acest scop, că punctul A se mişcă pe o traiectorie oarecare (C) (care poate fi şi o curbă strîmbă) caracterul mişcării punctului A pe această traiectorie (C) fiind arbitrar (fig. 144). Presupunem că în momentul t, punctul care se mişcă se găseşte în punctul B al traiectoriei (C), iar după un interval scurt de timp Δt, în momentul $t+\Delta t$, în punctul C. Să unim punctele B şi C prin coarda BC şi să ne imaginăm un al doilea punct care se mişcă uniform pe coarda BC astfel că în momentul t el se află în punctul B, iar în momentul $t+\Delta t$ în punctul C. În acest fel, împreună cu punctul real A, care parcurge în intervalul de timp Δt arcul BC într-o mişcare oarecare — considerăm şi un punct imaginar care parcurge coarda BC în mişcare uniformă, în acelaşi interval de timp; ambele puncte pleacă concomitent din punctul B şi ajung conco-

mitent în punctul C. Este evident că mişcarea punctului imaginar se va apropia cu atît mai mult de mişcarea punctului real, cu cît intervalul de timp Δt va fi mai scurt; conform celor prece-

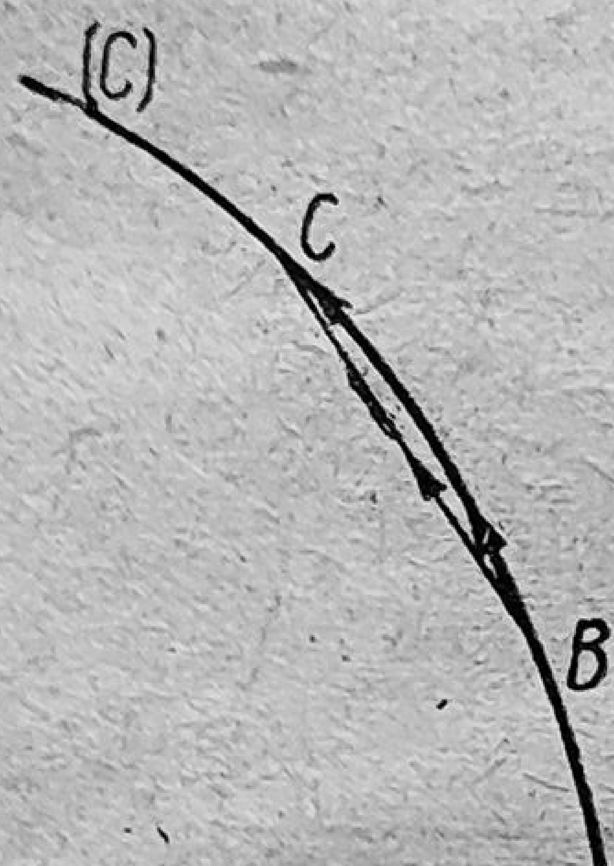


Fig. 144

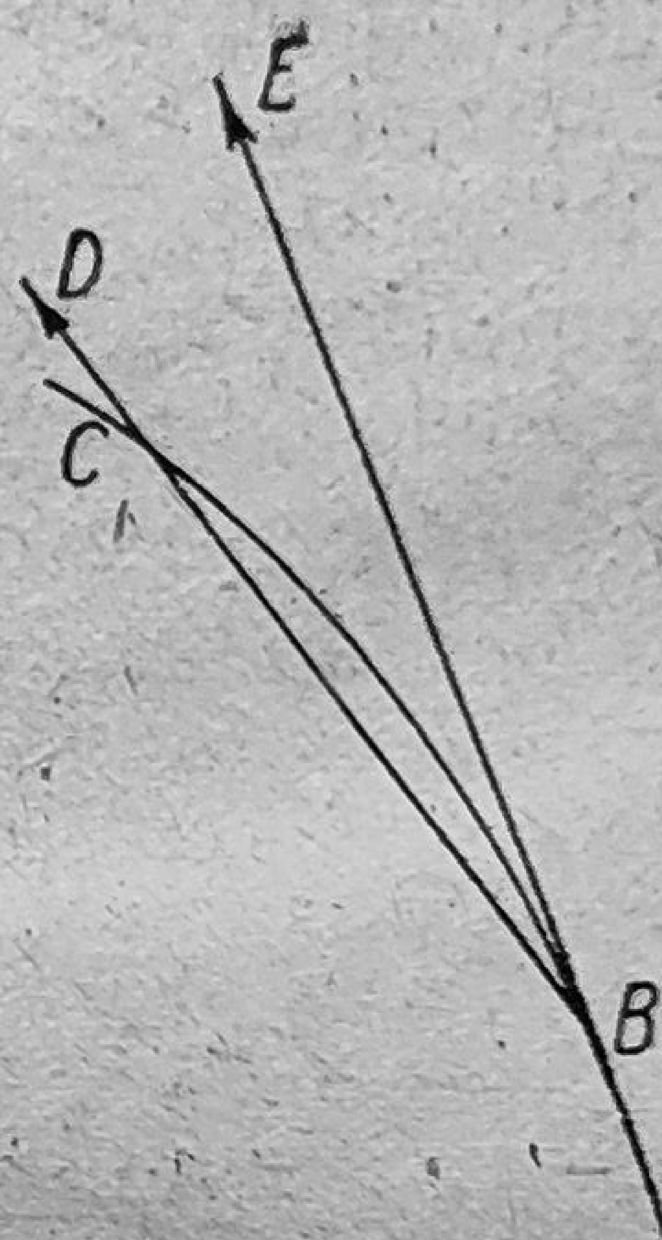


Fig. 145

dente, viteza acestui punct imaginar în mişcarea lui uniformă de-a lungul coardei BC va fi egală cu $\frac{BC}{\Delta t}$. După cum s-a arătat în acest paragraf, această viteză se poate reprezenta convenţional prin segmentul de dreaptă BD, astfel că are loc egalitatea (fig. 145).

$$BD=\frac{BC}{\Delta t}.$$

Mărimea BD se numeşte *viteza medie* a punctului A în intervalul de timp Δt. Să facem să tindă intervalul de timp Δt către zero; atunci punctul C se va apropia de punctul B. Deoarece secanta devine la limita tangentă, la limită vom avea:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{BC}{\Delta t}\right)=BE.$$

Segmentul BE are direcţia tangentei la traiectorie în punctul B şi are o lungime determinată; mărimea BE se numeşte *viteza instantanee* a punctului A în momentul t, sau mai simplu viteza punctului A în momentul t. Vedem că viteza instantanee se caracterizează prin mărime, direcţie şi sens; ca să demonstrăm că viteza instantanee este un vector, rămîne să se dovedească că

vitezele instantanee se pot aduna după regula de adunare a vectorilor. In fizica elementară se demonstrează că vitezele mişcărilor uniforme rectilinii se adună după legea paralelogramului Nu este greu să ne convingem că această regulă privind viteza punctului se aplică la orice fel de mişcări, nu numai la mişcările rectilinii uniforme.

Să considerăm un interval de timp foarte mic Δt şi să presupunem că punctul mobil A va descrie în acest interval de timp un arc de curbă foarte mic $\overset{\frown}{BC}$. Presupunem apoi că arcul $\overset{\frown}{BC}$

Fig. 146

nu rămîne nici el în repaus, ci în acelaşi interval de timp Δt, se va deplasa în poziţia $\overset{\frown}{B_1C_1}$ astfel încît $\overset{\frown}{B_1C_1}=\overset{\frown}{BC}$. Presupunem că arcul $\overset{\frown}{BB_1}$ reprezintă drumul pe care l-ar parcurge cu punctul A dacă ar fi solidar legat în punctul B de arcul $\overset{\frown}{BC}$. Este evident că în mişcare compusă, punctul A va trece, în intervalul de timp Δt din punctul B în punctul C_1, mişcîndu-se pe un arc de curbă $\overset{\frown}{BC_1}$ (fig. 146). Ducem coardele BC, BB_1, B_1C_1; este evident că trebuie să avem $B_1C_1=BC$; vom construi apoi paralelogramul $BCDB_1$ şi vom uni punctul D cu punctul C_1. Se poate întîmpla ca planul triunghiului B_1DC_1 să nu coincidă cu planul paralelogramului $BCDB_1$. Din fig. 146 găsim:

$$\overline{BC_1}=\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DC_1}=\overline{BC}+\overline{BB_1}+\overline{DC_1}.$$

Deoarece $B_1D = BC$, vom avea $B_1D = B_1C_1$; segmentul DC_1 care este foarte mic poate fi considerat apropiat de arcul de cerc DC_1, cu centrul în punctul B_1 și cu raza egală cu B_1C_1, unde:

$$\widehat{DC_1} = B_1C_1 \cdot \sphericalangle DB_1C_1.$$

Deoarece cei doi factori din partea dreaptă a acestei egalități sînt cantități infinit mici de ordinul întîi, proporționali cu cantitatea Δt, arcul de curbă $\widehat{DC_1}$ va fi un infinit mic de ordinul doi, proporțional cu cantitatea Δt^2. Împărțind cu Δt expresia lui $\overline{BC_1}$, vom obține:

$$\frac{\overline{BC_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{BC}}{\Delta t} + \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} + \frac{\overline{DC_1}}{\Delta t}$$

sau:

$$\frac{\overline{BC_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{BC}}{\Delta t} + \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} + \frac{\overline{DC_1}}{\widehat{DC_1}} \cdot \frac{\widehat{DC_1}}{\Delta t}.$$

De aici găsim:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{BC_1}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{BC}}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{BB_1}}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{DC_1}}{\widehat{DC_1}}\right) \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\widehat{DC_1}}{\Delta t}\right)$$

Este evident, că modulul factorului $\lim\left(\frac{\overline{DC_1}}{\widehat{DC_1}}\right)$ este egal cu unitatea, iar factorul $\lim\left(\frac{\widehat{DC_1}}{\Delta t}\right)$ conform celor arătate este egal cu zero; astfel avem:

$$\lim\left(\frac{\overline{BC_1}}{\Delta t}\right) = \lim\left(\frac{\overline{BC}}{\Delta t}\right) + \lim\left(\frac{\overline{BB_1}}{\Delta t}\right).$$

Dar, este evident, că $\lim\left(\frac{\overline{BC_1}}{\Delta t}\right)$ este viteza relativă a punctului A, $\lim\left(\frac{\overline{BB_1}}{\Delta t}\right)$ este viteza de transport a punctului A, iar $\lim\left(\frac{\overline{BC_1}}{\Delta t}\right)$ este viteza mișcării compuse a punctului A. Astfel, viteza mișcării compuse a punctului este suma geometrică a vitezelor componente a mișcărilor acestui punct. Aceasta este un adevăr matematic. La compunerea vitezelor se poate ajunge și astfel. Anume, în dinamică, vom vedea că unui punct i se poate imprima instantaneu o viteză. De aceea, să ne închipuim că la un moment dat, sub acțiunea unei cauze oarecare, punctul A trebuie să capete viteza instantanee $\overline{v}_1$ și sub acțiunea unei alte cauze, trebuie să capete o altă viteză $\overline{v}_2$; se cere să se găsească ce viteză $\overline{v}$ va

căpăta punctul A în cazul cînd asupra lui vor acționa ambele cauze deodată. Această problemă fizică nu se poate rezolva prin cinematică; ea va primi rezolvarea numai în dinamică. Primul care a pus această problemă cu toată rigurozitatea a fost Newton. Aici vom arăta numai că și în acest caz viteza $\bar{v}$ a punctului A se obține prin adunarea geometrică a vitezelor $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$. În acest fel, viteza punctului este un vector, deoarece totdeauna avem:

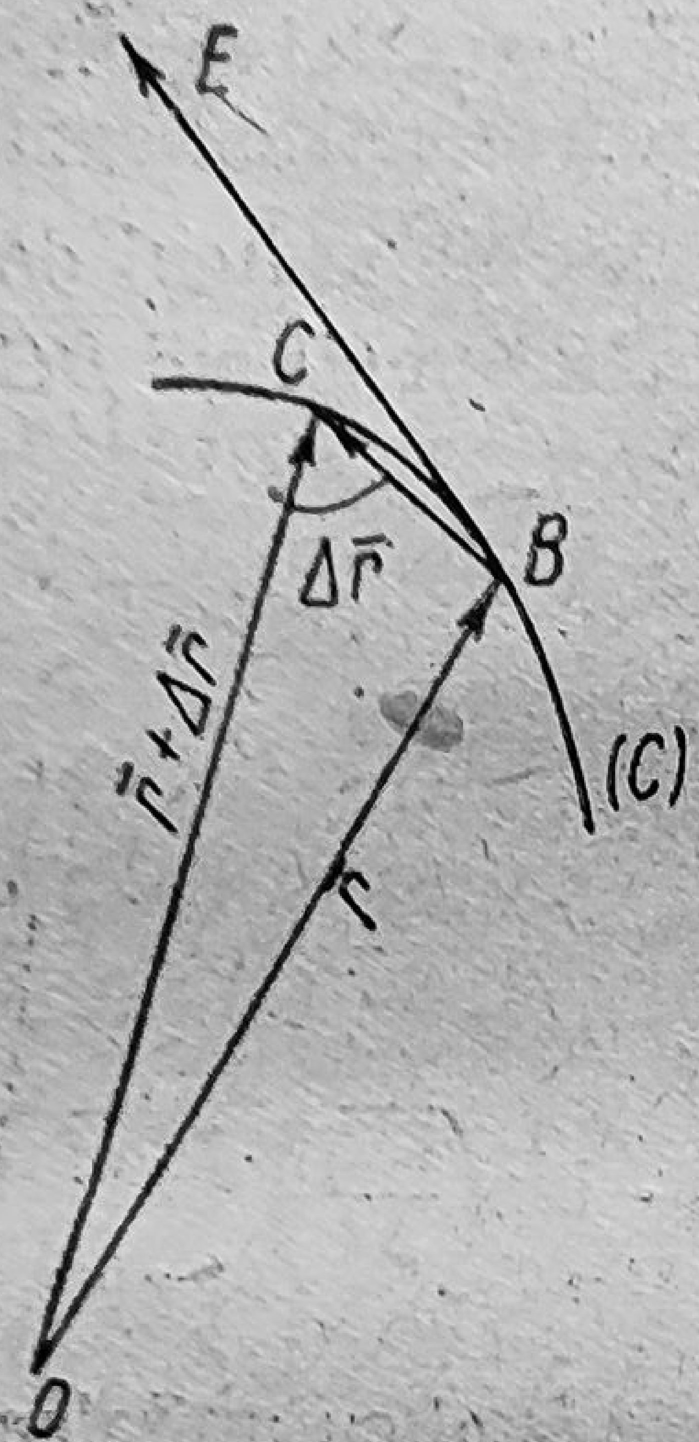


Fig. 147

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2. \tag{16.23}$$

În statică s-a arătat că forțele, momentele forțelor și vectorii de poziție sînt vectori: vedem aici că și viteza punctului este un vector.

Afară de determinarea vectorială a vitezei punctului, dată mai înainte, viteza punctului mai poate fi determinată și analitic. În adevăr, fie punctul O, un punct fix în spațiu, fie $\bar{r}$ vectorul de poziție în raport cu O al unui punct mobil A și fie (C) traiectoria punctului A (fig. 147); este evident că vectorul de poziție $\bar{r}$ al punctului A este funcție de timpul t.

Presupunem că în momentul t, punctul mobil A se găsește în punctul B, iar în momentul $t+\Delta t$, în punctul C al traiectoriei sale. Din fig. 147 rezultă că:

$$\bar{r}=\overline{OB},\quad \bar{r}+\Delta\bar{r}=\overline{OC},\quad \Delta\bar{r}=\overline{BC};$$

după definiția dată mai înainte vitezei punctului A, reiese că această viteză va fi

$$\lim\left(\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}=\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Deoarece derivata unui vector este un vector, și viteza punctului este un vector, și vom avea:

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{16.24}$$

În acest fel, *vectorul vitezei punctului este egal cu prima derivată a vectorului de poziție al acestui punct, în raport cu*

timpul. Derivînd în raport cu timpul ambele părți ale formulei (16.20) obținem:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho_A}{dt}+\frac{d\bar{r}}{dt},$$

sau

$$\bar{v}=\bar{v}_2+\bar{v}_1;$$

aceasta este o deducere analitică a legii paralelogramului vitezelor în condițiile pentru care formula (16.20) este valabilă.

Deoarece avem $\Delta\bar{r}=(\Delta\bar{r})^0\,|\Delta\bar{r}|$ unde $(\Delta\bar{r})^0$ este versorul direcției vectorului $\Delta\bar{r}$, și la trecerea la limită versorul $(\Delta\bar{r})^0$ va deveni vectorul unitar $\bar{\tau}^0$ al tangentei la traiectoria punctului A, vector orientat în sensul mișcării, vom avea:

$$\bar{v}=\bar{\tau}^0\lim\left(\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta t}\right)$$

Dar avem:

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

unde Δs este un element de arc al traiectoriei punctului A; de aceea, ținînd seamă că $\lim\left(\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta s}\right)_{\Delta s\to 0}=1$, vom obține:

$$\bar{v}=\bar{\tau}^0\frac{ds}{dt}\quad v=\frac{ds}{dt}. \qquad (16.25)$$

In formulele (16.25) trebuie să se ia derivata $\frac{ds}{dt}$ în valoarea ei absolută, deoarece direcția vitezei este complet determinată prin vectorul unitar $\bar{\tau}^0$.

§ 67. Viteza punctului în coordonate ortogonale și polare. După cum rezultă din formula (16.24) este ușor de găsit expresiile vitezei în coordonate ortogonale și polare. Introducem un sistem fix de axe de coordonate $Oxyz$. Deoarece avem:

$$\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z,$$

atunci după formulele (16.21) și (16.24) vom obține:

$$\bar{v}=\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}$$

Introducînd proiecțiile v_x, v_y, v_z, ale vitezei $\bar{v}$ pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz, vom avea:

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y+\bar{k}v_z=\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}$$

adică:

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \quad v_y=\frac{dy}{dt}, \quad v_z=\frac{dz}{dt}. \tag{16.26}$$

In acest fel, *proiecția vitezei punctului pe oricare din axele ortogonale fixe de coordonate, este egală cu derivata întîi a coordonatei corespunzătoare a punctului mobil în raport cu timpul.*

Din formulele (16.26) găsim modulul v al vitezei

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{16.27}$$

unde radicalul se va lua în valoare absolută. Deoarece se știe că pătratul diferențialei arcului unei curbe este

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

din formula $v=\frac{ds}{dt}$ obținem din nou formula (16.27). Notăm prin α, β, γ, unghiurile pe care le formează vectorul viteză al punctului cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz; știm că trebuie să avem:

$$\frac{v_x}{v}=\frac{1}{v}\frac{dx}{dt}, \quad \cos\beta=\frac{v_y}{v}=\frac{1}{v}\frac{dy}{dt}, \quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}=\frac{1}{v}\frac{dz}{dt}, \tag{16.28}$$

unde v este determinat prin formula (16.27). Deoarece coordonatele x, y, z ale punctului se dau prin formulele (16.2) sau (16.3), pentru elementele v_x, v_y, v_z, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ale mișcării punctului, vom obține expresii în funcție de timp. Folosindu-ne de formulele (16.2) sau (16.3) se poate elimina timpul t din aceste expresii, reprezentîndu-le ca funcții de coordonatele punctului. In acest fel, putem rezolva două feluri de probleme: sau să găsim elementele mișcării punctului arătate mai sus la un moment dat, sau să găsim aceste elemente pentru un punct dat al traiectoriei; deoarece viteza este dirijată de-a lungul tangentei, este clar că problema cinematică a găsirii vitezei este legată de problema geometrică a găsirii tangentei în orice punct al traiectoriei.

Să examinăm mișcarea oscilatorie armonică definită prin ecuația (16.4) sau (16.4'); pentru această mișcare vom avea:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=ak\cos(kt+\varepsilon)=\frac{2\pi a}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\varepsilon\right).$$

În funcție de semnul cosinusului, direcția vectorului viteză va coincide cu direcția pozitivă a axei Ox sau va fi de sens contrar. Din formula (16.4) avem:

$$a\cos(kt+\varepsilon)=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

de aceea:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\pm k\sqrt{a^2-x^2}.$$

În ultima formulă trebuie să se ia semnul plus în cazul cînd punctul se mișcă în sensul pozitiv al axei absciselor și semnul minus dacă punctul se mișcă în sens opus.

Să examinăm apoi mișcarea definită prin ecuațiile (16.6). Obținem:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-kR\sin kt,$$

$$v_y=+kR\cos kt,$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=kR,$$

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v}=-\sin kt,$$

$$\cos\beta=\frac{v_y}{v}=\cos kt.$$

Eliminînd timpul t cu ajutorul formulelor (16.6), vom găsi:

$$v_x=-ky,\quad v_y=kx\quad v=\sqrt{k^2(x^2+y^2)}=kR$$

$$\cos\alpha=-\frac{y}{R},\quad \cos\beta=\frac{x}{R}.$$

Ultimele formule se pot găsi ușor direct geometric din fig. 148. În adevăr, avem:

$$kt+\frac{\pi}{2}=\alpha,\quad kt=\beta,$$

adică trebuie să avem:

$$\cos\alpha=-\sin kt=-\frac{y}{R}\quad \cos\beta=\cos kt=\frac{x}{R}$$

Să examinăm, în sfîrșit, mișcarea elicoidală (16.11)

$$x=R\cos kt,\quad y=R\sin kt,\quad z=h\frac{kt}{2\pi}$$

Avem succesiv:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-kR\sin kt,\quad v_y=\frac{dy}{dt}=kR\cos kt,\quad v_z=\frac{dz}{dt}=h\frac{k}{2\pi}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=k\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}=\frac{k}{2\pi}=\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}$$

Deoarece modulul v al vitezei este constant, această mişcare elicoidală a punctului va fi uniformă. Să găsim unghiul γ, format de vectorul viteză cu axa Oz; obţinem:

$$\cos\gamma=\frac{v_z}{v}=\frac{h}{\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}}.$$

Vedem că în mişcarea considerată, vectorul viteză formează un unghi constant, cu axa Oz, şi prin urmare, un unghi constant cu planul Oxy. In acest caz, tangenta la curba elicoidală care reprezintă traiectoria punctului, formează cu axa Oz un unghi constant. Folosindu-ne de această proprietate, se poate uşor construi curba elicoidală considerată. In adevăr vom lua triunghiul dreptunghi în care una din catete va fi egală cu h — pasul elicei, iar cealaltă catetă este egală cu $2\pi R$ — circumferinţa bazei cilindrului (fig. 149). Ipotenuza acestui triunghi va fi egală cu $\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}$, cosinusul unghiului γ, format de ipotenuza cu cateta h, va fi egal cu

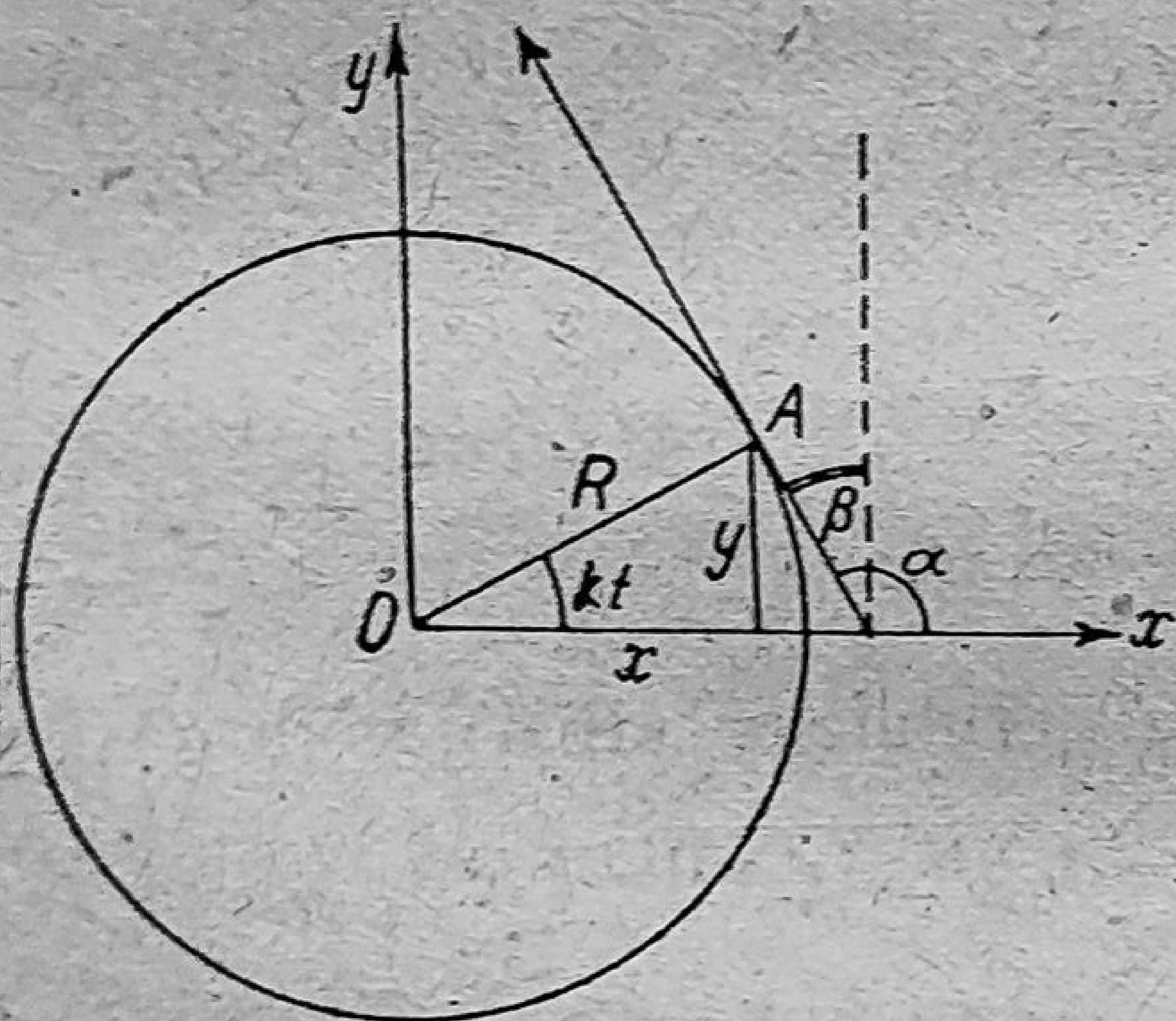


Fig. 148

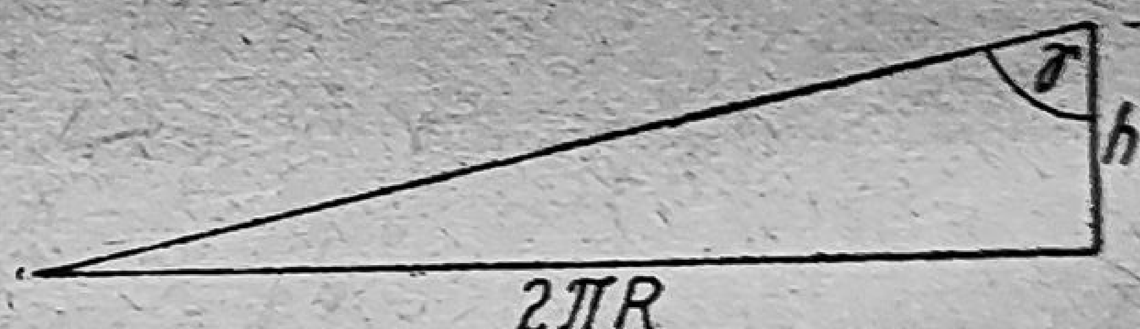


Fig. 149

$$\cos\gamma=\frac{h}{\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}}$$

Vedem că este suficient să înfăşurăm acest triunghi pe cilindru, ca ipotenuza lui să formeze elicea circulară considerată şi anume o singură spirală a ei. Să revenim la formulele (16.28), înlocuind

în ele modulul vitezei v prin valoarea lui $\frac{ds}{dt}$. Reducînd cu dt, obținem:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

Astfel, ajungem la formulele cunoscute din geometria diferențială care determină consinușii directori ai tangentei la curbă.

Să dăm acum expresia vitezei în coordonate polare, în plan. Avem:

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Introducem vectorul unitar $\bar{r}^0$, care are direcția razei-vectoare $\bar{r}$. Observăm că deși $\bar{r}^0$ nu variază ca modul, variază ca direcție și prin urmare vectorul $\bar{r}^0$ este funcție de timp. Știm, că

$$\bar{r}=\bar{r}^0 r$$

de aceea obținem

$$v=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{r}^0}{dt}r+\bar{r}^0\frac{dr}{dt}.$$

Aplicînd derivatei $\frac{d\bar{r}^0}{dt}$ formula (16.22), vom avea:

$$\frac{d\bar{r}^0}{dt}=\bar{n}\frac{d\theta}{dt}.$$

unde θ este unghiul dintre vectorul $\bar{r}$ și o direcție oarecare invariabilă Δ aleasă în plan. În acest fel

$$\bar{v}=\bar{r}^0\frac{dr}{dt}+\bar{n}^0 r\frac{d\theta}{dt}. \tag{16.29}$$

Vedem că vectorul $\bar{v}$ este suma a doi vectori: unul $\bar{r}^0\frac{dr}{dt}$ este dirijat de-a lungul vectorului $\bar{r}$, iar celălalt $\bar{n}^0 r\frac{d\theta}{dt}$ perpendicular pe vectorul $\bar{r}$. Fie (C) traiectoria punctului, care se găsește în momentul t în punctul B (v. fig. 150). Să ducem din punctul fix O, vectorul de poziție $\bar{r}$ al punctului B și să presupunem că el va forma cu direcția invariabilă Δ, unghiul θ.

Construim în punctul B un sistem de coordonate ortogonale în felul următor: una din axe (r) o vom dirija după vectorul de

poziție $\bar{r}$, iar cealaltă axă (θ) vom considera perpendiculara în punctul B pe vectorul $\bar{r}$, orientată în sensul creșterii unghiului θ. Vom nota proiecțiile vitezei pe axele (r) și (θ) respectiv prin v_r și v_θ. Din formula (16.29) vom avea:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\Theta = r\frac{d\Theta}{dt}. \tag{16.30}$$

Aici întîlnim pentru prima dată *axele mobile de coordonate*. În adevăr axele (r) și (θ) au origine mobilă, care coincide cu poziția instantanee B a punctului mobil pe traiectoria lui, și au o

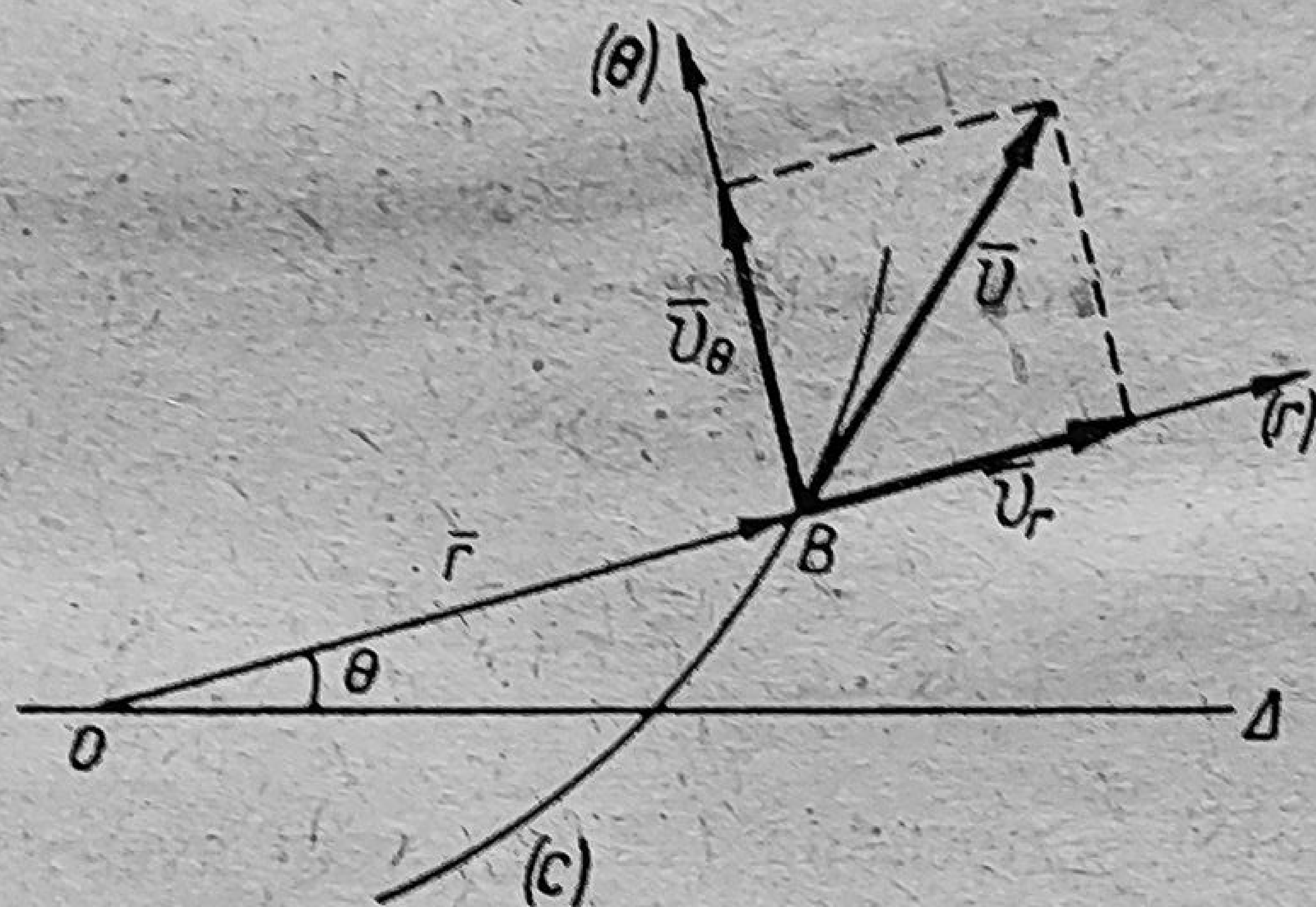


Fig. 150

direcție variabilă deoarece direcția vectorului de poziție $\bar{r}$ variază în funcție de timp. Observăm că, de multe ori în mecanică, sîntem nevoiți să ne servim de axe mobile de coordonate.

Vom obține modulul vitezei după formula:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\Theta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2}, \tag{16.31}$$

unde radicalul se ia în valoare absolută. Nu este greu să se obțină această formulă imediat, prin trecerea de la coordonatele ortogonale la cele polare. În adevăr, avem:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Diferențiind ultimele două formule, vom găsi:

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta;$$

ridicînd la pătrat și adunînd, vom avea pătratul elementului liniar în coordonate polare în plan:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2.$$

De aici găsim:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

adică revenim la formula (16.31).

Să aplicăm formula (16.31) la mișcarea punctului pe o circumferință cu raza egală cu R. Deoarece în acest caz avem $r=R=\text{const}$, atunci $v_r=0$, și viteza $\overline{v}$ va fi dirijată după perpendiculara pe rază, adică de-a lungul tangentei la circumferință, după cum și trebuie să fie. Prin urmare, pentru modulul v al vitezei, obținem:

$$v = R\left|\frac{d\Theta}{dt}\right|,$$

unde trebuie să se ia valoarea absolută a derivatei $\frac{d\Theta}{dt}$, deoarece formula (16.31) dă modulul vitezei. Introducem notația:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega, \qquad (16.32)$$

unde ω se numește *viteză unghiulară*. Prin urmare, vom avea:

$$v = R\,|\omega|, \qquad (16.33)$$

adică *în mișcarea unui punct pe un cerc, modulul vitezei liniare este egal cu raza înmulțită cu modulul vitezei unghiulare.*

Să găsim și viteza în mișcarea unui punct pe spirala lui Arhimede, definită prin ecuațiile (16.14). Avem:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = a, \quad v_\Theta = \frac{d\Theta}{dt} = abt = br;$$

de aceea vom avea:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\Theta^2} = a\sqrt{1+b^2t^2} = \sqrt{a^2+b^2r^2}$$

Din fig. 150 vom găsi:

$$\operatorname{tg}(\widehat{\overline{v}, \overline{v}_r}) = \frac{v_\Theta}{v_r} = bt = \frac{b}{a}r.$$

Pentru a avea modulul v al vitezei în coordonate polare în spațiu, vom porni de la formulele

$$v=\frac{ds}{dt}, \quad ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

și formulele (16.17); diferențiind ultimele formule, obținem:

$$dx=dr\cos\Theta\cos\varphi-r\sin\Theta\cos\varphi\, d\Theta-r\cos\Theta\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dy=dr\cos\Theta\sin\varphi-r\sin\Theta\sin\varphi\, d\Theta+r\cos\Theta\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$dz=dr\sin\Theta+r\cos\Theta\, d\Theta.$$

Ridicînd la pătrat ultimele trei formule și adunînd rezultatele, vom găsi pătratul elementului liniar în coordonate polare în spațiu

$$ds^2=dr^2+r^2\,d\Theta^2+r^2\cos^2\Theta\, d\varphi^2.$$

De aici vom avea:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=r^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2+r^2\cos^2\Theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad (16.34)$$

Să observăm că procedeul utilizat aici al determinării pătratului vitezei prin găsirea pătratului elementului liniar, este un procedeu care se utilizează des în mecanică.

§ 68. Viteză areolară. Să trecem acum la noțiunea de viteză areolară, limitîndu-ne la cazul mișcării plane a punctului. Să

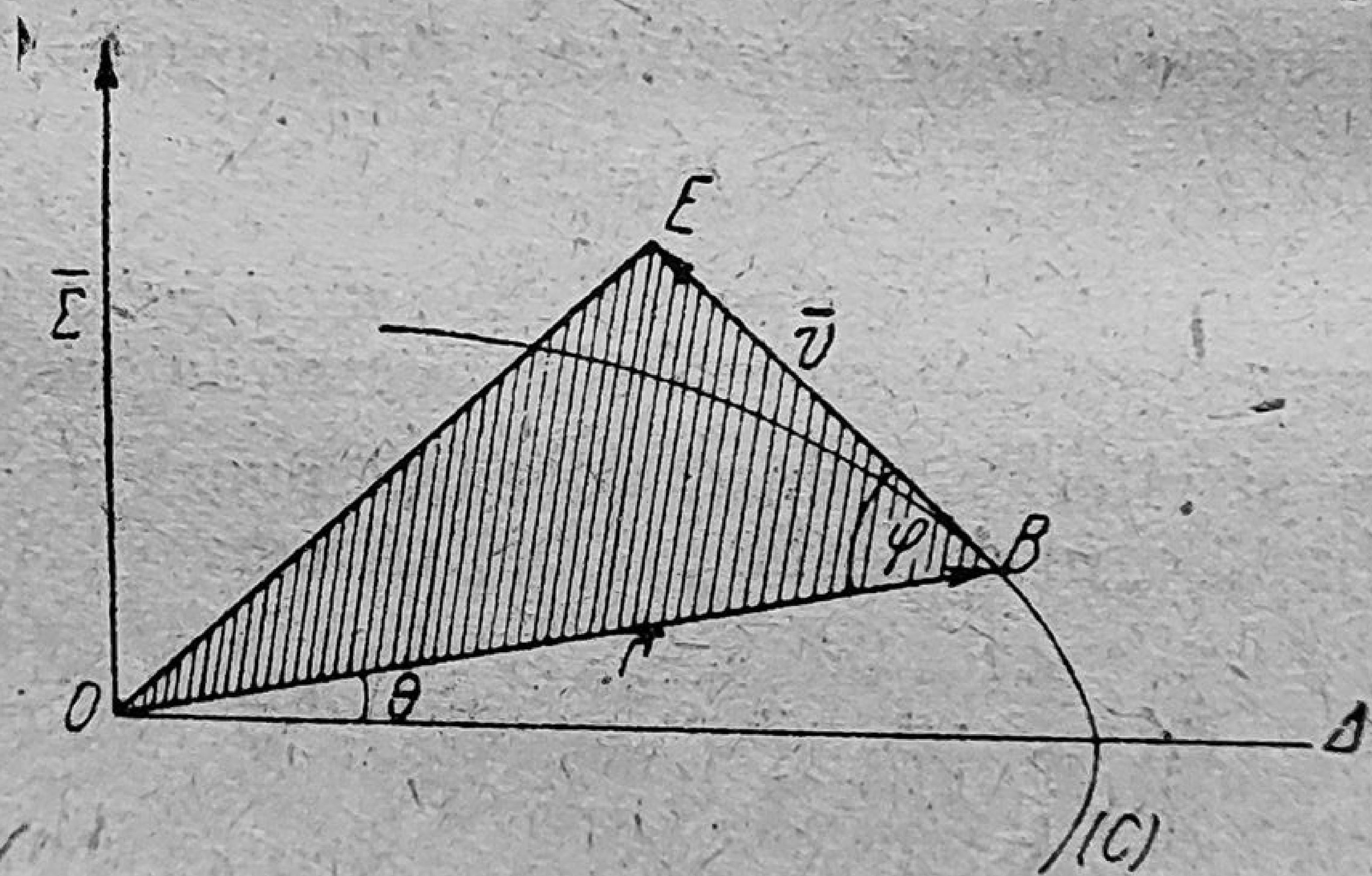


Fig. 151

examinăm mișcarea punctului A, pe o traiectorie oarecare plană (C). Să presupunem că la un moment oarecare t, punctul mobil se găsește în punctul B al traiectoriei sale și are viteza $\bar{v}=\overline{BE}$. Unim un punct fix O al planului în care se mișcă punctul consi-

derat cu punctul B, prin vectorul de poziție $\bar{r}=\overline{OB}$ (fig. 151). *Se numește viteză areolară a punctului mobil B în raport cu punctul fix O, produsul vectorial* $\frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{v}$.

Să notăm vectorul $\frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{v}$ prin $\bar{\Sigma}$. Știm (Cap. II, § 11), că:

$$\Sigma=\frac{1}{2}rv\sin\varphi.$$

Să dăm acum alte expresii ale vitezei areolare, atît în coordonate polare cît și în coordonate ortogonale, expresii de care în general ne folosim mereu ca fiind mai comode. Pentru a obține expresia vitezei areolare în coordonate polare, să înlocuim în expresia $\frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{v}$, vectorul de poziție $\bar{r}$ prin valoarea lui $\bar{r}=\bar{r}^0r$, și vectorul viteză $\bar{v}$ prin valoarea din formula (16.29); vom obține:

$$\frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{v}=\frac{1}{2}\bar{r}^0r\times\left(\bar{r}_0\frac{dr}{dt}+\bar{n}^0r\frac{d\theta}{dt}\right)$$

sau

$$\bar{\Sigma}=\frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{v}=(\bar{r}^0\times\bar{r}^0)\frac{r}{2}\frac{dr}{dt}+(\bar{r}^0\times\bar{n}^0)\frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt}.$$

În § 12 al cap. II am văzut că trebuie să avem:

$$\bar{r}^0\times\bar{r}^0=0,\quad \bar{r}^0\times\bar{n}^0=\bar{k},$$

unde vectorul unitar $\bar{k}$ este perpendicular pe planul triunghiului OBE (fig. 151) și dirijat pe fața lui pozitivă, adică la fel cu vectorul $\bar{\Sigma}$. În acest fel, vom obține:

$$\bar{\Sigma}=\bar{k}\frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt},\quad \Sigma=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}. \qquad (16.35)$$

Să arătăm dece mărimea $\Sigma=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ este denumită viteză areolară. Să examinăm punctul A care se mișcă pe traiectoria (C). Presupunem că în momentele t și $t+\Delta t$, punctul mobil se găsea în punctele B respectiv C ale traiectoriei sale (fig. 152). Ducem vectorii de poziție $\overline{OB}$ și $\overline{OC}$ și vom introduce notațiile:

$$OB=r,\quad OC=r+\Delta r,$$

iar

$$OB_1=OB,\quad OC_1=OC,$$
$$B_1C=BC_1=\Delta r.$$

Dacă în momentul t, vectorul OB formează cu o direcție invariabilă Δ un unghi oarecare θ, atunci vom avea $\sphericalangle COB = \Delta\theta$. Să

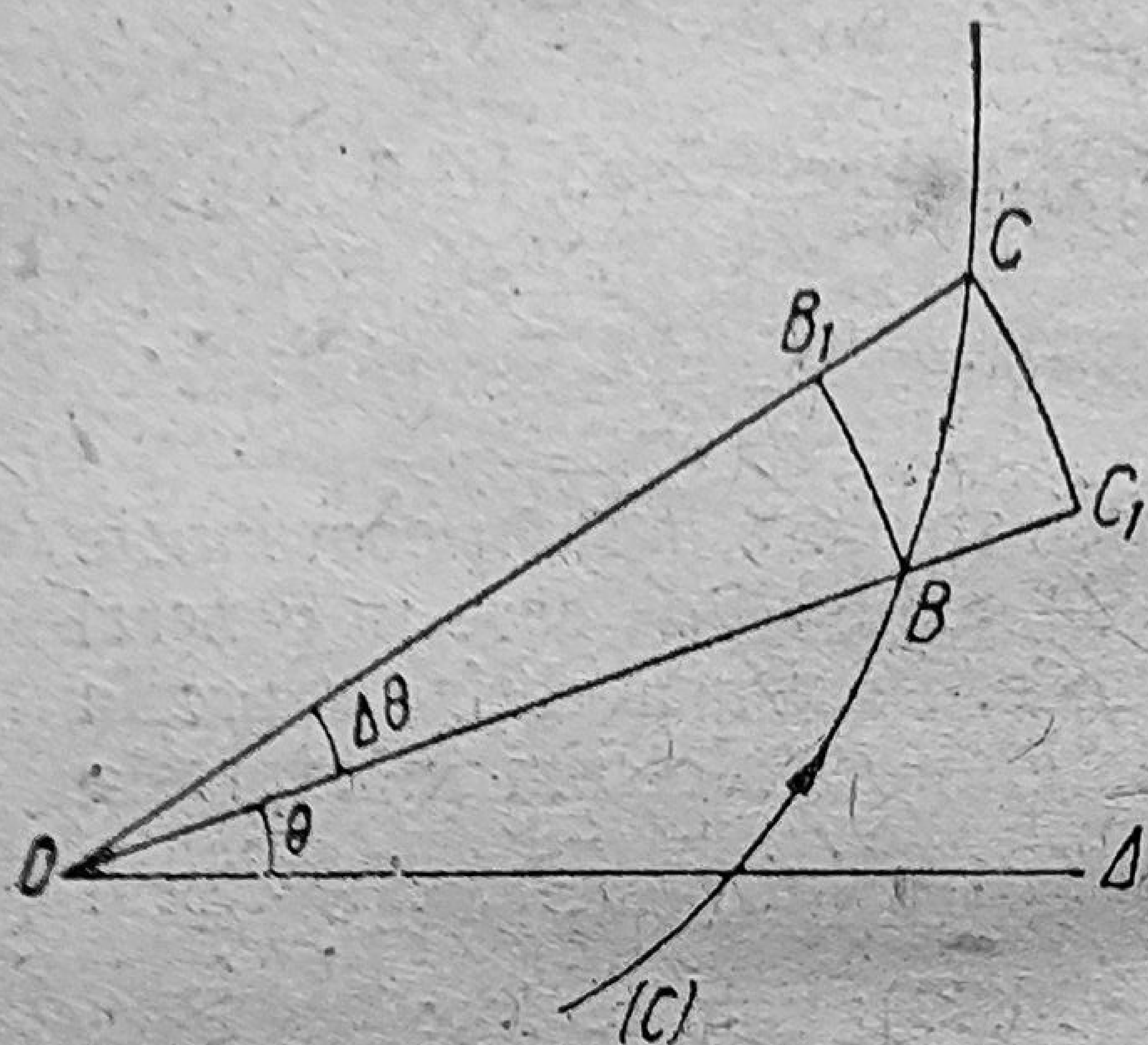


Fig. 152

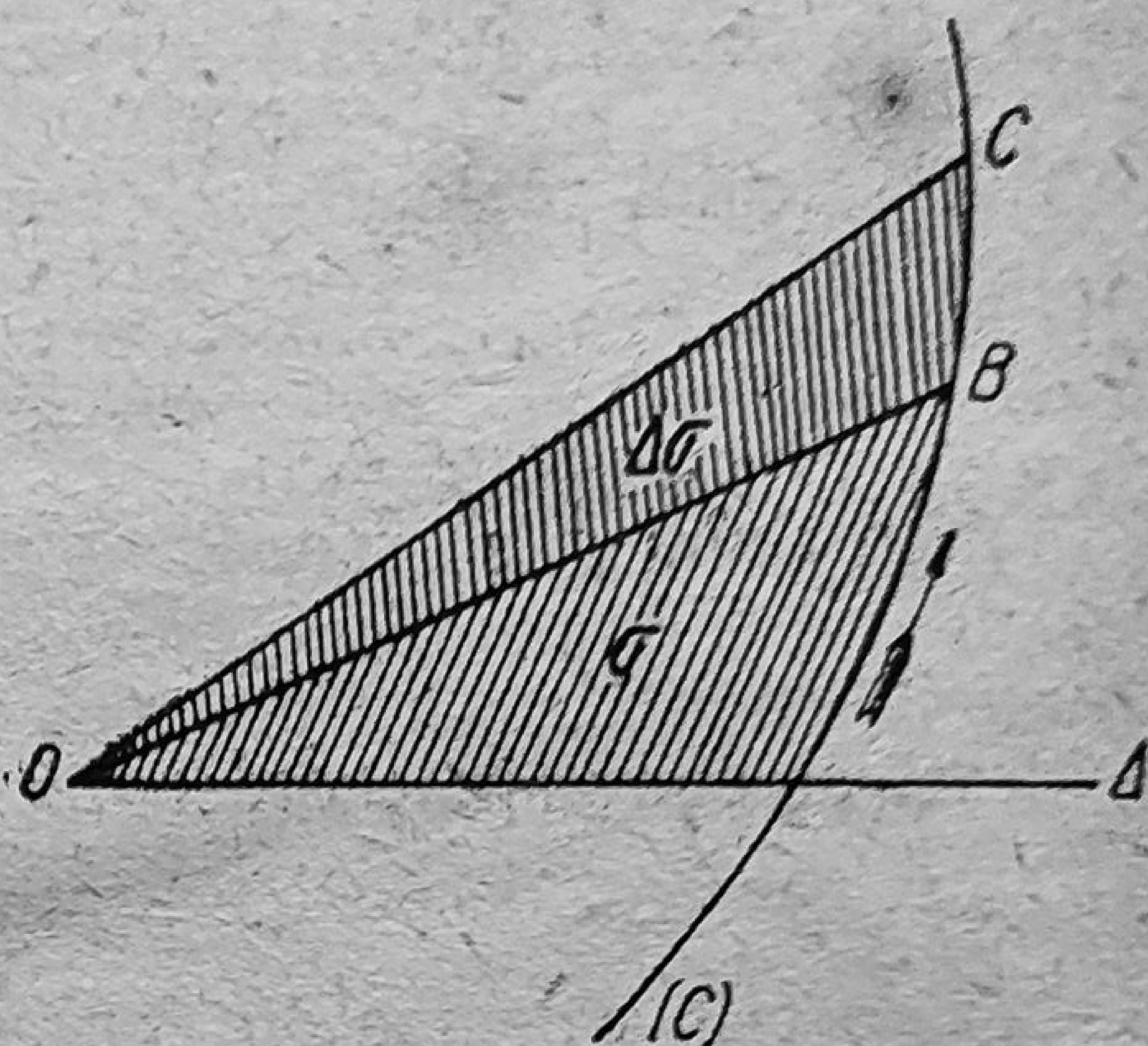


Fig. 153

determinăm aria $\Delta\sigma$ a sectorului OBC, limitat de arcul $\widehat{BC}$ al traiectoriei punctului A și de razele OB și OC și ariile sectoarelor de cerc OBB_1 și OC_1C. Din fig. 152 se vede că avem:

$$\text{aria } OC_1C > \Delta\sigma > \text{aria } OBB_1 .$$

Deoarece aria sectorului de cerc este egală cu jumătatea razei cercului înmulțită cu lungimea arcului, găsim:

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)(R+\Delta r)\,\Delta\Theta > \Delta\sigma > \frac{1}{2}\, rr\,\Delta\Theta,$$

sau

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\Theta > \Delta\sigma > \frac{1}{2}\, r^2\Delta\Theta.$$

Impărțind ambele părți ale acestei inegalități cu Δt, vom obține:

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} > \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} > \frac{1}{2}\, r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t};$$

de aici, trecînd la limită, vom avea:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2\frac{d\theta}{dt}. \tag{16.36}$$

Cînd punctul B se mișcă pe traiectoria sa (C), vectorul său de poziție $\overline{r}$, descrie o serie oarecare σ (fig. 153); este evident că acea-

stă arie σ este funcție de timpul t. Din formula (16.36) rezultă că derivata în raport cu timpul a ariei sectorului descris de vectorul $\overline{r}$ este egală cu $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$, adică este egală cu modulul vitezei areolare. De aici tragem concluzia că:

$$\Sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt},$$

adică *modulul vitezei areolare este egal cu derivata în raport cu timpul a suprafeței descrisă de vectorul de poziție al punctului.* Astfel, se înțelege dece produsului vectorial $\overline{\Sigma} = \frac{1}{2} \overline{r} \times \overline{v}$ i s-a dat denumirea de viteză areolară.

Să dăm acum expresia vitezei areolare în coordonate ortogonale, a căror origine se va lua în punctul O; partea pozitivă a axei Ox o vom dirija în lungul semidreptei Δ, iar axa Oy, perpendicular pe semidreapta Δ, în planul traiectoriei (C).

Conform § 11 din capitolul II avem:

$$\frac{1}{2} \overline{r} \times \overline{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix}.$$

Deoarece mișcarea punctului are loc în planul Oxy, atunci $z = \frac{dz}{dt} = 0$, și obținem:

$$\overline{\Sigma} = \frac{1}{2} \overline{r} \times \overline{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & 0 \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & 0 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd acest determinant după regula arătată în § 11, vom avea:

$$\overline{\Sigma} = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \overline{k}, \quad \Sigma = \frac{1}{2} \left(x - y \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right). \qquad (16.37)$$

Formulele (16.37) sînt echivalente cu formulele (16.35). Pentru a ne convinge de aceasta, ne folosim de formulele (16.22); din ele găsim:

$$x=r\cos\Theta\quad\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\Theta-r\sin\Theta\frac{d\Theta}{dt};$$

$$y=r\sin\Theta\quad\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\Theta-r\cos\Theta\frac{d\Theta}{dt}$$

De aici vom avea:

$$\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\frac{r\cos\Theta}{2}\left(\frac{dr}{dt}\sin\Theta+r\cos\Theta\frac{d\Theta}{dt}\right)-$$

$$-\frac{r\sin\Theta}{2}\left(\frac{dr}{dt}\cos\Theta-r\sin\Theta\frac{d\Theta}{dt}\right)=\frac{1}{2}r^2\frac{d\Theta}{dt}$$

Noțiunea de viteză areolară, a fost introdusă pentru prima dată de Kepler (1571—1630) în legea a doua despre mișcarea planetelor în jurul soarelui:

Razele vectoare ale planetelor descriu arii egale în timpuri egale.

Din această lege rezultă că viteza areolară a unei planete trebuie să fie constantă. În adevăr, din legea lui Kepler rezultă că suprafața σ a sectorului crește proporțional cu timpul, adică

$$\sigma=\text{const}\cdot t;$$

de aici găsim că:

$$\frac{d\sigma}{dt}=\text{const}.$$

Ca urmare a legii constanței vitezei areolare a unei planete, planeta trebuie să se miște mai repede în periheliu, — partea elipsei mai apropiată de focarul în care se găsește soarele decît în afeliu, — partea elipsei mai îndepărtată de soare. În fig. 154 se presupune că soarele se găsește în focarul F; pentru ca suprafețele sectoarelor AFB și CFD să fie egale între ele, este necesar ca arcul AB să fie mai mare decît arcul CD, adică planeta în periheliu trebuie să parcurgă, în același timp, un drum mai lung decît în afeliu. Pămîntul nostru se găsește în periheliu, iarna, în jurul lui 1 ianuarie: prin urmare iarna, pămîntul se învîrtește în

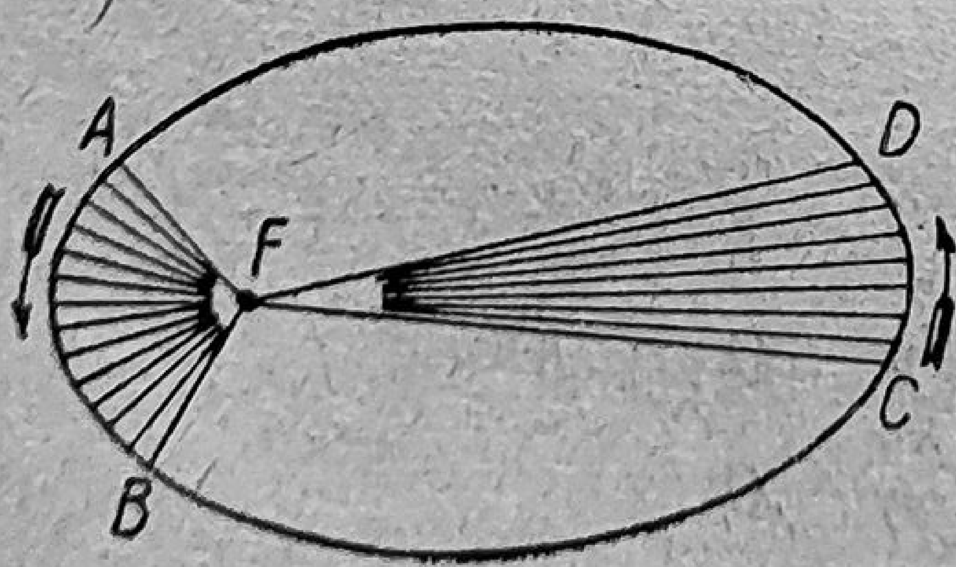


Fig. 154

jurul soarelui ceva mai repede decît vara, dar diferența de viteze este neinsemnată din cauza excentricității mici a orbitei pămîntului.

§ 69. Exemple. 42. Să se construiască, folosind formula (16.19) graficul mișcării unui tren și să se găsească viteza trenului exprimată în km/h. Să presupunem că la construcția graficului formulei $S=f(t)$, vom măsura pe axa absciselor timpul t în ore, iar pe axa ordonatelor, drumul S în kilometri, reprezentînd atît ora cît și kilometrul prin aceeași unitate de lungime; cum într-o oră trenul parcurge circa 50 km, am obține un grafic prea îngust și prea înalt. Pentru ca lățimea și înălțimea graficului să fie apropiate una de alta, vom reprezenta prin aceeași unitate de lungime pe axa absciselor o oră, iar pe axa ordonatelor 50 km; prin aceasta formăm un nou grafic $S'=f_1\ (t)$, unde $S=50\ \ S'$. Deoarece viteza este egală cu derivata $\frac{dS}{dt}$, atunci $\frac{dS}{dt}=50\frac{dS'}{dt}$. Fie punctul O care corespunde cu amiaza și cu prima stație. Din graficul de pe fig. 155 se vede că trenul a părăsit prima stație în momentul t_1; în momentul t_2, el a ajuns într-o stație care se găsește la distanța $S_2=50\ S_2'$ km de prima stație, și a stat în acea stație pînă în momentul t_3; în momentul t_3, el a plecat din acea stație și în momentul t_4, a ajuns în stația următoare căreia îi corespunde $S_4=50\ S_4'$ etc. Deoarece

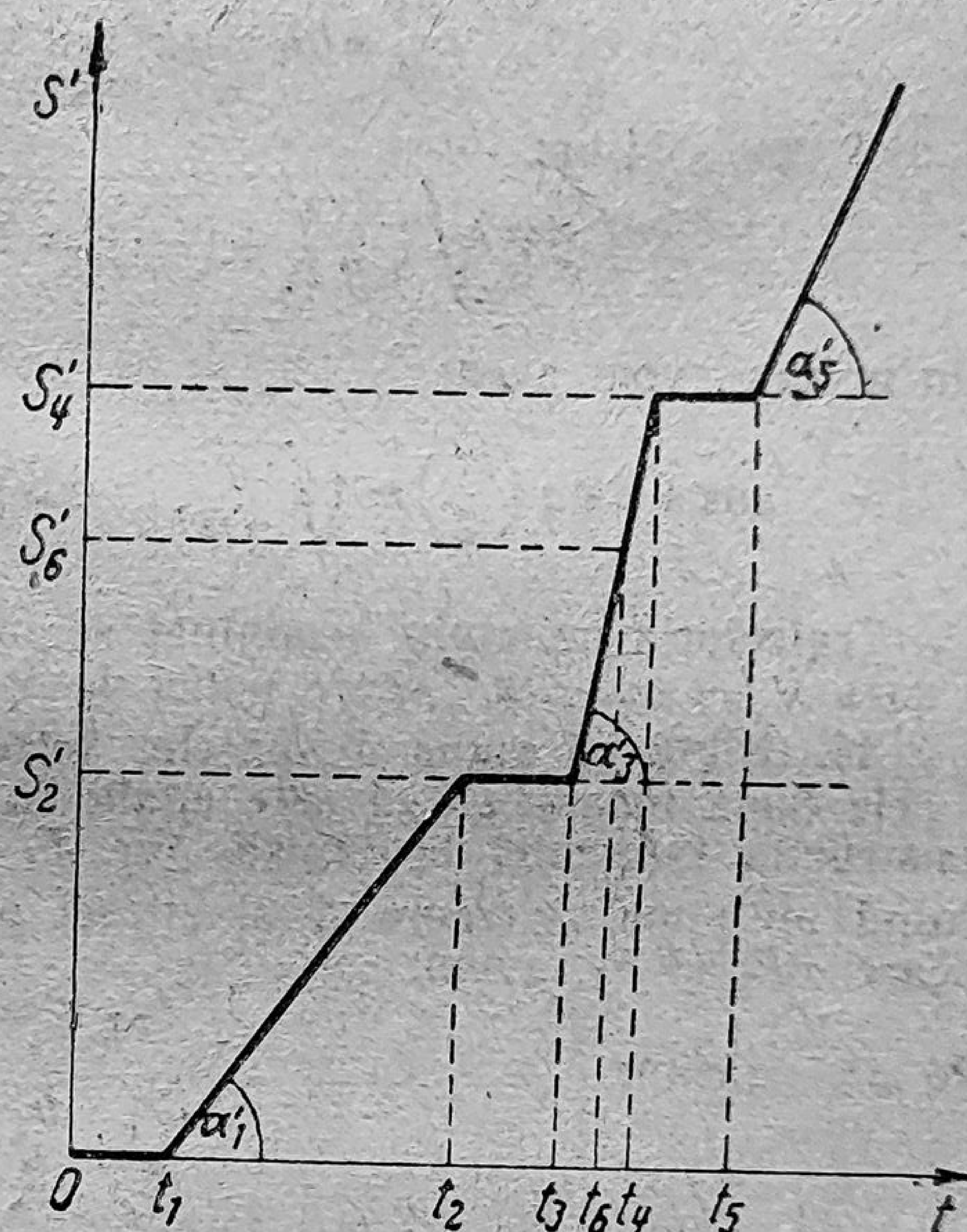


Fig. 155

viteza este egală cu derivata $\frac{dS}{dt}$ și cum din grafic rezultă $\frac{dS'}{dt}=\operatorname{tg}\alpha_1'$ pentru $t=t_1$ și $\frac{dS'}{dt}=\operatorname{tg}\alpha_3'$ pentru $t=t_3$, atunci în sectorul $(O,\ S_2)$ trenul a mers cu viteza de 50 tg α_1' km/h, iar în sectorul $(S_2,\ S_4)$ trenul a mers cu viteza de 50 tg α_3' km/h, mai mare decît viteza precedentă, deoarece $\alpha_3'>\alpha_1'$. Fără a măsura unghiurile α_1' și α_3' putem calcula tg α_1' și tg α_3 direct din grafic. Vom avea:

$$\operatorname{tg}\alpha_1'=\frac{S_2'}{t_2-t_1},\quad \operatorname{tg}\alpha_3'=\frac{S_4'-S_2'}{t_4-t_3}\ \text{etc.}$$

Cu ajutorul graficului se poate determina poziția trenului într-un moment oarecare, rezolvîndu-se problema inversă; astfel, de exemplu, vedem că momentului t_6 îi corespunde drumul parcurs $S=50\ S_6'$ km.

43. Să se determine viteza unui punct a cărui mişcare este dată prin ecuaţiile:

$$x=R\,(kt-\sin kt),$$

$$y=R\,(1-\cos kt)$$

Avem

$$\frac{dx}{dt}=kR\,(1-\cos kt)=ky$$

$$\frac{dy}{dt}=kR\sin kt=k\sqrt{R^2-(R-y)^2}$$

De aici vom obţine:

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2kR\frac{kt}{2}=k\sqrt{2Ry}.$$

Prin urmare, vom avea:

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{kt}{2}\right)=\sqrt{\frac{y}{2R}},\qquad \cos\beta=\cos\left(\frac{kt}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{y}{2R}}.$$

Traiectoria punctului examinat se numeşte *cicloidă;* dacă rotim un cerc cu raza R pe axa Ox, fiecare punct de pe circumferinţă va descrie o cicloidă.

44. Ştiind că suma distanţelor între un punct oarecare al unei elipse şi cele două focare ale ei este egală cu axa mare, să se deducă cinematic construcţia tangentei la elipsă. Fie F_1 şi F_2, focarele elipsei (fig. 156). Unind un punct oarecare A al elipsei prin vectorii $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ cu originile în focarele F_1 şi F_2, avem:

$$r_1+r_2=2a.$$

De aici găsim:

$$\frac{dr_1}{dt}+\frac{dr_2}{dt}=0$$

adică după formulele (16.30) vom avea:

$$v_{r_1}+v_{r_2}=0.$$

Din această formulă rezultă că proiecţiile vitezei punctului, în timpul mişcării lui pe elipsă, pe vectorii $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$, sînt egale între ele ca mărime, dar opuse ca semn. Astfel, dacă proiecţia v_{r_1} a vitezei va fi pozitivă, adică dirijată dinspre focar, proiecţia v_{r_2} va fi negativă, adică dirijată înspre focar, iar ca mărime, aceste două proiecţii, trebuie să fie egale între ele (fig. 156).

Pentru a găsi viteza $\bar{v}$, trebuie să se construiască două triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza comună; la fiecare din aceste triunghiuri, una dintre catete este egală cu valoarea absolută a proiecţiei considerate a vitezei, după cum se arată în fig. 156. Atunci viteza va fi reprezentată prin această ipotenuză comună şi ca urmare a egalităţii acestor triunghiuri dreptunghice construite, această viteză va împărţi unghiul din A în două unghiuri egale. De aici rezultă că tangenta într-un punct la elipsă este bisectoarea exterioară a unghiului format de dreptele ce unesc acel punct cu focarele elipsei.

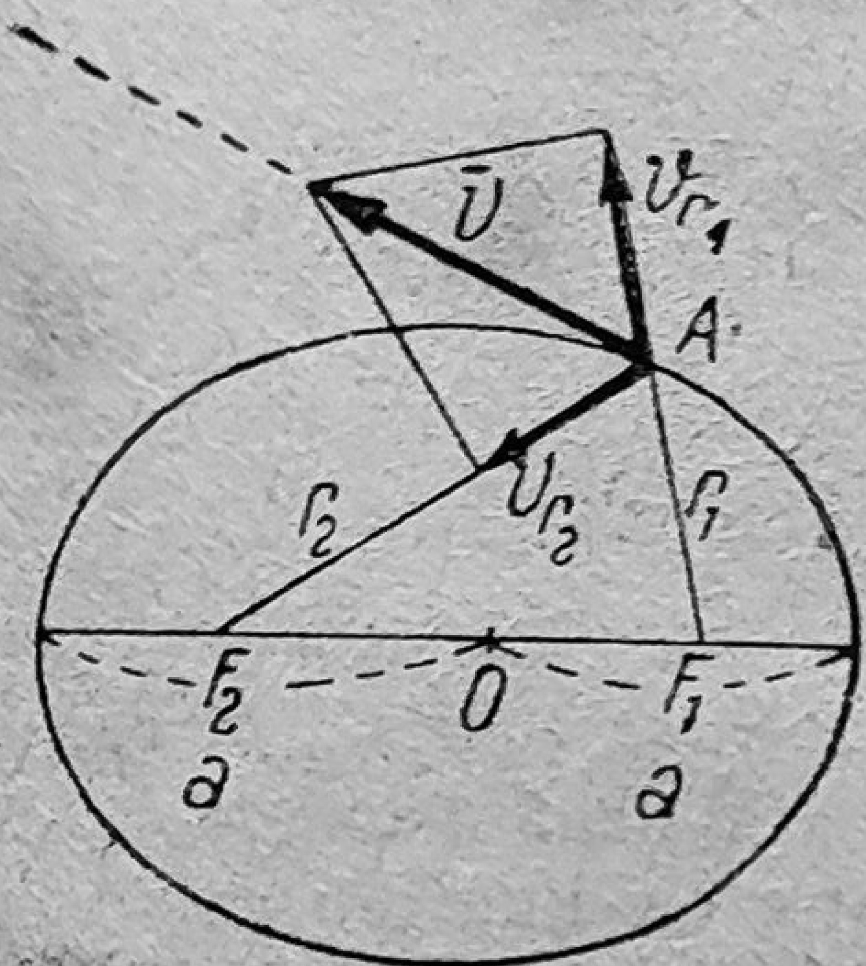


Fig. 156

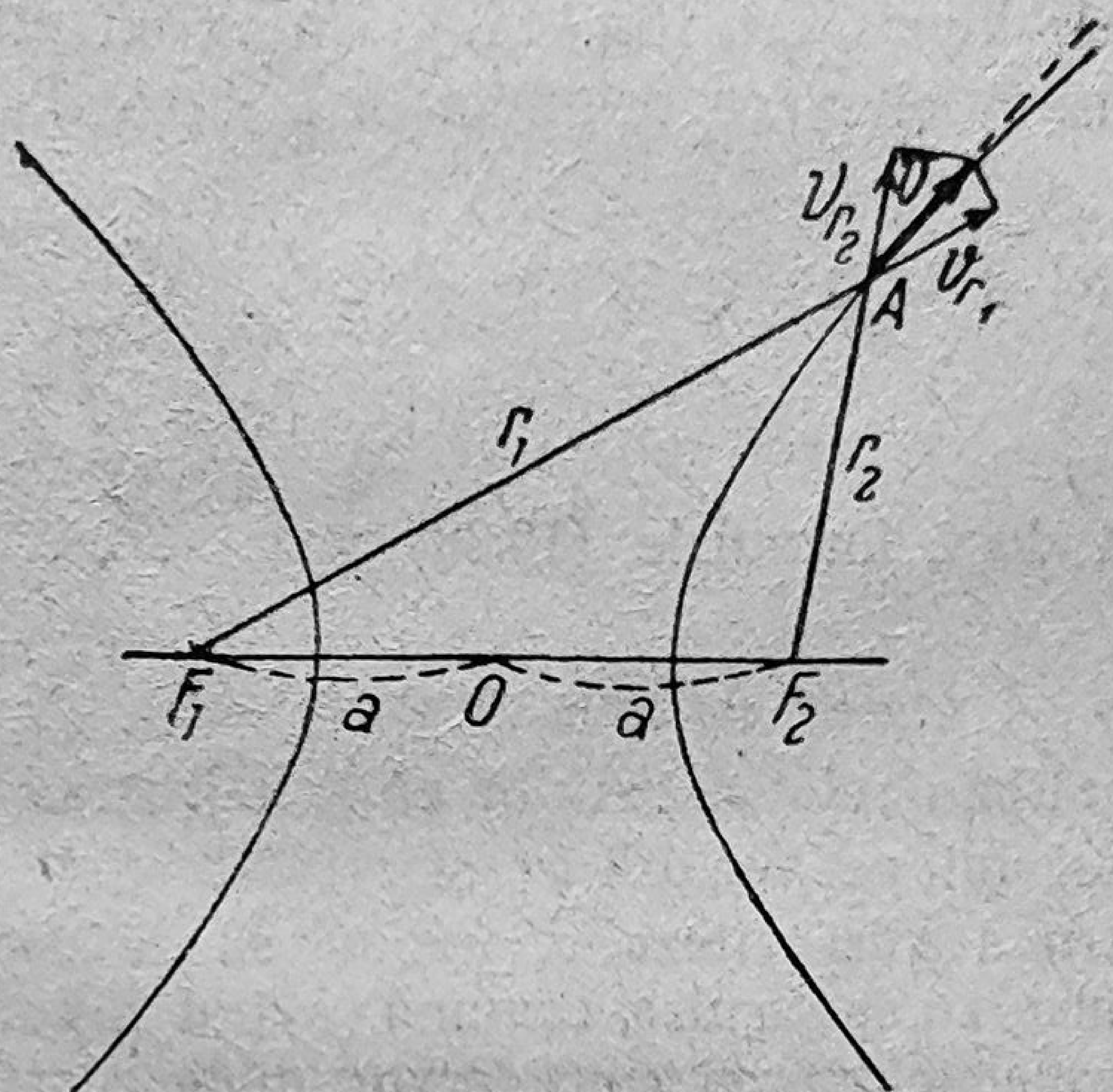


Fig. 157

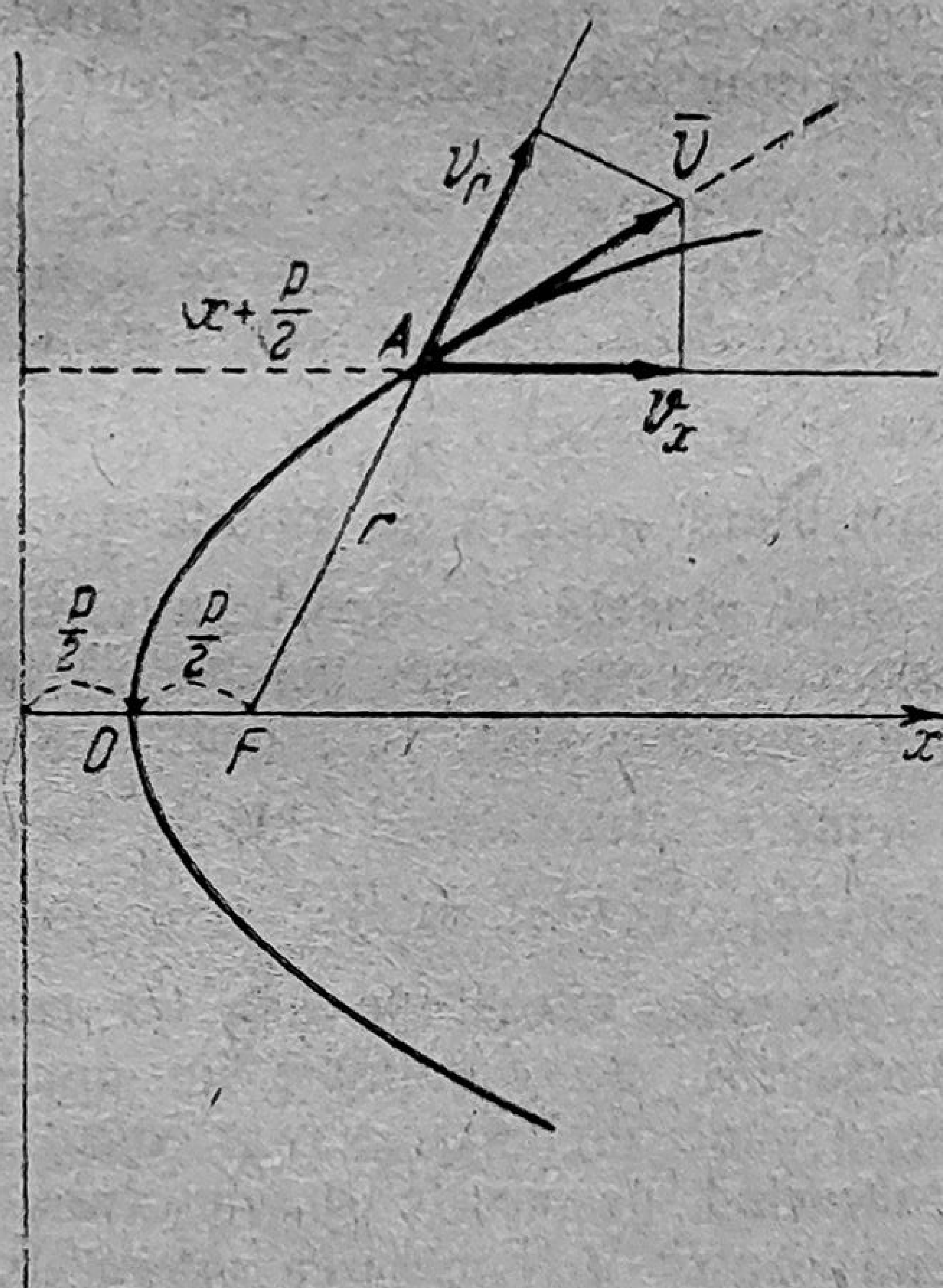


Fig. 158

45. Ştiind că diferenţa dintre distanţele de la un punct oarecare al unei hiperbole la cele două focare ale ei este egală cu lungimea axei ei reale, să se deducă cinematic, construcţia tangentei la hiperbolă. Fie F_1 şi F_2 focarele hiperbolei (fig. 157). Unind un punct oarecare A al hiperbolei prin vectorii $\overline{r_1}$ şi $\overline{r_2}$ cu originile în focarele F_1 şi F_2, avem:

$$r_1 - r_2 = 2a$$

De aici găsim:

$$\frac{dr_1}{dt} - \frac{dr_2}{dt} = 0$$

adică după formulele (16.30) vom avea:

$$v_{r_1} = v_{r_2}.$$

Din ultima relaţie, rezultă că la mişcarea punctului pe hiperbolă, proiecţiile vitezei lui pe vectorii $\overline{r_1}$ şi $\overline{r_2}$ sînt egale între ele ca mărime şi ca semn. Pentru a găsi viteza $\overline{v}$, trebuie să se construiască două triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza comună, avînd fiecare dintre ele una din catete egală cu proiecţia vitezei considerate, după cum se arată în fig. 157. Viteza va fi reprezentată atunci prin ipotenuza comună şi ca urmare a egalităţii triunghiurilor dreptunghice obţinute, această viteză va împărţi unghiul din A în două unghiuri egale. De aici rezultă că tangenta într-un punct la hiperbolă este bisectoarea unghiului format de dreptele ce unesc acel punct cu focarele hiperbolei.

46. Ştiind că distanţele de la un punct oarecare al unei parabole, pînă la directoare şi pînă la focar sînt egale, să se deducă în mod cinematic, construcţia tangentei la parabolă. Dacă p este parametrul parabolei, atunci focarul se află pe axa ei la distanţa $\frac{p}{2}$ de vîrf, iar directoarea parabolei este o dreaptă perpendiculară pe axă şi situată la distanţa $\frac{p}{2}$ de vîrful parabolei, directoarea fiind plasată în raport cu vîrful parabolei în partea opusă focarului. Alegînd originea coordonatelor O în vîrful parabolei şi axa Ox în lungul axei parabolei (fig. 158) pentru orice punct al parabolei vom avea: $x + \frac{p}{2} = r$, unde r este distanţa pînă la focar. Derivînd în raport cu timpul ambele părţi ale acestei relaţii, vom obţine: $\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}$ sau $v_x = v_r$. Prin urmare, proiecţia vitezei pe axa Ox este egală cu proiecţia vitezei pe raza vectoare FA. Să examinăm un punct oarecare A al parabolei; ducem prin acest punct prelungirea razei vectoare şi dreapta paralelă la axa absciselor. Măsurînd pe aceste drepte duse, respectiv, proiecţiile v_r şi v_x şi construind pentru determinarea vitezei $\overline{v}$, triunghiurile dreptunghice cu ipotenuza comună şi catetele v_r şi v_x, ca şi în cazul elipsei şi al hiperbolei, vom găsi că viteza va împărţi unghiul din punctul A în două unghiuri egale. De aici rezultă că tangenta la parabolă este bisectoarea unghiului format de prelungirea razei vectoare şi a dreptei duse prin punctul dat paralel la axa parabolei.

47. Să să găsească viteza pentru mişcarea (16.16) pe o spirală logaritmică. Utilizînd formulele (16.30), obţinem:

$$v_r=\frac{dr}{dt}=r_0me^{mt}=mr, \qquad v_\Theta=r\frac{d\Theta}{dt}=nr_0e^{mt}=nr.$$

De aici vom avea:

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\Theta^2}=r_0e^{mt}\sqrt{m^2+n^2}=r\sqrt{m^2+n^2}.$$

Din aceste formule vom găsi:

$$\operatorname{tg}\left(\widehat{vv_r}\right)=\frac{v_\Theta}{v_r}=\frac{n}{m},$$

adică viteza este înclinată faţă de raza-vectoare sub un unghi constant.

48. Să se găsească viteza pentru mişcarea determinată prin formulele:

$$x=a\sin kt, \quad y=b\cos kt, \quad z=h\frac{kt}{2\pi}.$$

Procedînd ca în § 64, tragem concluzia că mişcarea se efectuează după o elice care înfăşoară un cilindru eliptic, deoarece:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Avem:

$$\frac{dx}{dt}=ka\cos kt=k\frac{a}{b}\cos kt=k\frac{a}{b}y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-kb\sin kt=-k\frac{b}{a}a\sin kt=-k\frac{b}{a}x,$$

$$\frac{dz}{dt}=h\frac{k}{2\pi}.$$

De aici găsim:

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=k\sqrt{a^2\cos^2 kt+b^2\sin^2 kt+\frac{h^2}{4\pi^2}}$$

şi

$$\cos\alpha=\frac{a\cos kt}{\sqrt{a^2\cos^2 kt+b^2\sin^2 kt+\frac{h^2}{4\pi^2}}}$$

$$\cos\beta=\frac{b\sin kt}{\sqrt{a^2\cos^2 kt+b^2\sin^2 kt+\frac{h^2}{4\pi^2}}}$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{h}{2\pi}}{\sqrt{a^2\cos^2 kt+b^2\sin^2 kt+\frac{h^2}{4\pi^2}}}$$

Eliminînd timpul t, vom obține:

$$v=k\sqrt{a^2\frac{y^2}{b^2}+b^2\frac{x^2}{a^2}+\frac{h^2}{4\pi^2}}.$$

Deoarece $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$, această formulă se mai poate scrie:

$$v=k\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}-x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}$$

Din geometria analitică se știe că $a^2-b^2=c^2$, unde c este distanța de la centrul elipsei pînă la focarul ei și că $\frac{c}{a}=e$, unde e este excentricitatea elipsei. De aceea vom obține:

$$v=k\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}-e^2x^2}.$$

De aici vom avea:

$$\cos\gamma=\frac{v_z}{v}=\frac{\frac{h}{2\pi}}{\sqrt{a^2+\frac{h^2}{2\pi^2}-e^2x^2}}.$$

Pentru $e=0$, cilindrul eliptic va deveni circular și vom obține rezultatele găsite la § 67.

49. Se presupune că un punct se mișcă într-un plan cu viteza areolară constantă în raport cu polul O — un punct oarecare fix al acelui plan — și că pătratul vitezei punctului este egal cu $\frac{n^2}{r^2}$ unde n este o constantă oarecare, iar r este raza-vectoare dusă în punctul mobil din polul O. Să se determine raza vectoare r în funcție de timpul t, dacă se știe că pentru $t=0$ avem $r=0$. Deoarece viteza areolară este constantă, trebuie să avem:

$$r^2\frac{d\Theta}{dt}=C,$$

unde C este constantă. Din formula (16.31) avem:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2;$$

dar deoarece

$$\frac{d\Theta}{dt}=\frac{C}{r^2}$$

vom obține:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{C^2}{r^2}.$$

Deoarece după condiţiile problemei trebuie să avem $v^2=\frac{n^2}{r^2}$, găsim:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{C^2}{r^2}=\frac{n^2}{r^2},$$

de unde rezultă că trebuie să avem $n^2>C^2$.

De aici deducem:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{n^2-C^2}{r^2}=\frac{k^2}{r^2}.$$

Extrăgînd rădăcina pătrată, vom avea:

$$\frac{dr}{dt}=\pm\frac{k}{r},$$

sau

$$rdr=\pm kdt,$$

adică

$$d\left(\frac{r^2}{2}\right)=d\,(\pm kt).$$

Dacă diferenţialele sînt egale între ele, atunci funcţiile trebuie să difere cu o constantă, şi anume:

$$\frac{r^2}{2}=\pm kt+\text{const.}$$

Deoarece pentru $t=0$ trebuie să avem $r=0$, tragem concluzia că const=0 şi dintre cele două semne trebuie luat semnul plus. In acest fel, vom obţine:

$$\frac{r^2}{2}=kt,$$

sau

$$r=\sqrt{2kt}.$$

CAPITOLUL XVII

ACCELERAȚIA UNUI PUNCT

§ 70. Determinarea accelerației unui punct. Dacă un punct material are o mișcare rectilinie și uniformă, atunci în toate punctele traiectoriei lui caracterul mișcării va fi același, direcția și sensul de mișcare și viteza rămîn constante; prin urmare, la acest fel de mișcare nu poate exista nici un fel de variație a mișcării. Pentru ca mișcarea să varieze, viteza punctului trebuie să se modifice în decursul timpului. Variația vectorului viteză se poate produce astfel încît direcția și sensul vitezei să rămînă invariabile dar să se modifice numai modulul vectorului viteză, modulul vectorului viteză să rămînă invariabil dar să se schimbe numai direcția vitezei sau, în sfîrșit, în așa fel încît să varieze deodată și modulul și direcția vectorului viteză. Pentru a se reprezenta variația vectorului viteză al punctului, se folosește următoarea construcție. Fie (C) traiectoria punctului A; construim în toate punctele acestei traiectorii, vectorii viteză $\overline{v}$ ai punctului A. Luăm un punct oarecare O arbitrar în spațiu și mutăm în el, paralel cu ei înșiși, toți vectorii vitezei $\overline{v}$ ai punctului A; locul geometric al extremităților vectorilor $\overline{v}$, va fi o curbă, care se numește *hodograful* vitezelor. Deoarece conform construcției, vectorii de poziție ai punctelor hodografului sînt vectorii viteză ai punctului A, urmează că, pe hodograf nu numai că se poate vedea, dar se pot măsura variația direcției și modulului vectorului viteză al punctului A. Să raportăm mișcarea punctului A la sistemul ortogonal de axe de coordonate $Oxyz$; fie

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t)$$

ecuațiile traiectoriei punctului A în coordonate parametrice. Să examinăm sistemul ortogonal de axe de coordonate $O'XYZ$, paralele cu axele $Oxyz$. Nu este greu de dovedit cum se pot alcătui ecuațiile hodografului în raport cu axele $O'XYZ$. Deoarece axele $O'XYZ$ sînt paralele la axele $Oxyz$ și vectorii de poziție ai punctelor hodografului sînt vectorii viteză ai punctului A, atunci coor-

donatele (X, Y, Z) ale punctelor hodografului, trebuie să fie egale cu proiecțiile $v_x=\frac{dx}{dt}$, $v_y=\frac{dy}{dt}$, $v_z=\frac{dz}{dt}$, ale vitezei $\overline{v}$ pe axele $Oxyz$, adică vom avea:

$$X=f_1'(t), \quad Y=f_2'(t), \quad Z=f_3'(t). \tag{17.1}$$

Ca să obținem de aici ecuația hodografului în formă analitică, este suficient să eliminăm timpul din ecuațiile (17.1). De exemplu, dacă mișcarea punctului ni se dă prin ecuațiile

$$x=a\sin kt, \quad y=b\cos kt,$$

vom obține:

$$X=+ka\cos kt, \quad Y=-kb\sin kt.$$

De aici vom avea:

$$\frac{X}{ka}=\cos kt, \quad \frac{Y}{kb}=-\sin kt,$$

sau

$$\frac{X^2}{k^2a^2}+\frac{Y^2}{k^2n^2}=1.$$

Vedem că hodograful este o elipsă asemenea elipsei pe care se mișcă punctul A, iar raportul dintre semiaxele hodrografului și semiaxele traiectoriei punctului A este egal cu k. Este evident că pentru mișcarea rectilinie uniformă, hodograful se reduce la un punct, iar pentru mișcarea rectilinie neuniformă, hodograful va fi un segment de dreaptă.

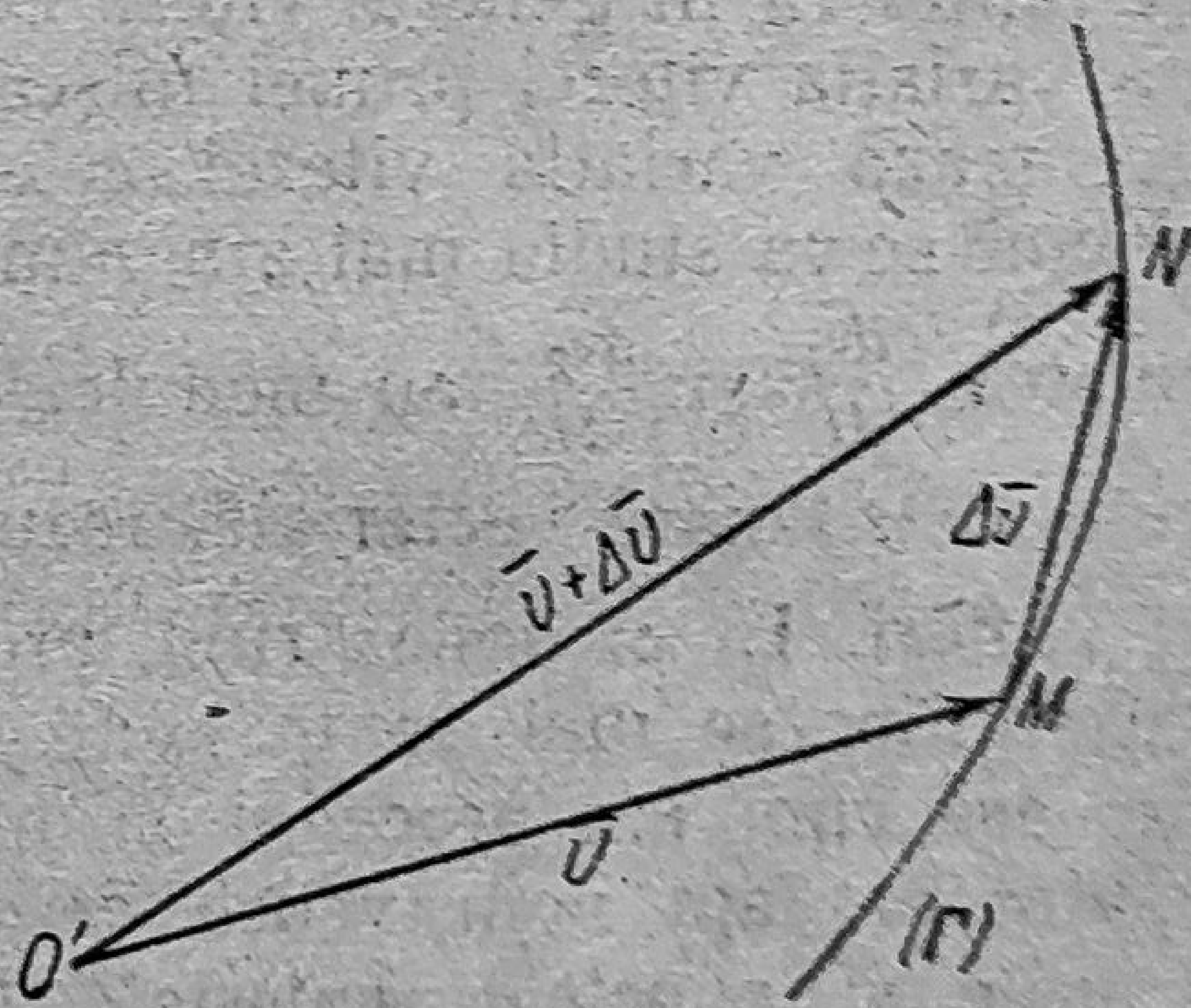


Fig. 159

Fie (Γ) hodograful vitezei punctului A (fig. 159); presupunem că momentului t îi corespunde vectorul $\overline{OM}$ care reprezintă vectorul viteză $\overline{v}$ al punctului A, iar la momentul $t+\Delta t$ îi corespunde vectorul $\overline{ON}$, care reprezintă vectorul viteză $\overline{v}+\Delta\overline{v}$. Atunci $\Delta\overline{v}=\overline{MN}$, și raportul $\frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}$ va reprezenta viteza medie a punctului pe hodograf, care se numește *accelerație medie* a punctului A.

Trecînd la limită, vom obține viteza punctului pe hodograf în momentul t, care măsoară modul cum variază vectorul viteză al punctului A și este egală cu prima derivată vectorială $\frac{d\overline{v}}{dt}$ a vectorului viteză al punctului A în raport cu timpul. *Viteza în momentul t a unui punct de pe hodograful vitezelor se numește accelerația punctului A în momentul t.* Deoarece *accelerația este prima derivată vectorială a vectorului viteză* $\overline{v}$, rezultă în baza § 65, că accelerația este un vector; acest ultim rezultat trebuie verificat. În primul rînd în § 66 a fost dedusă formula (16.23), și anume, $\overline{v}=\overline{v}_1+\overline{v}_2$, care arată că viteza mișcării compuse este suma vectorială a vitezelor mișcărilor componente. Derivînd geometric ambele părți ale acestei egalități, în raport cu timpul vom obține: $\frac{d\overline{v}}{dt}=\frac{d\overline{v}_1}{dt}+\frac{d\overline{v}_2}{dt}$. În această egalitate $\frac{d\overline{v}}{dt}$ este accelerația în mișcarea compusă. În ce privește derivatele $\frac{d\overline{v}_1}{dt}$ și $\frac{d\overline{v}_2}{dt}$, ele reprezintă accelerația în prima mișcare componentă și accelerația în a doua mișcare componentă, dar aceste din urmă accelerații depind în general nu numai de proprietățile primei mișcări în ipoteza că numai ea ar avea loc sau numai de proprietățile mișcării a doua, ci de faptul că în general viteza celei de-a doua mișcări influențează variația vitezei primei mișcări, și că viteza primei mișcări influențează variația vitezei celei de-a doua mișcări; această problemă se va studia mai amănunțit în capitolul XXIII. Deoarece derivatele $\frac{d\overline{v}_1}{dt}$ și $\frac{d\overline{v}_2}{dt}$ au module, direcție și sens și li se aplică regula de adunare vectorială, rezultă că accelerațiile $\frac{d\overline{v}_1}{dt}$ și $\frac{d\overline{v}_2}{dt}$ sînt vectori. În al doilea rînd, problema referitoare la adunarea accelerațiilor se mai poate pune și altfel, din punct de vedere fizic, așa cum am procedat și în cazul vitezei. În vol. II al cursului de față vom vedea că interacțiunea mecanică dintre corpurile și punctele materiale libere se reduce la faptul că aceste corpuri și puncte materiale imprimă unul altuia o accelerație. Fie punctul material liber A; sub acțiunea punctului material B, punctul A capătă o accelerație oarecare. Vom presupune apoi că punctul B nu ar acționa asupra punctului A, asupra căruia ar acționa însă un alt punct material C care îi imprimă o altă accelerație oarecare. Se poate pune întrebarea, ce accelerație va avea punctul A, dacă cele două puncte B și C acționează concomitent. Această problemă nu poate fi rezolvată matematic,

dar pe calea studierii fenomenelor naturale s-a găsit că prin acțiunea concomitentă a punctelor materiale B și C, punctul material A va căpăta o accelerație egală cu suma vectorială a accelerațiilor imprimate de celelalte puncte. Astfel, examinînd problema din punct de vedere matematic și fizic, găsim că accelerațiile punctului se adună vectorial și în același timp ele au module, direcții și sensuri. *Prin urmare, accelerația punctului este un vector.* Vectorul accelerației al punctului este aplicat acestui punct. Notînd vectorul accelerației al punctului prin $\bar{a}$ avem:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt} \tag{17.2}$$

În cuvinte, formula (17.2) se poate exprima astfel:

Vectorul accelerație al unui punct este prima derivată vectorială în raport cu timpul, a vectorului viteză al acestui punct.

La fel ca viteza, și vectorul accelerație se poate reprezenta convențional printr-un segment de dreaptă orientat, care are o lungime egală cu modulul accelerației, unitatea de accelerație fiind exprimată la o scară oarecare, printr-o anumită unitate de lungime.

Folosind formula (16.24) obținem din formula (17.2):

$$\bar{a}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \tag{17.3}$$

Această formulă se poate exprima în felul următor:

Vectorul accelerație al unui punct este egal cu derivata de ordinul doi în raport cu timpul, a vectorului de poziție al acestui punct.

Folosind raționamente similare, s-ar putea obține accelerații de ordin superior, exprimate prin derivatele $\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}$, $\frac{d^4\bar{r}}{dt^4}$, . . . În cursul de mecanică al acad. O. I. Somov (1815—1876) sînt expuse cercetările acestuia asupra accelerațiilor de diferite ordine, iar în „Notele Academiei de Științe“ din anul 1865 se găsește articolul său „Despre accelerația de diferite ordine în mișcarea relativă“. Toate aceste studii au importanță în cinematica mecanismelor.

Legile naturii sînt însă astfel, încît este de prisos să ne ocupăm în cursul general de mecanică teoretică cu accelerațiile de ordine superioare accelerației $\bar{a}$, deoarece acțiunea reciprocă a

corpurilor materiale, adică forțele, dau naștere accelerației $\bar{a}$, și invers, cunoscînd accelerațiile $\bar{a}$, se pot găsi forțele ce provoacă aceste accelerații. Aplicînd formula de dezvoltare în serie a lui Taylor, vom avea:

$$\bar{r}(t+\Delta t)=\bar{r}(t)+\frac{d\bar{r}(t)}{dt}\Delta t+\frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2}\Delta t^2+\cdots;$$

de aici, ținînd seamă de formulele (16.24) și (17.3), obținem:

$$\bar{r}(t+\Delta t)=\bar{r}(t)+\bar{v}(t)\Delta t+\frac{1}{1\cdot 2}\bar{a}(t)\Delta t^2+\cdots$$

Din această formulă, cunoscînd valoarea vectorilor $\bar{r}$, $\bar{v}$, și $\bar{a}$ pentru momentul t, se poate găsi cu precizie pînă la infiniți mici de ordinul doi inclusiv, valoarea vectorului de poziție r pentru momentul $t+\Delta t$.

§ 71. Accelerația unui punct în coordonate ortogonale și în coordonate polare în plan. Pornind de la formula (17.3), nu este greu să se obțină proiecțiile accelerației a pe axele fixe ale unui sistem ortogonal de axe de coordonate. Deoarece

$$\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z,$$

din formulele (16.21), și (17.3) vom obține:

$$\bar{a}=\bar{i}\frac{d^2x}{dt^2}+\bar{j}\frac{d^2y}{dt^2}+\bar{k}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Introducînd proiecțiile a_x, a_y, a_z ale accelerației $\bar{a}$ pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz, vom avea:

$$\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z=\bar{i}\frac{d^2x}{dt^2}+\bar{j}\frac{d^2y}{dt^2}+\bar{k}\frac{d^2z}{dt^2},$$

adică:

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{17.4}$$

Astfel, *proiecția accelerației pe oricare din axele de coordonate ortogonale fixe, este egală cu derivata a doua, în raport cu timpul, a coordonatei corespunzătoare a punctului mobil.*

Din formulele (17.4) rezultă că modulul a al accelerației, este

$$a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt}\right)^2} \tag{17.5}$$

unde radicalul va fi luat în valoare absolută. Vom nota prin α', β', γ' unghiurile formate de vectorul accelerației al punctului cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz; știm că trebuie să avem:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha' &= \frac{a_x}{a} = \frac{1}{a}\frac{d^2x}{dt^2}, \\ \cos\beta' &= \frac{a_y}{a} = \frac{1}{a}\frac{d^2y}{dt^2}, \\ \cos\gamma' &= \frac{a_z}{a} = \frac{1}{a}\frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

unde mărimea a este determinată prin formula (17.5). Deoarece coordonatele x, y, z ale punctului sînt date prin formulele (16.2) sau (16.3), atunci pentru mărimile a_x, a_y; a_z, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ obținem expresiile (17.4) și (17.6) în funcție de timpul t. Folosindu-ne de formulele (16.2) sau (16.3), se poate elimina timpul t din aceste expresii, reprezentîndu-le ca funcții de coordonatele punctului. Astfel, putem rezolva problemele în două feluri: sau să găsim mărimile a_x, a_y, a_z, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, pentru un moment dat, sau să le găsim pentru un punct dat al traiectoriei. Să examinăm, de exemplu, o mișcare uniform accelerată care se produce sub acțiunea greutății după legea $x=\frac{gt^2}{2}$, unde g este accelerația gravitației la căderea liberă; vom obține pentru proiecțiile accelerației pe axa Ox valoarea:

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=g,$$

adică ajungem la confirmarea faptului că în formula $x=\frac{gt^2}{2}$ mărimea g este în adevăr o accelerație. Este evident că în acest caz accelerația coincide cu proiecția sa. Pentru mișcarea pe circumferința unui cerc determinată prin ecuațiile

$$x=R\cos kt, \quad y=R\sin kt,$$

vom avea succesiv:

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2R\cos kt=-k^2x,$$

$$a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2R\sin kt=-k^2y,$$

$$a=\sqrt{k^4R^2\cos^2kt+k^4R^2\sin^2kt}=\sqrt{k^4x^2+k^4y^2}=k^2R$$

$$\cos\alpha'=-\cos kt=-\frac{x}{R}, \qquad \cos\beta'=-\sin kt=-\frac{y}{r}.$$

Vedem că în mișcarea circulară, modulul accelerației este constant, și vectorul accelerație este dirijat de-a lungul razei de la circumferință spre centrul ei.

Să găsim acum expresia accelerației în coordonate polare, pentru cazul mișcării punctului într-un plan. În acest scop, vom pleca de la formulele (17.2). Folosindu-ne de formulele (16.29), vom obține:

$$\bar{a}=\frac{d}{dt}\left(\bar{r}^0\frac{dr}{dt}\right)+\frac{d}{dt}\left(\bar{n}^0 r\frac{d\theta}{dt}\right),$$

sau

$$a=\frac{d\bar{r}^0}{dt}\frac{dr}{dt}+\bar{r}^0\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{d\bar{n}^0}{dt}r\frac{d\theta}{dt}+\bar{n}^0\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Folosind la determinarea derivatelor $\frac{d\bar{r}^0}{dt}$ și $\frac{d\bar{n}^0}{dt}$ formula (16.22), și observînd că rotirea cu un unghi drept a vectorului $\bar{n}^0$, în sensul rotirii vectorului de poziție al punctului, îl va face antiparalel cu vectorul $\bar{r}^0$, vom avea:

$$\frac{d\bar{r}^0}{dt}+\bar{n}^0\frac{d\theta}{dt},\quad \frac{d\bar{n}^0}{dt}=-\bar{r}^0\frac{d\theta}{dt}.$$

În acest fel, vom obține:

$$\bar{a}=\bar{n}^0\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\bar{r}^0\frac{d^2r}{dt^2}-\bar{r}^0 r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\bar{n}^0\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Notînd prin a_r, a_θ proiecțiile accelerației pe axele mobile de coordonate, reprezentate în fig. 150, și observînd că:

$$\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)=2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{d\theta}\right)$$

vom găsi

$$\bar{r}^0 a_r+\bar{n}^0 a_\theta=\bar{r}^0\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]+\bar{n}^0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right].$$

În acest fel, ajungem la următoarele formule:

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\quad a_\theta=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad (17.7)$$

Să presupunem că mișcarea punctului este astfel, încît viteza areolară a punctului, determinată prin formula (16.35), va fi constantă adică vom avea:

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C,$$

unde C este constant. Din a doua din formula (17.7) vedem că în acest caz trebuie să avem $a_\Theta=0$, adică acceleraţia este dirijată de-a lungul vectorului de poziţie. Deoarece avem:

$$\frac{d\Theta}{dt}=\frac{C}{r^2},$$

în acest caz vom obţine:

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{C^2}{r^3}; \qquad (17.8)$$

prin urmare, pentru mişcarea la care viteza areolară este constantă, acceleraţia este dirijată pe direcţia vectorului de poziţie al punctului şi depinde de modulul ei şi de a doua derivată a ei în raport cu timpul.

§ 72. Proiecţiile acceleraţiei unui punct pe triedrul fundamental. Lectura acestui paragraf impune cunoaşterea unor noţiuni de geometrie; cititorul care nu le posedă, va găsi indicaţiile respective în aplicaţiile de la sfîrşitul cinematicii.

Să examinăm traiectoria (C) a punctului A şi să presupunem că punctul mobil A, se găseşte în momentul t în punctul B al traiectoriei sale (fig. 160), iar mişcarea punctului A se produce în sensul indicat în fig. 160 prin săgeţi. Să ducem în punctul B tangenta $B\tau$ la traiectoria (C) în sensul mişcării punctului A,

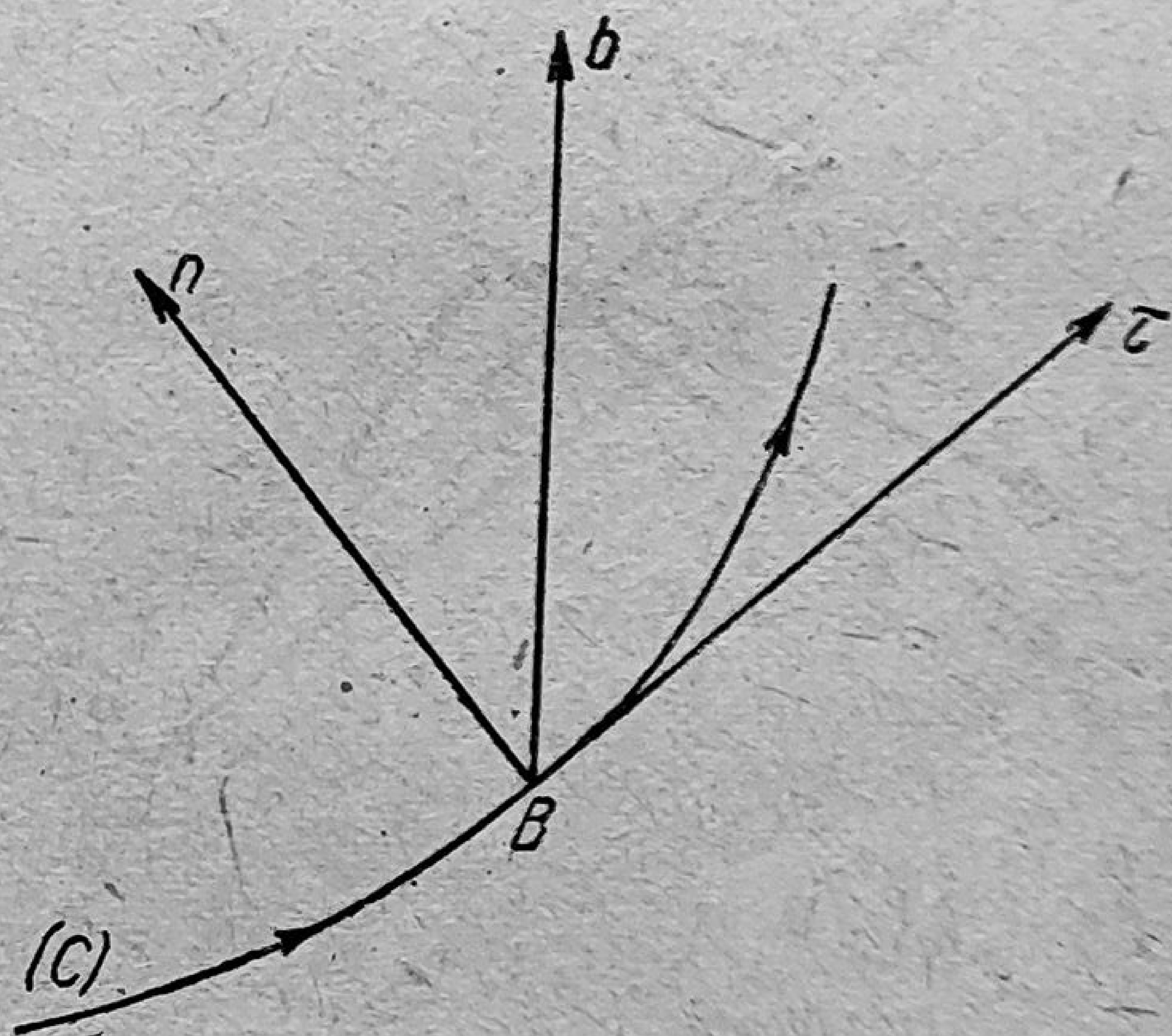


Fig. 160

şi să construim în punctul B două normale pe curba (C) normala principală dirijînd-o în sensul concavităţii curbei (C), binormala Bb, dirijînd-o astfel încît triedrul $B\tau\ nb$ obţinut prin aceasta, să fie un triedru drept la fel ca şi triedrul $Oxyz$, adică suprapunînd aceste triedre, tangenta $B\tau$ să coincidă cu axa Ox, normala Bn cu axa Oy şi binormala Bb cu axa Oz. Triedrul drept obţinut $B\tau\ nb$ numit *triedru fundamental* îl vom considera ca sistem de coordonate pe ale cărui axe vom proiecta vectorul acceleraţie $\bar{a}$ al punctului A. Acest nou sistem de axe de coordonate ortogonale,

va fi *un sistem mobil de axe,* deoarece originea lui B se deplasează o dată cu mișcarea punctului material pe traiectoria (C) și în general chiar axele se rotesc. Acest sistem de axe de coordonate mobil, se utilizează foarte des în mecanică, deoarece el este strîns legat, atît de caracterul traiectoriei, cît și de mișcarea punctului pe traiectorie; de aceea, toate ecuațiile raportate la acest sistem de axe de coordonate, se numesc ecuații naturale sau intrinseci. În ce privește proiecțiile vectorului viteză $\overline{v}$ al punctului pe aceste axe, este evident că ele vor fi egale cu

$$v_\tau = v, \quad v_n = 0, \quad v_b = 0$$

Pentru a găsi proiecțiile accelerației $\overline{a}$ a punctului pe axele $B\tau nb$, vom reveni la definiția vectorului $\overline{a}$. Să examinăm traiectoria (C) a punctului A. Să presupunem că în momentul t punctul mobil se află în punctul B, iar în momentul $t = \Delta t$ în punctul C. Construim vectorii viteză $\overline{v}$ și $\overline{v} + \Delta\overline{v}$ în punctele B și C (fig. 161). Mutăm vectorul $\overline{v} + \Delta\overline{v}$ în punctul B; atunci $\Delta\overline{v} = \overline{DE}$; deoarece două tangente vecine sînt la limită situate în planul osculator, la limită vectorul $\overline{DF} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}$ va fi și el situat în planul osculator. Din fig. 161 rezultă că vectorul $\overline{DF}$ trebuie să fie totdeauna dirijat în sensul concavității traiectoriei; prin urmare și limita vectorului $\overline{DF}$ este de asemenea dirijată în sensul concavității traiectoriei. Deoarece limita vectorului $\overline{DF}$ este egală cu prima derivată a vectorului viteză în raport cu timpul, adică este egală cu accelerația, ajungem de aici la următoarea concluzie:

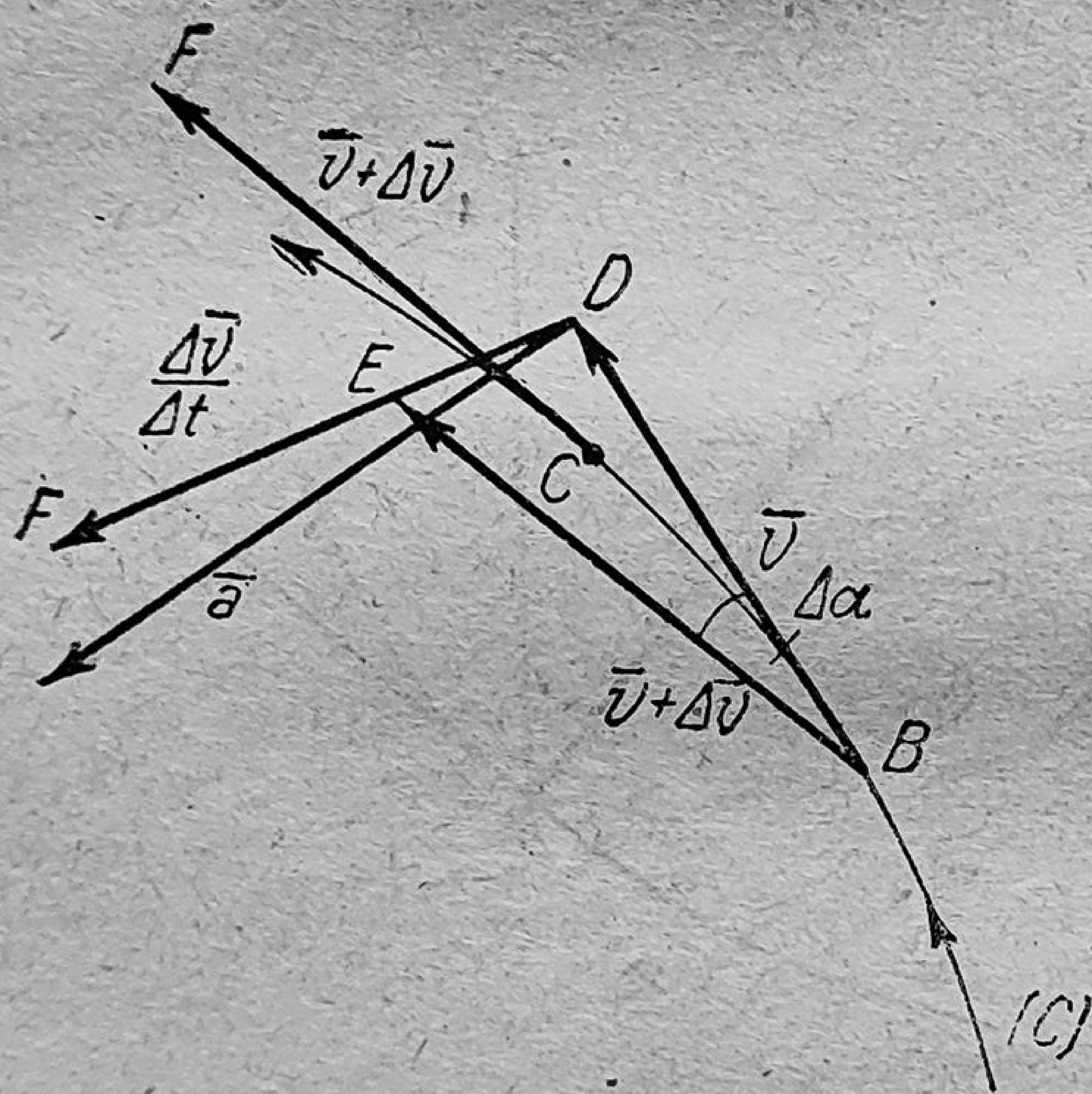


Fig. 161

Vectorul accelerației este totdeauna situat în planul osculator al traiectoriei punctului și dirijat în sensul concavității traiectoriei.

Din această concluzie rezultă în primul rînd că:

Proiecția accelerației unui punct de binormală este egală cu zero.

Astfel, notînd proiecțiile accelerației $\overline{a}$ pe axele $B\tau$, Bn, Bb respectiv prin a_τ, a_n, a_b, avem: $a_b = 0$. Deci, rămîn de găsit numai proiecțiile a_τ și a_n (fig. 162). Pentru determinarea acestor două proiecții utilizăm un raționament analog cu cel folosit la deducția formulei (16.29) pentru exprimarea vitezei în coordonate polare. Notăm vectorul unitar al tangentei $B\tau$ în sensul mișcării punctului A, prin $\overline{\tau}^0$; atunci vom avea:

$$\overline{v} = \overline{\tau}^0 v, \tag{17.9}$$

unde ambii factori din partea dreaptă depind, în general, de timp. Factorul v depinde de timp, deoarece modulul vectorului viteză este variabil în timp, vectorul $\overline{\tau}^0$ depinde de timp deoa-

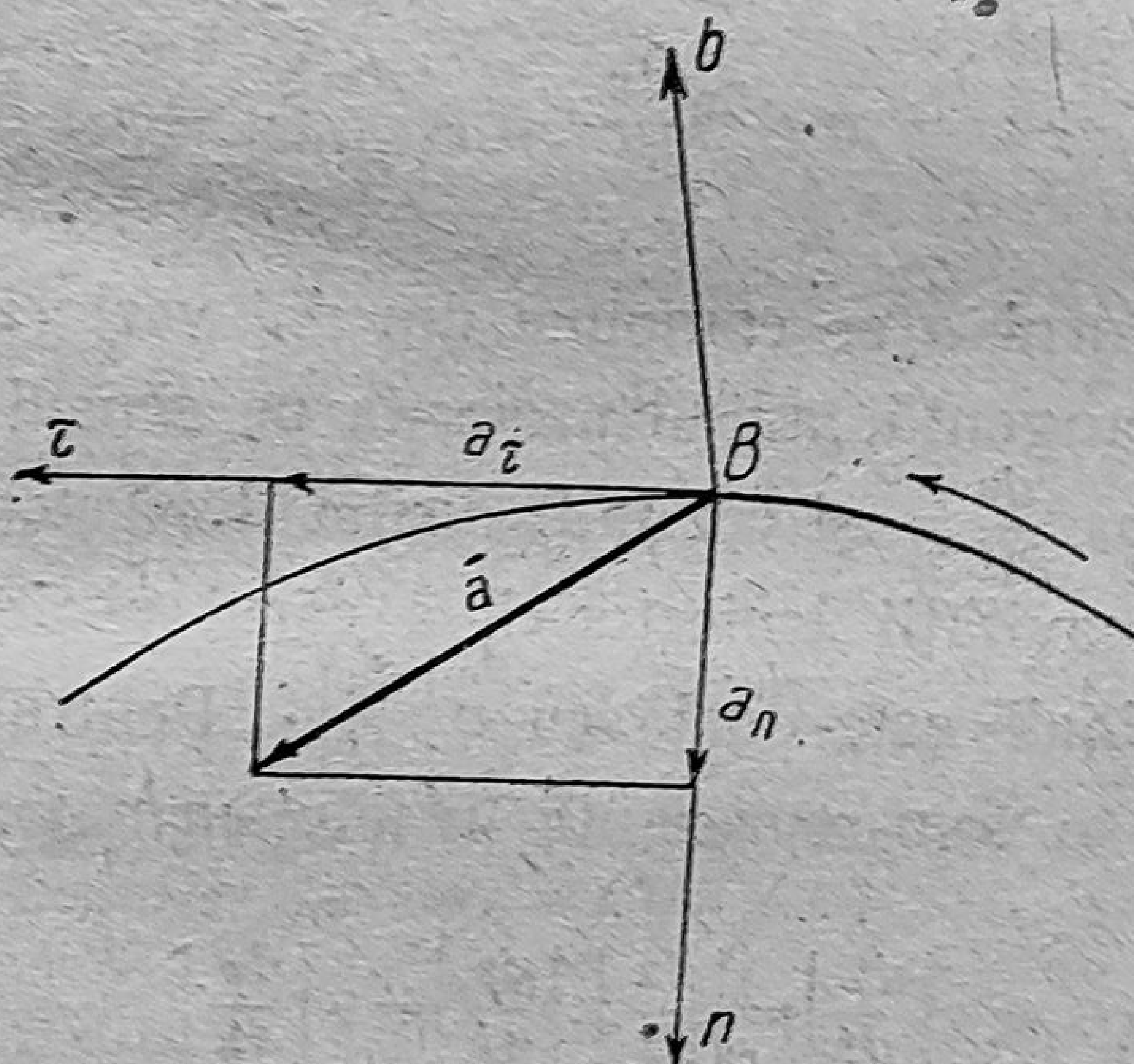


Fig. 162

rece, cu excepția mișcării rectilinii, tangenta $B\tau$ își schimbă direcția. Deoarece vectorul accelerație este egal cu derivata întîi a vectorului viteză în raport cu timpul, avem:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{\tau}^0 \frac{dv}{dt} + \frac{d\overline{\tau}^0}{dt} v.$$

Aplicînd derivatei $\frac{d\overline{\tau}^0}{dt}$ formula (16.22), care a fost dedusă în § 65 pentru un factor cu modul constant care se rotește într-un

plan fix și care, după cum se vede ușor, se poate extinde și asupra vectorului $\bar{\tau}^0$, vom obține:

$$\frac{d\bar{\tau}^0}{dt}=\bar{n}^0\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|$$

unde $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|$ este valoarea absolută a vitezei unghiulare a rotirii vectorului $\bar{v}$ în planul osculator, iar $\bar{n}^0$ este vectorul unitar dus în planul osculator perpendicular la vectorul $\bar{\tau}^0$, în sensul rotirii lui, adică dus în direcția normalei principale, în sensul concavității traiectoriei. Din fig. 161, vedem că derivata $\frac{d\alpha}{dt}$ este limita raportului dintre unghiul a două tangente vecine $\Delta\alpha$ și intervalul de timp Δt, cînd Δt tinde către zero. In acest fel, obținem:

$$\bar{a}=\bar{\tau}^0\frac{dv}{dt}+\bar{n}^0 v\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|.$$

Vedem că vectorul $\bar{a}$ se compune din doi vectori: unul care este dirijat după tangentă, avînd proiecția pe sensul pozitiv al tangentei egală cu $\frac{dv}{dt}$, și celălalt, dirijat după normala principală în sensul concavității traiectoriei, a cărui proiecție pe această normală principală este egală cu $v\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|$. Pentru a găsi expresia derivatei $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|$ o vom reprezenta în felul următor

$$\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|\left|\frac{ds}{dt}\right|=v\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

dar $\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$ este curbura traiectoriei, egală cu $\frac{1}{\rho}$, unde ρ este raza de curbură; de aceea

$$\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|=\frac{v}{\rho}.$$

Introducînd această valoare a derivatei $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|$ în expresia precedentă a vectorului $\bar{a}$, obținem:

$$\bar{a}=\bar{\tau}^0\frac{dv}{dt}+\bar{n}^0\frac{v^2}{\rho}. \qquad (17.10)$$

De aici găsim următoarele formule pentru proiecțiile a_τ, a_n, a_b ale vectorului accelerației $\overline{a}$ pe tangentă, normală principală și binormală:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \tag{17.11}$$

Din aceste formule, tragem în primul rînd concluzia că proiecția accelerației pe normala principală poate să fie tot timpul egală cu zero, numai în cazul cînd în toate punctele traiectoriei $\rho = \infty$, adică dacă traiectoria punctului este o linie dreaptă; în cazul acesta, accelerația totală coincide cu proiecția a_τ. În ce privește proiecția accelerației pe tangentă, ea este egală cu zero, dacă modulul vitezei este constant. Dacă modulul vitezei crește în decursul timpului, atunci $a_\tau > 0$, adică accelerația $\overline{a}$ este dirijată în sensul mișcării punctului, cum se arată în fig. 162; dacă însă modulul vitezei scade în decursul timpului, atunci $a_\tau < 0$, și accelerația $\overline{a}$ este dirijată în sens contrar mișcării, adică în fig. 162 vectorul $\overline{a}$ trebuie să fie situat în partea dreaptă a normalei principale Bn. Din formula (17.10) expresia modulului a al accelerației este

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} \tag{17.12}$$

unde radicalul este luat în valoare absolută. Cosinușii unghiurilor vectorului accelerație $\overline{a}$, formați cu tangenta și normala principală, vor fi egali respectiv cu $\frac{a_\tau}{a}$ și $\frac{a_n}{a}$. Vectorul $\overline{a}_\tau = \overline{\tau}^0 \frac{dv}{dt}$ se numește uneori și accelerație tangențială, iar vectorul $\overline{a}_n = \overline{n}^0 \frac{v^2}{\rho}$ accelerație normală.

§ 73. Accelerația punctului în mișcare circulară. Să aplicăm formulele precedente la studiul accelerației în mișcarea circulară. Presupunînd că punctul se mișcă pe un cerc cu raza R, vom nota prin ω viteza unghiulară a punctului mobil, unde ω în cazul general va fi funcție de timp. Atunci, conform formulei (16.33), modulul v al vitezei $\overline{v}$ a punctului va fi egal cu $v = R|\omega|$. Deoarece raza de curbură ρ a cercului este egală cu raza lui R, atunci din formulele (17.10) obținem:

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= \frac{d(R|\omega|)}{dt} = R\frac{d|\omega|}{dt} \\ a_n &= \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{17.13}$$

Dacă viteza unghiulară ω depinde de timp, atunci ambele proiecții a_τ și a_n, trebuie să fie diferite de zero. Să presupunem că valoarea absolută $|\omega|$ a vitezei unghiulare, scade în decursul timpului; atunci mărimea $\frac{d|\omega|}{dt}$ va fi negativă, și proiecția a_τ va fi dirijată în sens opus mișcării punctului pe circumferință, deoarece sensul pozitiv al tangentei se consideră de obicei în sensul mișcării punctului A. Acest caz este reprezentat în fig. 163. Însă accelerația a_n este dirijată totdeauna înspre interiorul cercului, pe direcția normalei principale, adică după raza cercului spre centrul lui. Dacă valoarea absolută $|\omega|$ a vitezei unghiulare crește în decursul timpului, atunci proiecția a_τ este de sens opus celui arătat în fig. 163. Dacă viteza unghiulară ω este constantă, adică punctul se găsește în mișcare uniformă pe cerc, vom avea $a_\tau = 0$, și accelerația punctului va fi dirijată după rază spre centrul cercului. Prin urmare:

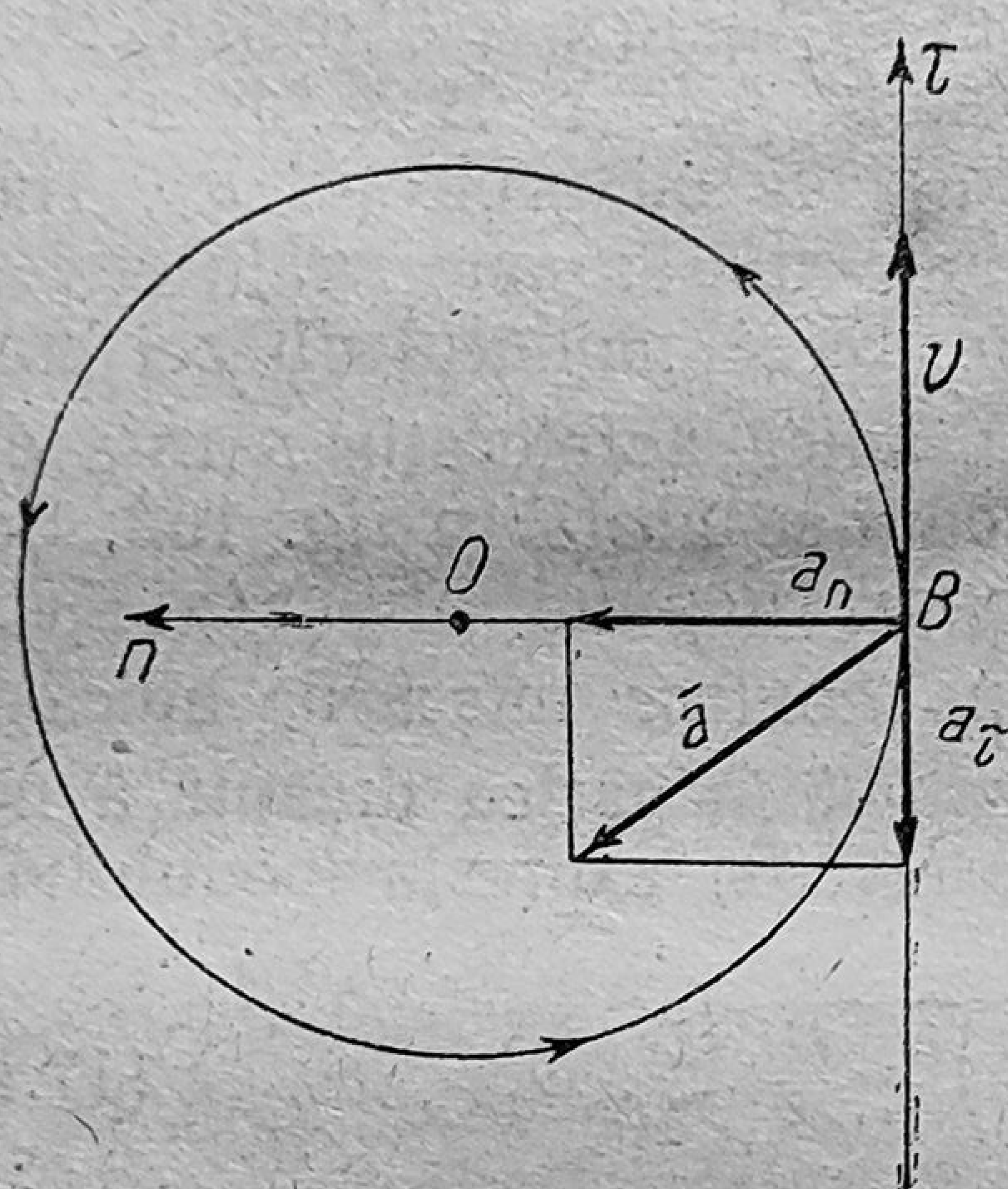


Fig. 163

În mișcarea uniformă a unui punct pe o circumferință, accelerația este dirijată totdeauna spre centrul cercului, este constantă ca mărime și egală cu $\frac{v^2}{R} = R\omega^2$ *și se numește accelerație centripetă.*

În cazul general de mișcare a punctului pe un cerc, modulul accelerației $\bar{a}$, conform formulelor (17.12) și (17.13) va fi

$$a = R\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}, \tag{17.14}$$

iar tangenta unghiului format de accelerația totală cu raza cercului va fi egală cu $\frac{a_\tau}{a_n} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d|\omega|}{dt}$.

§ 74. Dimensiunile mărimilor mecanice. Dacă valoarea numerică a unei mărimi, depinde de unitățile de măsură adoptate, atunci această mărime se numește mărime cu dimensiuni. Dacă însă valoarea numerică a unei mărimi nu depinde de unitățile de măsură adoptate, atunci această mărime se numește mărime

fără dimensiuni. Astfel, de exemplu, o arie a cărei valoare numerică depinde de unitatea de lungime adoptată, se exprimă printr-un număr cu dimensiuni, iar numărul π, egal cu raportul dintre lungimea circumferinței și diametru sau numărul e sînt numere fără dimensiuni. Dacă unele din mărimile cu dimensiuni din mecanică, le vom considera fundamentale și vom stabili pentru ele unități de măsură, atunci celelalte mărimi mecanice vor fi *derivate:* unitățile de măsură ale acestor mărimi derivate se vor exprima prin unitățile de măsură ale mărimilor fundamentale. *Expresia unității de măsură a unei mărimi mecanice oarecare derivate prin unitățile de măsură ale mărimilor mecanice fundamentale se numește dimensiunea acestei mărimi mecanice derivate.* Dimensiunile mărimilor mecanice derivate se obțin direct din înseși definițiile acestor mărimi derivate. Pentru stabilirea dimensiunilor, sînt folosite în mecanică sisteme de unități tehnice și fizice. În sistemul tehnic de unități se aleg trei mărimi fundamentale: forța, lungimea și timpul; ca unitate de forță se ia kilogramul-forță. ca unitate de lungime — metrul, ca unitate de timp — secunda. Pentru aceste mărimi fundamentale vom introduce următoarele notații: forța F, lungimea L, timpul T. În sistemul fizic de unități se aleg ca mărimi fundamentale masa, lungimea și timpul; ca unitate de masă se ia kilogramul-masă, ca unitate de lungime — metrul, ca unitate de timp — secunda. Pentru aceste unități fundamentale vom introduce următoarele notații: masa M, lungimea L și timpul T. Adoptînd în sistemul teoretic de unități ca unitate de masă — gramul-masă, ca unitate de lungime — metrul și ca unitate de timp — secunda, vom obține cunoscutul sistem CGS de unități. Pentru metrul lungime și kilogramul-masă, se consideră lungimea și masa etaloanelor păstrate în palatul de măsuri și greutăți care se află la Paris; secunda este $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ din ziua solară medie; pentru un kilogram greutate se ia greutatea masei etalon, la nivelul mării și la latitudinea de 45°. Este evident că în cinematică vom avea de-a face numai cu lungimea L și timpul T, deoarece nici masa nici forța nu intervin în cinematică.

Să găsim dimensiunile vitezei liniare, vitezei unghiulare și accelerației. Deoarece $\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}$, adică viteza este egală ca mărime cu un raport între lungime și timp, atunci:

$$\text{dimensiunea vitezei liniare} = \frac{L}{T}. \tag{17.15}$$

Viteza unghiulară ω se determină prin formula $\omega=\frac{d\theta}{dt}$. Deoarece unghiul este o mărime fără dimensiune, atunci

$$\text{dimensiunea vitezei unghiulare } =\frac{1}{T}. \qquad (17.16)$$

Deoarece $\bar{a}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, adică accelerația este egală ca mărime cu lungimea împărțită la pătratul timpului, atunci

$$\text{dimensiunea accelerației } =\frac{L}{T^2}. \qquad (17.17)$$

Nu este greu să ne convingem că toate expresiile găsite pentru viteză și accelerație, precum și cele ale proiecțiilor lor arătate mai sus, satisfac aceste ecuații dimensionale. De exemplu, pentru accelerația $\bar{a}$ am avut expresia $\frac{d\bar{v}}{dt}$; folosind egalitatea (17.15) găsim că dimensiunea derivatei $\frac{d\bar{v}}{dt}$ va fi: $\frac{L}{T}:T=\frac{L}{T^2}$, adică obținem în adevăr dimensiunea accelerației (17.17). Pentru modulul vitezei în mișcarea circulară, noi am găsit expresia $v=R\omega$; folosind egalitatea (17.16) găsim că dimensiunile produsului $R\omega$ va fi: $L\cdot\frac{1}{T}=\frac{L}{T}$, adică obținem în adevăr dimensiunea vitezei (17.15). Pentru proiecția vitezei pe normala principală, am avut expresia $\frac{v^2}{\rho}$; folosind egalitatea (17.15) găsim că dimensiunea fracției $\frac{v^2}{\rho}$ va fi $\frac{L^2}{T^2}:L=\frac{L}{T^2}$, adică vom obține în adevăr dimensiunea accelerației (17.17). Ca și în fizică, în general, în formulele mecanicii, dimensiunile părților din dreapta și stînga ale fiecărei ecuații, trebuie să fie egale între ele. Cu ajutorul acestei observații, putem verifica formulele mecanicii și uneori chiar să le determinăm, abstracție făcînd de niște coeficienți fără dimensiuni. De exemplu, este evident că perioada de oscilație a pendulului matematic, adică a unui punct greu suspendat de un fir fără greutate, a trebuit să depindă de lungimea l a firului și accelerația g a gravitației, deoarece în problemă intervin efectiv numai aceste două mărimi. Știm că dimensiunile lui l și g vor fi: L

şi $\frac{L}{T^2}$; de aceea produsul $l^m g^n$ va avea dimensiunea $L^{m+n} T^{-2n}$. Pentru ca acest produs să aibă dimensiunea T trebuie să avem:

$$m+n=0, \quad -2n=1,$$

adică

$$n=-\frac{1}{2}, \quad m=+\frac{1}{2}.$$

În acest fel, singura expresie care are dimensiunea timpului este

$$l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{l}{g}};$$

prin urmare formula perioadei de oscilaţie a pendulului matematic trebuie să aibă forma

$$t=C\sqrt{\frac{l}{g}},$$

unde C este un coeficient fără dimensiuni care nu poate fi determinat din aceste considerente. In dinamică vom vedea cum se poate găsi coeficientul C, iar pentru oscilaţii mici coeficientul C este egal cu raportul dintre circumferinţă şi rază, adică $C=2\pi$. Vom observa, că o formulă neomogenă din punct de vedere al dimensiunilor, ne dă indicaţii sigure asupra inexactităţii formulei, dar invers, omogenitatea dimensiunilor nu ne dă încă un răspuns pozitiv despre exactitatea formulei. Astfel, de exemplu, în formula $t=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{l}{g}}$, dimensiunile părţii din dreapta şi stînga coincid între ele. Totuşi, ştim că această formulă nu va fi adevărată, iar adevărata formulă are forma $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. De aceea, la verificarea formulei pe calea cercetării dimensiunilor, în cazul cînd în partea dreaptă şi partea stîngă avem mărimi cu aceleaşi dimensiuni, încă nu putem trage concluzia că rezultatul obţinut este just, dar atunci cînd dimensiunile nu coincid, totdeauna se poate afirma că rezultatul este greşit.

Este necesar să se mai indice că, în cazul cînd unele dintre mărimile care intervin în formule se dau prin valori numerice, atunci dimensiunile formulelor se schimbă în aparenţă. De exemplu, să presupunem că un punct mişcîndu-se uniform pe o dreaptă a parcurs în t s, 5 m; atunci viteza punctului va fi egală cu $\frac{5}{t}$. Dacă vom uita că 5 este un număr cu dimensiune atunci s-ar

părea că dimensiunile fracției $\frac{5}{t}$ va fi T^{-1}, adică fracția $\frac{5}{t}$ nu reprezintă viteza liniară ci pe cea unghiulară. Pentru a restabili dimensiunile, este suficient să înlocuim valoarea numerică cu o notație literală nominală, de exemplu, în loc de 5 m să punem s m; atunci din formula $\frac{s}{t}$ se poate vedea direct dimensiunile expresiei considerate. În cazul unei formule complicate, sîntem nevoiți uneori să facem această înlocuire chiar de la început.

Ecuația $y=f(x)$ a unei curbe oarecare (C) reprezintă curba (C) în adevăratele ei proporții, numai atunci cînd abscisele și ordonatele se măsoară la aceeași scară. În mecanică, la construirea graficelor distanțelor, a vitezelor și accelerațiilor, sîntem nevoiți să lucrăm cu mărimi de diferite dimensiuni. De exemplu, la construcția graficului distanțelor după formula $s=f(t)$, pe una din axe trebuie să se măsoare lungimea, iar pe cealaltă, timpul, iar timpul se poate reprezenta printr-o lungime numai în mod simbolic; la construcția graficului vitezelor după formula $v=f(t)$ pe una din axe trebuie să se măsoare viteza iar pe cealaltă timpul, dar și viteza și timpul se pot reprezenta prin lungimi numai simbolic. Pentru ca din măsurarea directă pe desen să putem obține un rezultat just, trebuie să măsurăm mărimile reprezentate la o singură scară, adică de exemplu unitatea de spațiu și unitatea de timp să le reprezentăm prin segmente de aceeași lungime, unitatea de viteză și unitatea de timp tot prin segmente de aceeași lungime etc. Dar, în practică, de multe ori trebuie să se renunțe la aceasta: astfel, în § 69 la exemplul 42, am fost nevoiți să folosim diferite scări. Dacă la construcția unui grafic se folosesc diferite scări, atunci pentru obținerea rezultatelor exacte, fiecare măsurătoare pe grafic trebuie să fie corectă. Pentru a exemplifica cele expuse, să examinăm mișcarea rectilinie uniformă a unui punct și să presupunem că în 12 secunde punctul a parcurs un drum de 60 m. Dacă noi vom lua scări egale, adică, de exemplu, vom reprezenta grafic 1 secundă printr-un segment lung de 1 cm și o lungime de 1 m tot printr-un segment de 1 cm, atunci din desen vom avea: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{60}{12}=5$, adică direct din desen vom obține viteza reală în metri pe secundă. Dacă însă vom lua diferite scări, de exemplu, vom admite că segmentul de 1 cm, reprezintă o lungime de 6 m și un timp de 2 s, atunci pentru $\operatorname{tg}\alpha'$ din noul desen vom obține expresia: $\operatorname{tg}\alpha'=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$, adică nu vom avea valoarea reală a vitezei în metri

pe secundă. Deoarece în aceste scări diferite am micşorat de şase ori segmentele care reprezintă distanţele, şi de două ori segmentele care reprezintă timpul, atunci pentru determinarea valorii reale a vitezei $v=\frac{s}{t}$ m/s, mai trebuie să înmulţim expresia pentru viteza obţinută cu $\frac{6}{2}=3$, ceeace ne va conduce la adevărata valoare de 5 m/s. În general, să presupunem că la construcţia graficului $s=f(t)$ reprezentăm printr-un segment de o lungime anumită — m unităţi de drum şi n unităţi de timp; trecînd la aceste scări, în locul graficului ecuaţiei $s=f(t)$, vom avea graficul ecuaţiei $s'=f_1(t')$, unde vom avea $s=ms'$ şi $t=nt'$. Din ecuaţia $s'=f_1(t')$, vom folosi la determinarea vitezei şi acceleraţiei tangenţiale expresiile $\frac{ds'}{dt'}$ şi $\frac{d^2s'}{dt'^2}$, unde derivata $\frac{ds'}{dt'}$ reprezintă tangenta trigonometrică a unghiului tangentei la graficul ecuaţiei $s'=f_1(t')$. Deoarece

$$ds=mds', \quad dt=ndt',$$

vom obţine

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{m}{n}\cdot\frac{ds'}{dt'}, \quad a_\tau=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{m}{n^2}\cdot\frac{d^2s'}{dt'^2}.$$

De aici vedem, că pentru a obţine expresiile vitezei şi acceleraţiei tangenţiale din graficul $s'=f_1(t')$, trebuie să înmulţim cele două derivate respectiv cu $\frac{m}{n}$ şi $\frac{m}{n^2}$. De aceea la folosirea graficelor trebuie să fim prudenţi şi totdeauna să observăm cu atenţie scările, cînd efectuăm măsurători pe grafice.

§ 75. Exemple. 50. Să se găsească hodograful vitezei pentru mişcarea elicoidală definită prin formulele (16.11). În § 67, am văzut că pentru această mişcare avem:

$$v_x=-kR\sin kt, \quad v_y=+kR\cos kt, \quad v_z=h\frac{k}{2\pi},$$

$$v=\frac{k}{2\pi}\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}.$$

De aceea ecuaţiile hodografului vor fi:

$$X=-kR\sin kt, \quad Y=+kR\cos kt, \quad Z=h\frac{k}{2\pi}.$$

Din primele două ecuaţii găsim:

$$X^2+Y^2=k^2R^2.$$

Prin urmare, ecuaţiile hodografului vor fi:

$$X^2+Y^2=k^2R^2, \quad Z=h\frac{k}{2\pi}.$$

Hodograful este un cerc situat într-un plan paralel cu planul OXY la distanța $h\frac{k}{2\pi}$. Acest rezultat poate fi obținut direct, deoarece după cum am văzut în § 67, modulul v al vitezei punctului este constant în această mișcare și egal cu $\frac{k}{2\pi}\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}$ și viteza este înclinată față de verticală sub un unghi constant pentru care

$$\cos\gamma=\frac{h}{\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}}.$$

Deoarece $v\cos\gamma=h\frac{k}{2\pi}$ tragem de aici concluzia că locul geometric al extremității vectorului $\bar{v}$ este un cerc paralel cu planul OXY situat la distanța de $h\frac{k}{2\pi}$ de acest plan, adică ajungem la rezultatul precedent.

51. Să se găsească accelerația unui punct avînd legea de mișcare

$$x=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Avem:

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=-g,$$

adică accelerația este dirijată după axa Ox în sens negativ. Viteza v în această mișcare este egală cu $v=v_0-gt$. Viteza se va anula pentru $v_0-gt=0$, adică pentru $t=\frac{v_0}{g}$; în acest caz abscisa x a punctului atinge valoarea ei maximă:

$$x=v_0\frac{v_0}{g}-\frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2}=\frac{v_0^2}{2g},$$

și punctul își va continua mișcarea în sens invers.

Astfel, viteza punctului își schimbă sensul trecînd prin valoarea zero, iar accelerația punctului este constantă și dirijată totdeauna în sens opus axei Ox. Acesta este cazul mișcării unui punct material aruncat vertical în sus, cu viteza inițială v_0.

52. Să se găsească accelerația în mișcarea oscilatorie armonică:

$$x=a\sin(kt+\varepsilon).$$

Avem:

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2a\sin(kt+\varepsilon)=-k^2x.$$

Vedem că accelerația în mișcarea oscilatorie armonică este proporțională cu abscisa punctului și dirijată înspre originea absciselor.

53. Să se găsească accelerația în mișcarea elicoidală examinată în exemplul 50 al prezentului capitol. Avem:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2R\cos kt = -k^2x,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2R\sin kt = -k^2y,$$

$$a_z = 0.$$

$$a = \sqrt{k^4R^2\cos^2 kt + k^4R^2\sin^2 kt} = k^2R.$$

Unghiurile α', β', γ', formate de accelerație cu axele de coordonate se determină prin formulele:

$$\cos\alpha' = \frac{a_x}{a} = -\frac{x}{R}, \quad \cos\beta' = \frac{a_y}{a} = -\frac{y}{R}, \quad \cos\gamma' = 0.$$

Astfel, accelerația $\bar{a}$ este dirijată perpendicular pe axa cilindrului pe care este înfășurată elicea circulară și intretaie această axă, adică accelerația $\bar{a}$ este dirijată după raza secțiunii transversale a cilindrului. Deoarece viteza și accelerația sînt totdeauna situate în planul osculator, atunci pentru elicea considerată, planul osculator se determină prin direcția tangentei și razei secțiunii transversale construite pentru punctul respectiv.

54. Pornind de la formulele (17.7) și (17.12), să se determine raza de curbură ρ pentru fiecare punct al spiralei logaritmice, date prin ecuațiile (16.16), și anume:

$$r = r_0e^{mt}, \quad \theta = nt,$$

unde r_0, m și n sînt constante. Vom determina în primul rînd dimensiunile acestor constante; deoarece produsele mt și nt trebuie să fie numere cu dimensiune nulă, tragem concluzia că dimensiunile m, n și r_0 vor fi respectiv T^{-1}, T^{-1} și L. Din formulele (17.7) și (17.12) avem:

$$a^2 = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]^2,$$

$$a_2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}.$$

De aici obținem:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]^2,$$

sau

$$\frac{v^4}{\rho^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Din ecuația mișcării obținem:

$$\frac{dr}{dt} = mr_0e^{mt} = mr, \quad \frac{d\theta}{dt} = n, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = m\frac{dr}{dt} = m^2r.$$

Mai departe vom avea:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2=m^2r^2+n^2r^2=(m^2+n^2)r^2,$$

sau

$$v=\sqrt{m^2+n^2}r.$$

De aici obținem:

$$\frac{dv}{dt}=\sqrt{m^2+n^2}\frac{dr}{dt}=m\sqrt{m^2+n^2}\,r.$$

Prin urmare, vom avea:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2=m^2r-n^2r=(m^2-n^2)\,r,$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\Theta}{dt}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(nr^2)=\frac{1}{r}2nr\frac{dr}{dt}=2n\frac{dr}{dt}=2\,mnr.$$

In acest fel, obținem:

$$\frac{(m^2+n^2)^2r^4}{\rho^2}=(m^2-n^2)^2r^2+4\,m^2n^2r^2-m^2\,(m^2+n^2)\,r^2,$$

sau după reducerea cu r^2

$$\frac{(m^2+n^2)^2\,r^2}{\rho^2}=m^4-2\,m^2n^2+n^4+4\,m^2n^2+m^2\,(m^2+n^2)=(m^2+n^2)^2-m^2\,(m^2+n^2).$$

Simplificînd cu m^2+n^2, vom găsi:

$$\frac{(m^2+n^2)\,r^2}{\rho^2}=m^2+n^2-m^2=n^2.$$

De aici vom avea:

$$\rho^2=\frac{m^2+n^2}{n^2}r^2=\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)r^2,$$

adică:

$$\rho=\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}}\,r^2.$$

Nu este greu de observat că în această formulă dimensiunile sînt respectate. Introducînd notația $k=\frac{m}{n}$, unde k este o mărime fără dimensiune, vom obține:

$$r=r_0e^{k\Theta},\quad \rho=\sqrt{1+k^2}r.$$

Aceasta va fi ecuația spiralei logaritmice în coordonate polare și expresia razei ei de curbură.

CAPITOLUL XVIII

MIŞCAREA DE TRANSLAŢIE A UNUI SOLID ŞI MIŞCAREA LUI DE ROTAŢIE ÎN JURUL UNEI AXE FIXE

§ 76. Mişcarea de translaţie a solidului. Pentru a simplifica expunerea studiului mişcării solidului în cazul general, şi pentru a-i imprima un caracter mai sugestiv vom studia cinematica solidului, începînd cu mişcările simple, mişcarea de translaţie şi mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe.

Mişcarea solidului în care orice segment de dreaptă al solidului se deplasează paralel cu el însuşi se numeşte translaţie.

Să examinăm mişcarea unui solid, din poziţia *I* în poziţia a *II*-a, într-un interval oarecare de timp. Împărţim acest interval de timp în intervale de timp infinit mici; să presupunem că în fiecare element infinit mic de timp, solidul suferă o translaţie; o astfel de mişcare a corpului se numeşte mişcare de translaţie. În acest fel:

Dacă mişcarea solidului rigid este astfel încît în fiecare moment deplasarea solidului este de translaţie, atunci mişcarea solidului se numeşte mişcare de translaţie.

Să examinăm la un moment dat t, două puncte A şi B ale solidului care se află în mişcare de translaţie; presupunem că în momentul $t+\Delta t$, unde Δt este foarte mic, aceste puncte vor ocupa poziţiile A' şi B'. Atunci, pe baza definiţiei mişcării de translaţie, vom avea $A' B' \# A B$. Prin urmare, trebuie să avem $A A' \# B B'$ adică elementele drumurilor descrise de punctele A şi B în acelaşi interval de timp infinit mic, vor fi egale şi paralele între ele. În acest fel, în timpul mişcării de translaţie, în acelaşi interval de timp toate punctele solidului descriu arce de curbă egale pe care le putem face să coincidă între ele.

Este evident că în fiecare moment, vectorii viteză ai tuturor punctelor solidului care se găseşte în mişcare de translaţie, vor fi egali; acelaşi lucru se întîmplă şi cu vectorii acceleraţie. De aceea, pentru ca să cunoaştem mişcarea de translaţie a solidului, este suficient să cunoaştem mişcarea unui punct oarecare din

acest solid, adică ajungem la problemele studiate în cele două capitole precedente ale cinematicii. Deosebirea faţă de cele precedente va consta numai din faptul că la examinarea mişcării numai a unui singur punct, viteza şi acceleraţia au fost vectori legaţi

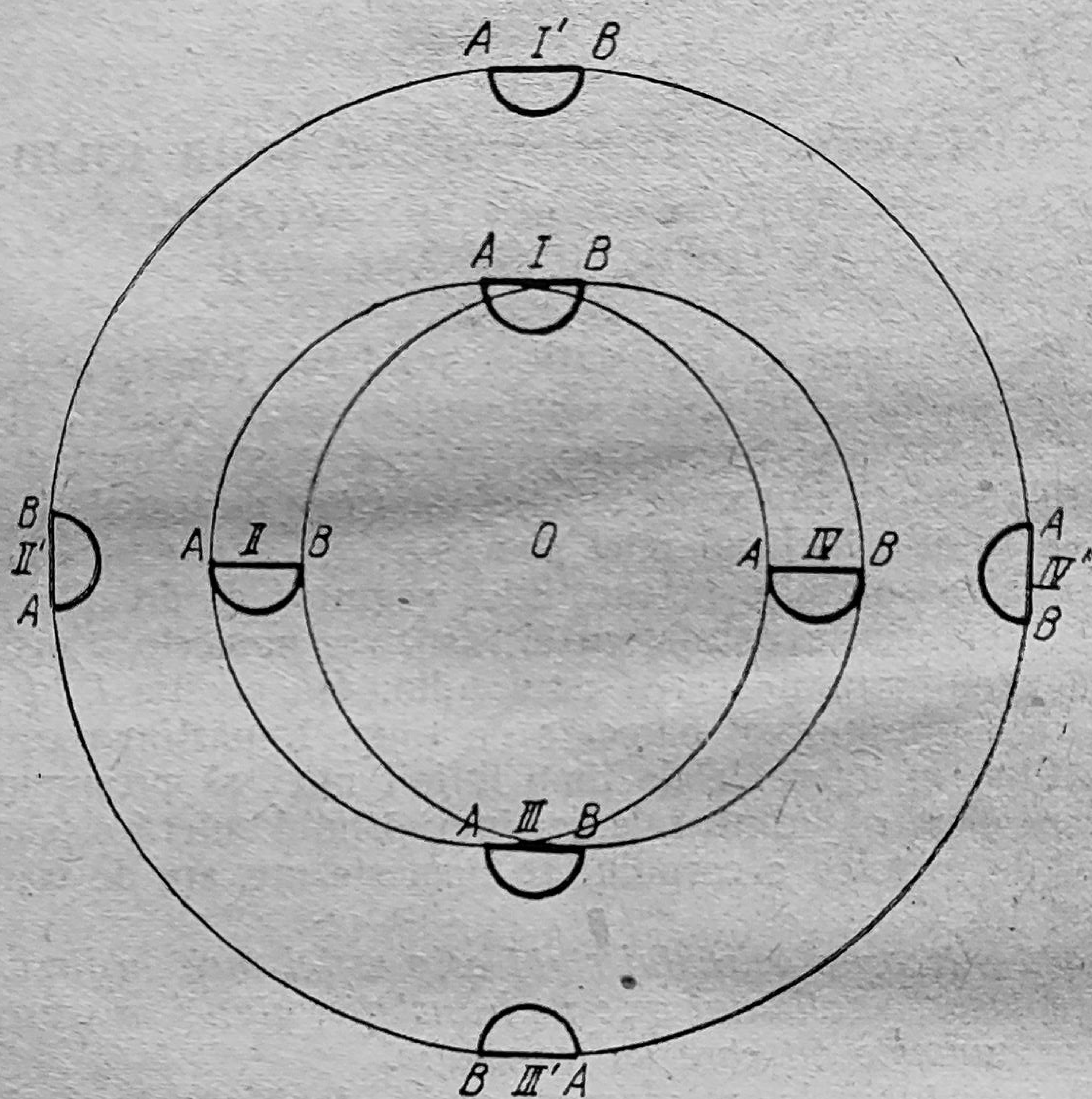


Fig. 164

de punct, iar la cercetarea mişcării solidului, aceşti vectori vor fi liberi, deoarece ei pot fi aplicaţi în orice punct al solidului.

Trebuie subliniat că în mişcarea de translaţie, punctele solidului pot descrie de asemenea şi curbe închise.

Pentru a lămuri acest lucru, vom apela la fig. 164, în care este reprezentat un segment de cerc care se mişcă în jurul punctului *O*. Să examinăm mai întîi poziţiile *I*, *II*, *III*, *IV* şi *I* ale segsegmentului. Prin această mişcare, segmentul *AB* se va deplasa, rămînînd paralel cu el însuşi, şi, evident că această mişcare a segmentului va fi o mişcare de translaţie. Să examinăm apoi poziţiile *I'*, *II'*, *III'*, *IV'* şi *I'* ale segmentului. Vedem că prin

această mişcare, în afară de translaţia în jurul punctului O, segmentul se și rotește, adică mișcarea segmentului nu va fi numai de translaţie ci și de rotaţie, durata rotirii sale fiind egală cu durata revoluţiei în jurul punctului O. În timpul acestei mişcări, segmentul este totdeauna dirijat cu partea lui convexă spre punctul O. Astfel este și cazul lunii, care totdeauna este îndreptată spre pămînt cu aceeaşi emisferă, deoarece atît timpul de revoluţie a lunii în jurul pămîntului cît și timpul de rotaţie a lunii în jurul axei sale, sînt egale cu circa 27 $^1/_3$ zile.

Dacă pentru o mişcare arbitrară a solidului, la un moment oarecare vitezele tuturor punctelor solidului vor fi egale ca vectori, se spune în acest caz, că solidul se găsește în stare de *mişcare instantanee de translaţie*.

§ 77. Vitezele unghiulare și liniare ale punctelor unui solid care se roteşte în jurul unei axe fixe. Să ne imaginăm un corp solid care se roteşte în jurul unei axe fixe oarecare Δ (fig. 165). Să examinăm un punct oarecare A al corpului care se află la distanţa R de axa Δ. Prin rotirea solidului, punctul A va descrie o circumferinţă cu raza egală cu R, situată în planul π perpendicular pe axa Δ și care trece prin punctul corespunzător poziţiei iniţiale a punctului A. Presupunem că într-un interval elementar de timp Δt raza dusă în punctul A s-a rotit cu un unghi oarecare $\Delta\theta$.

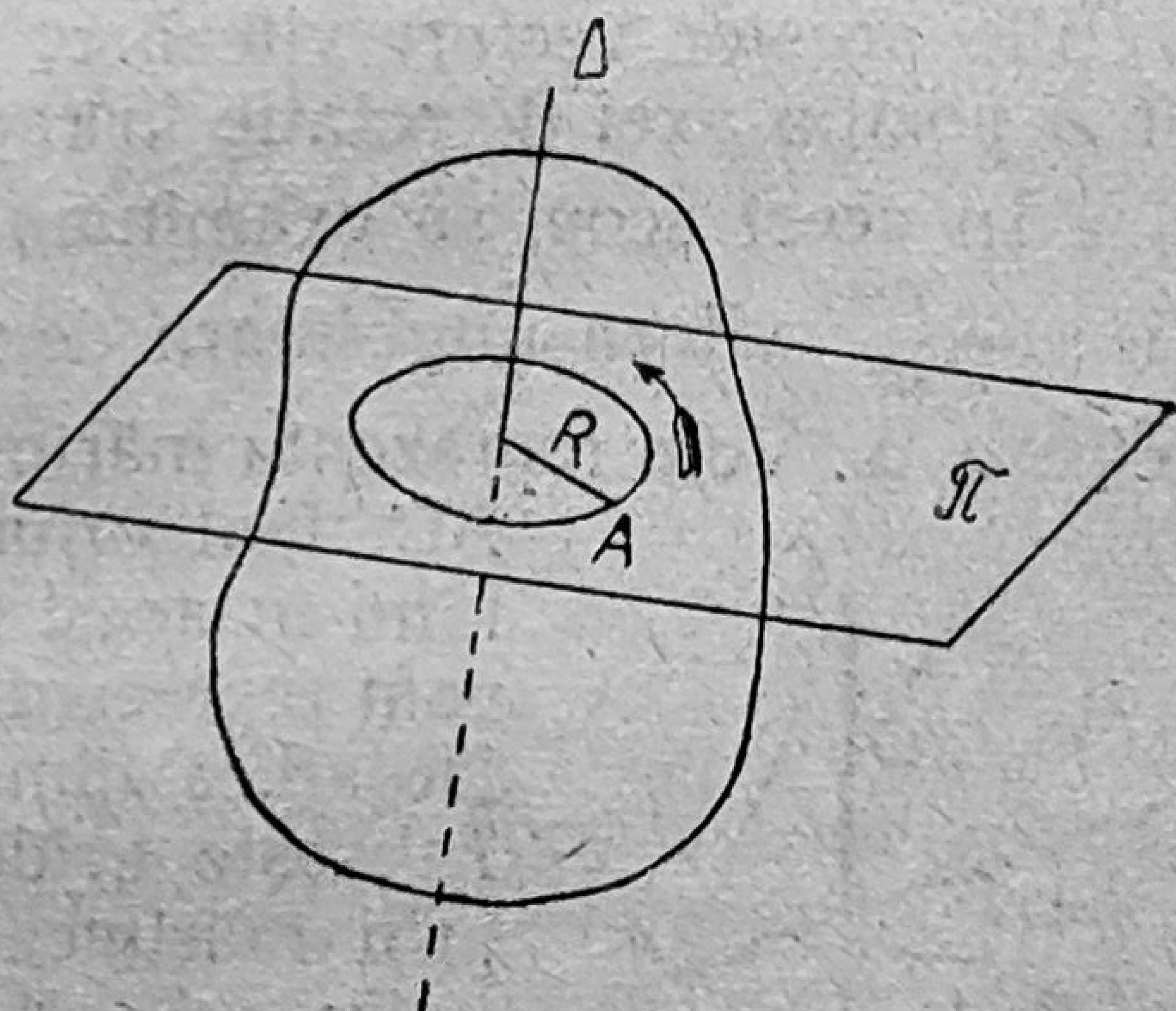


Fig. 165

Este evident că în același interval elementar de timp Δt, tuturor celorlalte puncte ale sodiului le va corespunde acelaşi unghi de roaţie $\Delta\theta$; astfel, unghiul $\Delta\theta$ poate fi luat ca măsură a unghiului de rotaţie a întregului solid. Limita raportului dintre unghiul de rotaţie $\Delta\theta$ al solidului și intervalul de timp Δt, se numește viteza unghiulară ω de rotaţie a solidului.

Unghiul de rotaţie θ se dă în general în funcţie de timpul t și avem:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \tag{18.1}$$

Astfel, viteza unghiulară de rotaţie a unui solid, este prima derivată a unghiului de rotaţie, în raport cu timpul.

La calculul derivatei $\frac{d\Theta}{dt}$ putem obţine două semne: plus sau minus în funcţie de creşterea sau descreşterea unghiului θ în raport cu timpul. De aceea, din formula (18.1) obţinem valoarea algebrică a vitezei unghiulare ω. Viteza liniară a punctului A, conform formulei (16.31) va fi egală în modul cu

$$v=R|\omega|. \tag{18.2}$$

Modulul a al acceleraţiei punctului A, conform formulei (17.14) va fi:

$$a=R\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\omega^4}. \tag{18.3}$$

Introducînd un nou vector, se poate realiza un astfel de mod de reprezentare a vectorilor viteză $\overline{v}$, ai punctelor solidului care se roteşte în jurul unei axe, încît să se obţină foarte simplu proiecţiile acestor vectori viteză $\overline{v}$, pe axele de coordonate, oricare ar fi poziţia axei de rotaţie în raport cu axele de coordonate.

În acest scop, să examinăm axa de rotaţie Δ a solidului şi fie $\omega=\frac{d\Theta}{dt}$ viteza unghiulară de rotaţie a solidului în jurul acestei axe Δ. Vom reprezenta mărimea $|\omega|$ prin segmentul de dreaptă BC, luat oriunde pe axa de rotaţie Δ, convenind în acest scop să adoptăm o scară la care vom reprezenta mărimea $|\omega|$ prin lungimea BC. Deoarece dimensiunea vitezei unghiulare este T^{-1}, este evident că reprezentarea mărimii $|\omega|$ prin mărimea BC poate fi numai convenţională; cu astfel de reprezentări convenţionale ne-am mai întîlnit la studiul forţelor, momentelor etc. Am atribuit astfel segmentului BC o mărime şi o direcţie, să-i atribuim şi un anumit sens, şi anume, acel sens, încît observatorul aşezat de-a lungul lui BC cu capul în C şi picioarele în B, să vadă rotirea punctului A şi deci şi a întregului solid, efectuîndu-se în sens pozitiv, adică în sens contrar acelor unui ceasornic (fig. 166). Unind punctul A cu originea B şi cu extremitatea C a segmentului BC, vedem că modulul v al vitezei $\overline{v}$ va fi egal cu 2 aria $\triangle$ ABC, deoarece el este egal cu produsul înălţimii R al acestui triunghi,

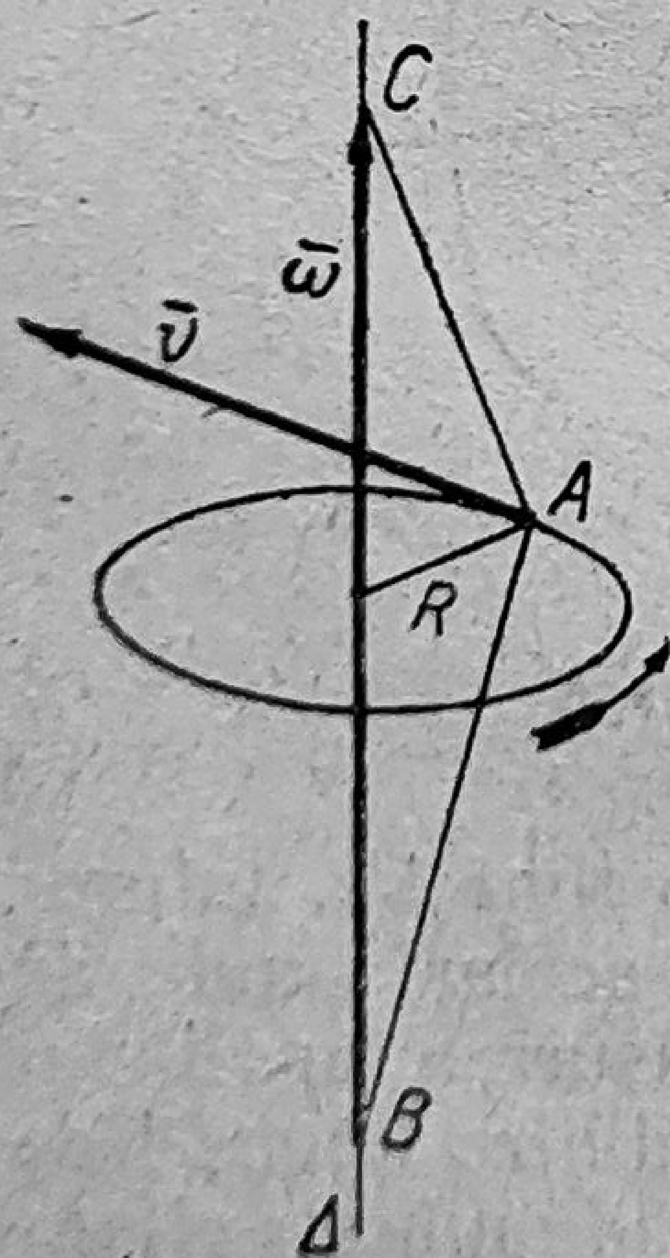


Fig. 166

cu baza lui $BC=|\omega|$; vectorul $\bar{v}$ va fi dirijat perpendicular pe planul triunghiului ABC. Este evident că acest procedeu de a găsi viteza $\bar{v}$ a punctului, se aplică nu numai în cazul cînd axa de rotaţie este fixă, ci şi atunci cînd va avea în momentul t numai poziţia instantanee Δ; acest caz se va expune mai departe la § 86 şi 87. Prin procedeul considerat de a reprezenta viteza unghiulară printr-un segment situat pe axa de rotaţie, viteza unghiulară se va caracteriza prin mărime, direcţie şi sens; pentru ca viteza unghiulară $\bar{\omega}$ să fie vector, rămîne de dovedit că vitezelor unghiulare li se aplică legea de adunare a vectorilor.

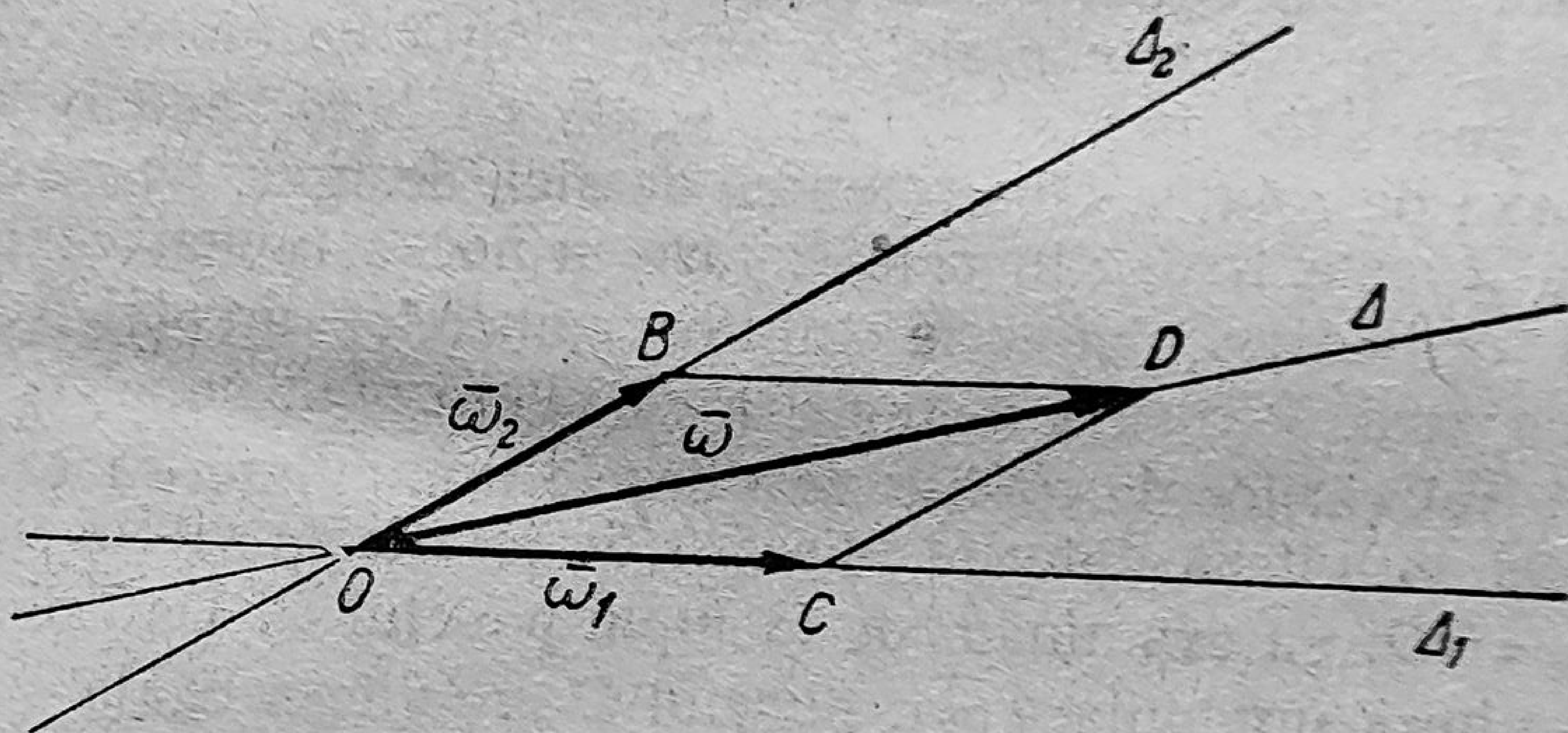


Fig. 167

Pentru a demonstra aceasta, să examinăm două axe de rotaţie Δ_1 şi Δ_2, care se întretaie în punctul O, pe care măsurăm vectorii viteză unghiulară $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ cu originea în punctul O (fig. 167). Această mişcare a solidului se poate obţine dacă ne închipuim că solidul se roteşte în jurul axei Δ_1 cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, iar axa Δ_1 se roteşte în jurul axei Δ_2 cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$.

Examinăm aici poziţia instantanee a acestor axe. Vom construi cu vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ paralelogramul $OCDB$, şi vom demonstra că diagonala OD a acestui paralelogram reprezintă viteza unghiulară, prin care se pot înlocui vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$. Pentru aceasta, în primul rînd este necesar să se dovedească că dreapta Δ, pe care se găseşte segmentul OD, este axă de rotaţie, adică că vitezele tuturor punctelor acestei drepte sînt egale cu zero, şi în al doilea rînd că viteza liniară, a

oricărui punct al solidului, determinată de vitezele unghiulare $\overline{\omega}_1$ şi $\overline{\omega}_2$ va fi egală cu acea datorită vitezei unghiulare $\overline{\omega} = \overline{OD}$. Să examinăm punctele O şi D. Viteza punctului O este egală cu zero deoarece este situat pe axele de rotaţie. Viteza punctului D datorită mişcării de rotaţie cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$ este egală ca modul cu 2 aria $\triangle DOC$, iar aceea datorită mişcării de rotaţie cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_2$ este egală ca modul cu 2 aria $\triangle DOB$. Deoarece $\triangle DOC = \triangle DOB$, ambele viteze ale punctului D sînt egale între ele, ele sînt dirijate perpendicular pe planul paralelogramului $OCDB$, în sens contrar. De aceea, viteza compusă a punctului D este egală cu zero. Deoarece punctele O şi D de pe dreapta Δ au vitezele egale cu zero, rezultă de aici că vitezele tuturor punctelor dreptei Δ sînt egale cu zero, adică dreapta Δ este axă de rotaţie. Observăm că de aici, desigur, nu rezultă că dreapta Δ este fixă; din cele expuse urmează numai că în momentul considerat, vitezele tuturor punctelor dreptei Δ sînt egale cu zero. Pentru a demonstra că viteza unui punct oarecare datorită mişcărilor de rotaţie au vitezele unghiulare $\overline{\omega}_1$ şi $\overline{\omega}_2$ va fi aceeaşi cu viteza datorită mişcării de rotaţie cu viteza unghiulară $\overline{\omega} = \overline{OD}$; să examinăm de exemplu punctul C. Datorită rotaţiei cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$, punctul C are viteza egală cu zero, iar datorită rotaţiei cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_2$ punctul C are o viteză al cărei modul este egal cu 2 aria $\triangle CBO =$ aria $OCDB$. Datorită mişcării de rotaţie cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ punctul C trebuie să aibă o viteză al cărei modul este egal cu 2 aria $\triangle CDO =$ aria $OCDB$, adică datorită mişcării de rotaţie cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ punctul C are o viteză, egală în modul, cu aceea datorită vitezelor unghiulare $\overline{\omega}_1$ şi $\overline{\omega}_2$. Deoarece şi direcţiile şi sensurile vitezelor punctului C în ambele cazuri, după cum este uşor de văzut în desen, vor fi la fel, rezultă că vitezele unghiulare se adună vectorial. Astfel, ajungem la teorema că *viteza unghiulară este un vector.*

Este uşor de văzut că viteza unghiulară este un vector alunecător, deoarece prin mutarea vectorului $\overline{\omega}$ de-a lungul axei Δ în alt loc, nu se modifică nici aria nici planul triunghiului ABC.

Astfel, demonstraţia faptului că viteza unghiulară este un vector, este o demonstraţie matematică, în timp ce numai cu ajutorul ştiinţelor naturii putem afirma că forţa este un vector.

După demonstrația, că viteza unghiulară $\overline{\omega}$ este un vector alunecător, se poate da expresia vectorului viteză $\overline{v}$ al punctului A, sub forma următoare (fig. 166):

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{BA}. \tag{18.4}$$

In adevăr, acest produs vectorial egal în modul cu 2 aria $\triangle ABC$, este un vector dirijat perpendicular pe planul triunghiului ABC în sensul în care este dirijat vectorul viteză al punctului A. Astfel, pe baza formulei (18.4), ajungem la următoarea teoremă:

Viteza unui punct al unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe este egală cu produsul vectorial al vectorului viteză unghiulară cu vectorul care unește originea vectorului viteză unghiulară cu punctul considerat.

De multe ori sistemul ortogonal de axe de coordonate fixe $Oxyz$, se ia astfel încît originea O a coordonatelor să fie situată pe axa de rotație Δ. Deoarece vectorul $\overline{\omega}$ este un vector alunecător, rezultă că vectorul $\overline{\omega}$ poate fi deplasat pe axa Δ astfel încît originea lui B să coincidă cu punctul O; atunci vectorul $\overline{BA}$ se va transforma în vectorul de poziție $\overline{OA}=\overline{r}$, și vom obține formula:

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r}. \tag{18.5}$$

Din această formulă rezultă că:

Vectorul viteză al unui punct al unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe ce trece prin originea coordonatelor, este egal cu produsul vectorial dintre vectorul viteză unghiulară de rotație și vectorul de poziție al acelui punct.

Deoarece dreapta $\overline{BA}=-\overline{AB}$ (v. fig. 166), din formula (18.4) rezultă $\overline{\omega}\times(-\overline{AB})=\overline{AB}\times\overline{\omega}$ adică

$$\overline{v}=\overline{AB}\times\overline{\omega}. \tag{18.5'}$$

Dar produsul vectorial $AB\times\overline{\omega}$ nu este altceva decît momentul (§ 13) vectorului $\overline{\omega}$ în raport cu punctul A; prin urmare:

Vectorul viteză al unui punct al unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe, este egal cu momentul vectorului viteză unghiulară în raport cu acest punct.

§ 78. Proiecțiile vitezelor punctelor unui solid, care se rotește în jurul unei axe fixe. Din formula (18,5) nu este greu de obținut proiecțiile v_x, v_y, v_z, pe axele Ox, Oy și Oz ale unui

sistem de coordonate fixe, ale vitezei $\bar{v}$, a punctului care aparţine unui solid care se roteşte cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul axei Δ ce trece prin originea O a coordonatelor. Să presupunem că noi căutăm aceste proiecţii pentru un moment oarecare t, şi fie x, y, z coordonatele punctului A în acest moment, iar $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ proiecţiile vectorului $\bar{\omega}$ pe axele $Oxyz$. Avem:

$$\bar{v}=\bar{i}v_x+\bar{j}v_y+\bar{k}v_z,$$
$$\bar{\omega}=\bar{i}\omega_x+\bar{j}\omega_y+\bar{k}\omega_z,$$
$$\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z.$$

Conform § 12 formula (18.5), se poate prezenta sub forma:

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y+\bar{k}v_z=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

De aici, dezvoltînd determinantul cum s-a indicat în § 12, vom obţine:

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y+\bar{k}v_z=\bar{i}(\omega_y z-\omega_z y)+\bar{j}(\omega_z x-\omega_x z)+\bar{k}(\omega_x y-\omega_y x),$$

sau

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\omega_y z-\omega_z y,\\ v_y&=\omega_z x-\omega_x z,\\ v_z&=\omega_x y-\omega_y x.\end{aligned}\right\} \qquad (18.6)$$

Aceste formule aparţin lui Euler şi se numesc *formulele cinematice ale lui Euler*. Proiecţiile vectorului $\bar{\omega}$ pe axele de coordonate se notează uneori prin p, q, r, astfel că vom avea $p=\omega_x$, $q=\omega_y$, $r=\omega_z$. Cu notaţiile (p, q, r), formulele lui Euler au forma.

$$\left.\begin{aligned} v_x&=qz-ry,\\ v_y&=rx-pz,\\ v_z&=py-qx.\end{aligned}\right\} \qquad (18.7)$$

Presupunem acum că axa de rotaţie Δ coincide cu axa Oz. Atunci $\omega_x=\omega_y=0$, şi noi obţinem că $\bar{\omega}=\bar{k}\omega_z$. De aici, în primul rînd, vom avea $v_z=0$, ceea ce trebuia să se întîmple, deoarece atunci cînd axa Δ coincide cu axa Oz, punctul A se mişcă pe o circumferinţă într-un plan perpendicular pe axa Oz; mai departe, din formulele (18.6) obţinem:

$$v_x=-\omega_z y, \quad v_y=+\omega_z x. \qquad (18.8)$$

Acest caz particular al formulelor lui Euler se poate obţine şi pe cale elementară. Deoarece la această mişcare punctul A va rămîne tot timpul într-un plan perpendicular pe axa Oz, atunci pentru el vom avea: $z=\text{const}$, adică vom avea: $v_z=\frac{dz}{dt}=0$. În acest plan, punctul A va descrie un cerc cu raza R şi cu centrul în punctul de intersecţie al acestui plan cu axa Oz. Folosind coordonatele polare ale punctului A, vom obţine:

$$x=R\cos\Theta, \qquad y=R\sin\Theta.$$

De aici vom avea

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-R\sin\Theta\frac{d\Theta}{dt}=-y\frac{d\Theta}{dt},$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=R\cos\Theta\frac{d\Theta}{dt}=x\frac{d\Theta}{dt}.$$

Deoarece după formula (18.1) $\frac{d\Theta}{dt}=\omega$, găsim:

$$v_x=-\omega y \quad v_y=+\omega x,$$

adică ajungem la formulele (18.1) Este evident că aici mărimea ω nu este modulul vitezei unghiulare, ci o mărime algebrică, după cum rezultă din formula (18.1), adică aici $\omega=\omega_z$.

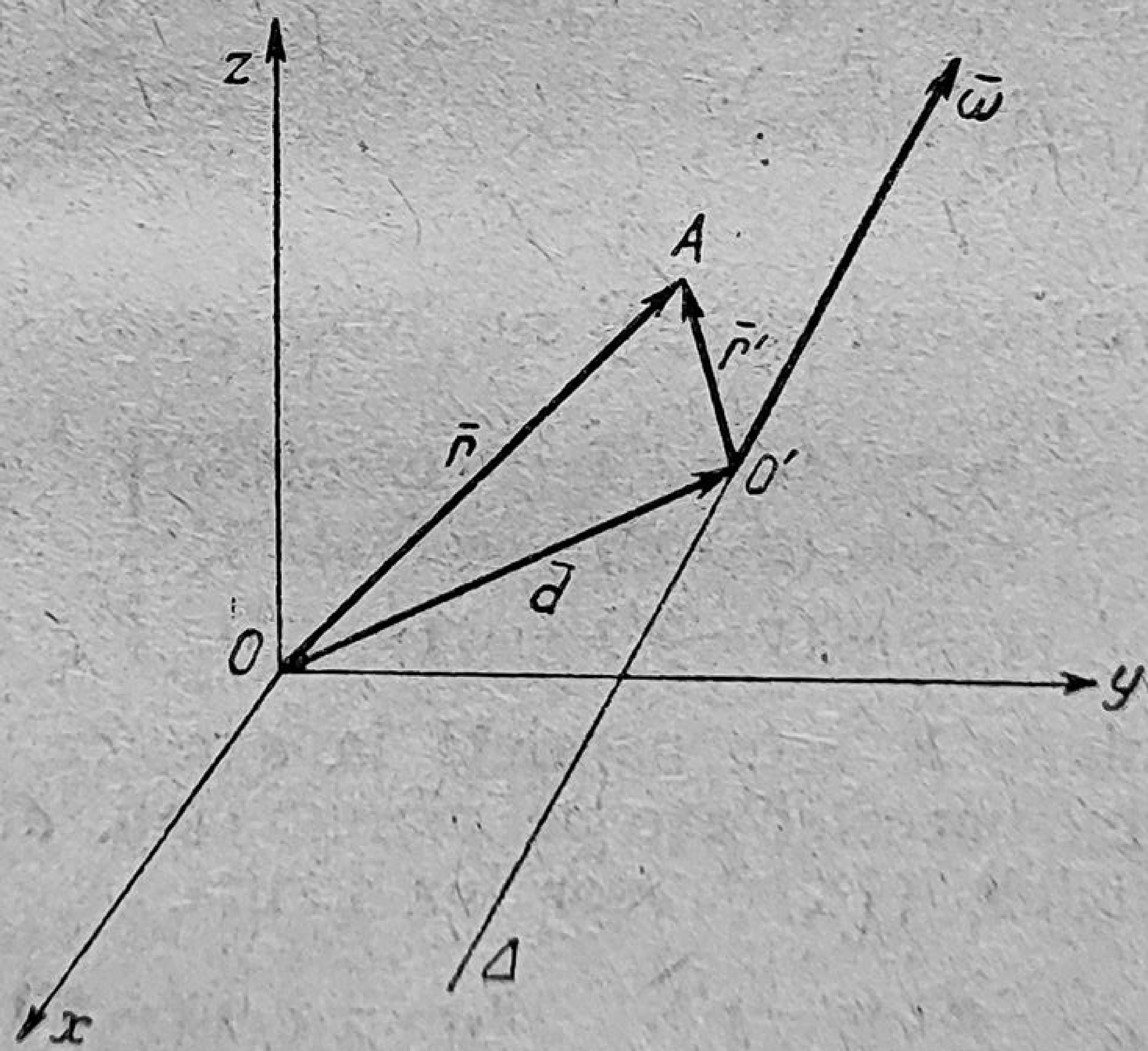


Fig. 168

Să presupunem, că axa de rotaţie Δ nu trece prin originea coordonatelor O (fig. 168). Atunci vom lua pe axă un punct oarecare O' şi vom deplasa de-a lungul axei Δ vectorul $\bar{\omega}$ astfel

încît originea lui să ajungă în punctul O'. Fie punctul A a cărui viteză $\bar{v}$ o căutăm. Să unim punctul O' cu punctul A prin vectorul $\bar{r}'=\overline{O'A}$; atunci vom putea utiliza formula (18.5) şi vom obţine:

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}'.$$

Vom uni punctul O cu punctul A prin vectorul $\bar{r}=\overline{OA}$ şi punctul O cu punctul O' prin vectorul $\bar{d}=\overline{OO'}$. Din fig. 168 se vede că

$$\bar{d}+\bar{r}'=\bar{r},$$

adică

$$\bar{r}'=\bar{r}-\bar{d},$$

De aici vom avea:

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times(\bar{r}-\bar{d}). \tag{18.9}$$

Dacă x', y', z' sînt coordonatele punctului O' în raport cu sistemul de axe $Oxyz$, atunci:

$$\bar{d}=\bar{i}x'+\bar{j}y'+\bar{k}z',$$

$$\bar{r}-\bar{d}=\bar{i}(x-x')+\bar{j}(y-y')+\bar{k}(z-z'),$$

şi vom obţine:

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y+\bar{k}v_z=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x-x' & y-y' & z-z'\end{vmatrix}$$

Dezvoltînd determinantul ca mai sus, vom avea:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\omega_y(z-z')-\omega_z(y-y'),\\ v_y&=\omega_z(x-x')-\omega_x(z-z'),\\ v_z&=\omega_x(y-y')-\omega_y(x-x').\end{aligned}\right\} \tag{18.10}$$

Dacă axa de rotaţie Δ este paralelă la axa Oz, iar x', y' sînt coordonatele urmei acestei axe pe planul Oxy, atunci, deoarece $\omega_x=\omega_y=0$, formulele (18.10) vor lua forma:

$$v_x=-\omega_z(y-y'), \qquad v_y=+\omega_z(x-x'). \tag{18.11}$$

Formulele lui Euler dau proiecţiile vitezei oricărui punct al unui solid care se roteşte în jurul unei axe fixe, şi în oricare moment. Pentru găsirea acestor proiecţii este necesar să se cunoască numai coordonatele punctului considerat în momentul în care se calculează proiecţiile vitezei. Dacă modulul vectorului viteză unghiu-

iară $\overline{\omega}$ variază în decursul timpului, atunci proiecțiile ω_x, ω_y, ω_z, vor fi funcții de timp; totuși, ele pot varia rămînînd proporționale, căci cercetăm cazul cînd axa de rotație rămîne fixă. Este evident că ecuațiile axei Δ, care trece prin punctul de coordonate (x', y', z'), vor fi:

$$\frac{x-x'}{\omega_x}=\frac{y-y'}{\omega_y}=\frac{z-z'}{\omega_z},$$

unde x, y, z, sînt coordonatele curente ale punctelor axei de rotație. Coordonatele (x, y, z) ale fiecărui punct al solidului vor fi neapărat funcții de timp, deoarece fiecare punct se mișcă pe o circumferință în jurul axei de rotație și, prin urmare, coordonatele (x, y, z) ale punctului solidului variază încontinuu.

§ 79. Accelerațiile punctelor unui solid care se rotește în jurul unei axe fixe. Prin mișcarea de rotație a unui solid în jurul unei axe fixe Δ fiecare punct al solidului descrie o circumferință, iar accelerația în timpul mișcării punctului pe circumferință a fost studiată amănunțit în § 73. În acest paragraf, se dă o astfel de expresie pentru vectorul accelerație $\overline{a}$ al unui punct oarecare al solidului care se rotește în jurul unei axe fixe, încît la orice poziție a axei de rotație Δ se pot găsi ușor proiecțiile vectorului $\overline{a}$ pe axele de coordonate; aceste proiecții ale vectorului $\overline{a}$ vor fi calculate în cadrul acestui paragraf. Am avut formula generală (17.2)

$$\overline{a}=\frac{d\overline{v}}{dt}.$$

Presupunînd că axa de rotație Δ a solidului trece prin originea coordonatelor O, obținem din formula (18.5):

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r},$$

prin urmare (§ 65)

$$\overline{a}=\frac{d\overline{v}}{dt}=\frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r}+\omega\times\frac{d\overline{r}}{dt}.$$

Dar derivata $\frac{d\overline{r}}{dt}$ este vectorul viteză $\overline{v}$ al punctului considerat al solidului, de aceea, avem:

$$\overline{a}=\frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r}+\overline{\omega}\times\overline{v}.$$

Produsul vectorial $\bar{\omega}\times\bar{v}$ poate căpăta şi o altă formă. Conform § 12, vom avea:

$$\bar{\omega}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

adică

$$\bar{\omega}\times\bar{v}=\bar{i}\,(\omega_y v_z-\omega_z v_y)+\bar{j}\,(\omega_z v_x-\omega_x v_z)+\bar{k}\,(\omega_x v_y-\omega_y v_x).$$

Vom înlocui aici proiecţiile v_x, v_y, v_z ale vectorului viteză al punctului considerat (x, y, z) al solidului care se roteşte în jurul unei axe fixe Δ, cu expresiile lor după formulele lui Euler (18.6). De exemplu, pentru prima paranteză vom avea:

$$\omega_y v_z-\omega_z v_y=\omega_y(\omega_x y-\omega_y x)-\omega_z(\omega_z x-\omega_x z)=$$
$$=\omega_x\omega_y y+\omega_x\omega_z z-(\omega_y^2+\omega_z^2)\,x.$$

Adăugînd şi scăzînd din partea dreaptă pe $\omega_x^2 x$ vom găsi:

$$\omega_y v_z-\omega_z v_y=\omega_x(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)-(\omega_x^2+\omega_z^2+\omega_z^2)\,x.$$

Dar ştim că (§ 18):

$$\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2=\omega^2,\quad \omega_x x+\omega_y y+\omega_z z=\omega\cdot r.$$

De aceea, vom avea:

$$\omega_y v_z-\omega_z v_y=\omega_x(\bar{\omega}\cdot\bar{r})-\omega^2 x.$$

In mod analog vom obţine:

$$\omega_z v_x-\omega_x v_z=\omega_y(\bar{\omega}\cdot\bar{r})-\omega^2 y;$$

$$\omega_x v_y-\omega_y v_x=\omega_z(\bar{\omega}\cdot\bar{r})-\omega^2 z.$$

Astfel

$$\bar{\omega}\times\bar{v}=(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\,(\bar{i}\omega_x+\bar{j}\omega_y+\bar{k}\omega_z)-\omega^2(\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z),$$

sau

$$\bar{\omega}\times\bar{v}=(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\,\bar{\omega}-\omega^2\bar{r}.$$

Deoarece vectorul $\bar{v}$ este egal cu $\bar{\omega}\times\bar{r}$, vom obţine:

$$\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\,\bar{\omega}-\omega^2\bar{r}. \qquad (18.12)$$

Această formulă pentru calculul dublului produs vectorial se va întîlni și mai departe. În acest fel, formula accelerației $\bar{a}$ capătă forma definitivă:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\,\bar{\omega}-\omega^2\bar{r} \tag{18.13}$$

De aici nu este greu de obținut proiecțiile a_x, a_y, a_z, ale accelerației $\bar{a}$ pe axele de coordonate $Oxyz$. Ținînd seamă de formula (16.21) și de proiecțiile derivatei $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ vom obține:

$$\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{d\omega_x}{dt} & \frac{d\omega_y}{dt} & \frac{d\omega_z}{dt}\\ x & y & z\end{vmatrix}+[\bar{i}\omega_x(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)-\omega^2 x]+$$

$$+\bar{j}[\omega_y(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)-\omega^2 y]+\bar{k}[\omega_z(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)-\omega^2 z].$$

Egalînd între ei coeficienții lui $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ în partea dreaptă și stîngă a acestei egalități, vom ajunge la expresiile căutate:

$$\left.\begin{aligned} a_x&=\frac{d\omega_y}{dt}z-\frac{d\omega_z}{dt}y+\omega_x(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)-\omega^2 x,\\ a_y&=\frac{d\omega_z}{dt}x-\frac{d\omega_x}{dt}z+\omega_y(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)-\omega^2 y,\\ a_z&=\frac{d\omega_x}{dt}y-\frac{d\omega_y}{dt}x+\omega_z(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)-\omega^2 z.\end{aligned}\right\} \tag{18.14}$$

Dacă axa de rotație Δ coincide cu axa Oz, atunci vom avea: $\omega_x=\omega_y=0$. În acest caz, formulele (18.14) capătă următoarea formă:

$$a_x=-\frac{d\omega_z}{dt}y-\omega^2 x,\quad a_y=\frac{d\omega_z}{dt}x-\omega^2 y,\quad a_z=0. \tag{18.15}$$

Calculînd pătratul modulului după formula $a^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, vom găsi:

$$a^2=\left(\frac{d\omega_z}{dt}y+\omega^2 x\right)^2+\left(\frac{d\omega_z}{dt}x-\omega^2 y\right)^2=\left(\frac{d\omega_z}{dt}\right)^2(x^2+y^2)+\omega^4(x^2+y^2).$$

Deoarece x^2+y^2 este pătratul distanței R a punctului la axa Oz, vom avea:

$$a^2=R^2\left[\left(\frac{d\omega_z}{dt}\right)^2+\omega^4\right],$$

ajungem la formula (18.3).

Din formula (18.13) rezultă că vectorul $\overline{a}$ este suma a doi vectori:

$$\overline{a} = \overline{a}' + \overline{a}'',$$

unde

$$\overline{a}' = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} \quad a'' = (\overline{\omega} \cdot r)\,\overline{\omega} - \omega^2 \overline{r}.$$

Dacă viteza unghiulară de rotaţie a solidului este constantă, atunci vom avea $\frac{d\overline{\omega}}{dt} = 0$, şi prin urmare vom avea $\overline{a}' = 0$, adică componenta $\overline{a}'$ a acceleraţiei $\overline{a}$ depinde de variaţia vitezei unghiulare. Dacă rotaţia solidului va fi uniformă, atunci, deoarece toate punctele solidului vor descrie circumferinţe, în mişcare uniformă, acceleraţiile tuturor punctelor solidului, trebuie să fie dirijate spre centrele acestor circumferinţe, adică să fie acceleraţii centripete şi după § 73, trebuie să fie egale cu $R\omega^2$, unde R sînt razele circumferinţelor. Pentru a obţine din acest rezultat proiecţiile a_x'', a_y'', a_z'' ale acceleraţiei $\overline{a}''$, ne vom folosi de fig. 169 şi vom cerceta mişcarea unui punct oarecare A al solidului. Coborînd perpendiculara AP pe axa de rotaţie Δ vom găsi că vectorul acceleraţiei $\overline{a}$ va fi egal cu $\omega^2 \overline{AP}$. Să calculăm proiecţia acestui vector, de exemplu, pe axa Ox, vom avea:

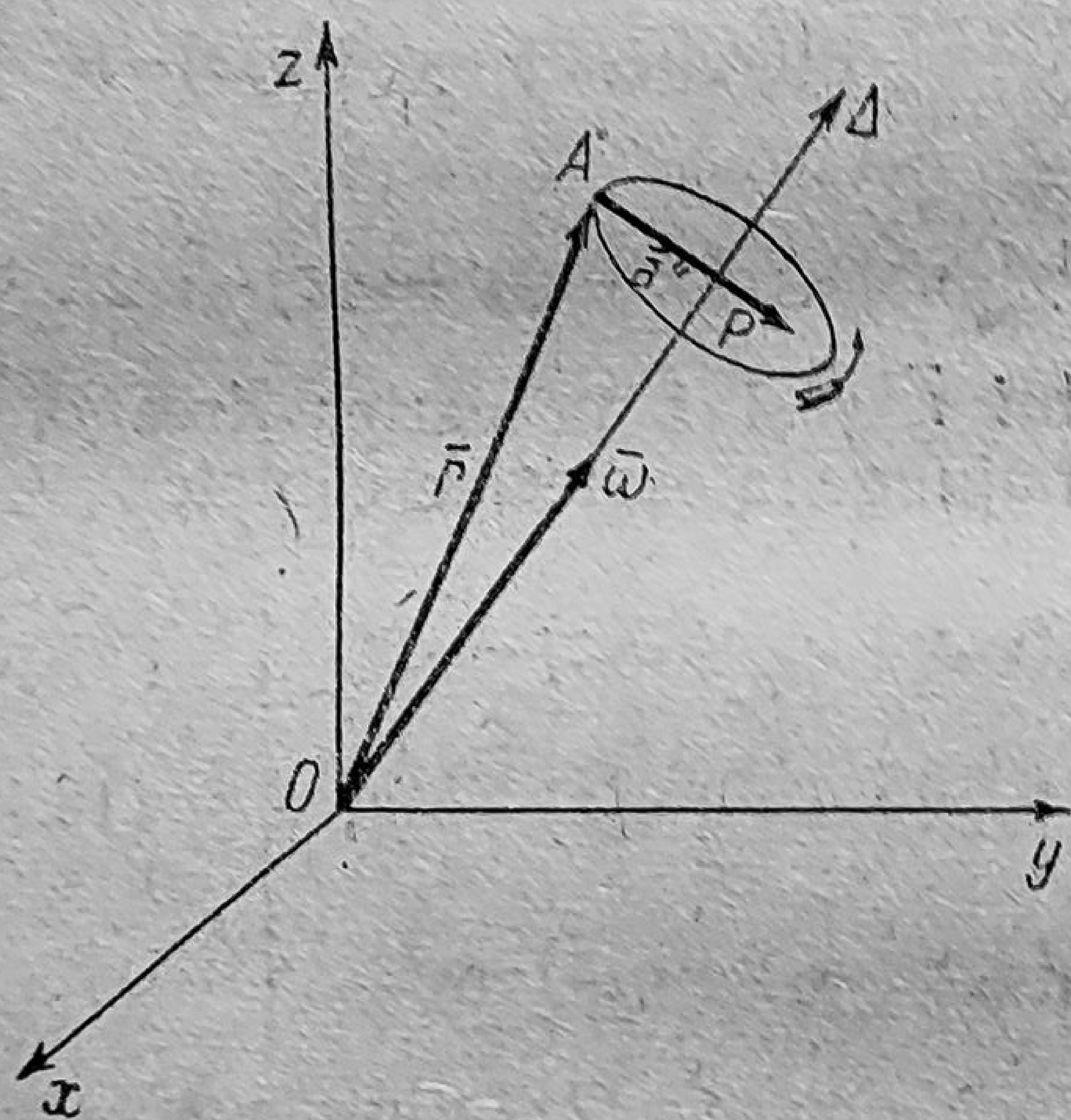


Fig. 169

$$a_x'' = \omega^2 AP_x.$$

Dar din triunghiul AOP avem:

$$\overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OP},$$

adică

$$\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} = \overline{OP} - \overline{r}.$$

Prin urmare, trebuie să avem:

$$AP_x = OP_x - x.$$

Pentru a obține pe OP_x, observăm că vom avea:

$$OP = OA \cos(\widehat{AOP}).$$

Vom nota unghiurile formate de axa de rotație Δ cu axele de coordonate, prin α, β, γ și vom nota prin $\bar{\Delta}^0$ vectorul unitar, al axei Δ. Atunci, conform § 18, vom avea:

$$OA \cos(\widehat{AOP}) = \overline{OA} \cdot \bar{\Delta}^0;$$

deoarece proiecțiile vectorului unitar $\bar{\Delta}^0$ pe axele de coordonate sînt $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, atunci în baza aceluiași § 18 obținem:

$$OP = \overline{OA} \cdot \bar{\Delta}^0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

De aceea, deoarece vectorul OP este situat de-a lungul axei Δ,

$$OP_x = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\alpha.$$

În acest fel, găsim:

$$AP_x = OP_x - x = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\alpha - x.$$

Ținînd seamă de egalitățile:

$$\omega_x = \omega\cos\alpha, \quad \omega_y = \omega\cos\beta, \quad \omega_z = \omega\cos\gamma,$$

din formula $a''_x = \omega^2 AP_x$ vom obține:

$$a''_x = \omega^2 (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\alpha - \omega^2 x,$$

sau

$$a''_x = \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x,$$

adică ajungem la rezultatul stabilit prin prima formulă (18.14).

Se mai poate lămuri semnificația vectorului $\bar{a}''$ pornind de la formula

$$\bar{a}'' = (\bar{\omega} \cdot \bar{r})\bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}.$$

În adevăr, avem:

$$\bar{\omega} \cdot \bar{r} = \omega r \cos(\bar{\omega}, \bar{r}) \text{ și } \bar{\omega} = \omega \bar{\omega}^0;$$

prin urmare, vom avea:

$$\bar{a}'' = \omega^2 r \cos(\bar{\omega}, \bar{r})\bar{\omega}^0 - \omega^2 \bar{r} = \omega^2 [r\cos(\bar{\omega}, \bar{r})\bar{\omega}^0 - \bar{r}],$$

sau

$$\bar{a}'' = \omega^2(\overline{OP} - \overline{OA}) = \omega^2 \overline{AP}.$$

In acest fel, direct din formula vectorială a lui $\bar{a}''$ se deduce că $\bar{a}''$ este acceleraţia centripetă.

In cercetările precedente am presupus că axa de rotaţie Δ a solidului, trece prin originea O a coordonatelor. Desigur, la fel ca şi cu ocazia deducerii formulelor pentru viteză, ne putem dispensa de această limitare. Vom face această transformare pentru cazul cînd axa de rotaţie Δ va fi paralelă la axa Oz dar nu va coincide cu ea, ci va întretăia planul Oxy într-un punct oarecare cu coordonatele (ξ, η). Evident că, în acest caz, bazîndu-ne pe formulele de transformare a originii coordonatelor, vom obţine următoarele expresii pentru proiecţiile a_x, a_y, a_z ale acceleraţiei a:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -\frac{d\omega_z}{dt}(y-\eta)-\omega^2(x-\xi), \\ a_y &= +\frac{d\omega_z}{dt}(x-\xi)-\omega^2(y-\eta). \end{aligned}\right\} \qquad (18.16)$$

$$a_z=0.$$

Ridicîndu-le la pătrat şi adunînd, vom avea:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\left[\left(\frac{d\omega_z}{dt}\right)^2+\omega^4\right]\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]}=$$

$$=R\sqrt{\left(\frac{d\omega_z}{dt}\right)^2+\omega^4}, \qquad (18.17)$$

unde ca şi mai înainte $R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ este distanţa de la punctul considerat la axa de rotaţie Δ.

§ 80. Exemple. 55. O placă dreptunghiulară, perpendiculară pe planul desenului, a cărei urmă pe acest plan este AB, execută o mişcare de translaţie cu viteza constantă w care formează unghiul β cu direcţia AB (fig. 170). Afară de aceasta, placa oscilează prin translaţie cu viteza variabilă $v(t)$ în jurul poziţiei ei mijlocii în direcţia perpendiculară pe viteza w. Să se găsească unghiul α format de viteza mişcării compuse şi placă. Deoarece placa se găseşte în mişcare de translaţie, vitezele tuturor punctelor plăcii vor fi egale între ele. Să examinăm un punct oarecare C al plăcii, situat pe urma AB, şi să presupunem că placa se ridică; atunci, după cum se vede din fig. 170, vom avea:

$$\alpha=\beta-\varepsilon,$$

unde $\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{v(t)}{w}$. Dacă placa ar coborî, am avea:

$$\alpha=\beta+\varepsilon.$$

Vom uni amîndouă aceste formule într-una singură.

$$\alpha=\beta\mp\varepsilon.$$

De aici avem:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta\mp\varepsilon)=\frac{\operatorname{tg}\beta\mp\operatorname{tg}\varepsilon}{1\pm\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\varepsilon},$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\beta\mp\frac{v}{w}}{1\pm\frac{v}{w}\operatorname{tg}\beta}.$$

Dacă valoarea maximă a vitezei $v(t)$ este mică în comparație cu w, atunci se poate pune cu aproximație $\operatorname{tg}\varepsilon=\varepsilon$; de aceea, vom avea $\varepsilon=\frac{v(t)}{w}$, și vom obține formula aproximativă:

$$\alpha=\mp\frac{v(t)}{w}.$$

Presupunem că oscilațiile plăcii cu viteza $v(t)$ se fac după legea de oscilație armonică $v(t)=\frac{2\pi a}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$, unde a este amplitudinea oscilațiilor, iar T — perioada oscilațiilor, dacă raportul $\frac{a}{T}$ este mic în comparație cu valoarea vitezei w, atunci, aplicînd formula precedentă, vom obține:

$$\alpha=\beta-\frac{2\pi a}{wT}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right),$$

unde ambele semne sînt deja incluse în funcția cosinus, deoarece la ridicare cosinusul va fi pozitiv, iar la coborîre negativ. Acest fenomen se produce

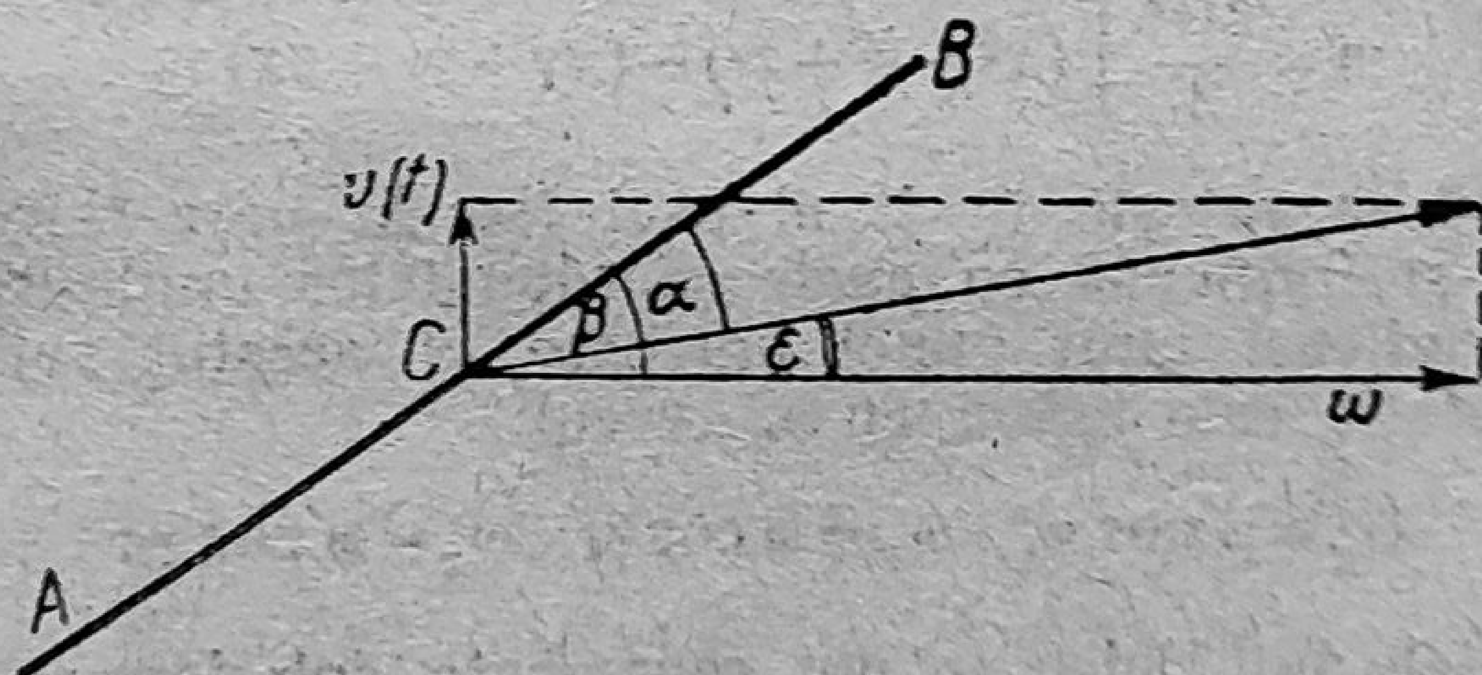


Fig. 170

în aviație, cînd unghiul β de atac al aripii avionului devine unghiul de atac α din cauza oscilațiilor aripii, perpendiculare pe viteza avionului (cazul aripii de avion).

56. Să se determine proiecțiile vitezelor punctelor unui solid, pentru cazurile cînd solidul se rotește în jurul axei Ox, axei Oy și axei Oz. Aplicînd formulele (18.6) ale lui Euler, trebuie să presupunem succesiv:

$$\omega_x=\omega,\quad \omega_y=\omega_z=0;\quad \omega_y=\omega,\quad \omega_x=\omega_z=0;\quad \omega_z=\omega,\quad \omega_x=\omega_y=0.$$

Vom obţine respectiv:

Ox	Oy	Oz
$v_x=0,$	$v_x=+\omega z,$	$v_x=-\omega y,$
$v_y=-\omega z,$	$v_y=0,$	$v_y=+\omega x,$
$v_z=+\omega y;$	$v_z=-\omega x;$	$v_z=0.$

57. Să se determine pătratul vitezei unui punct oarecare al unui solid, care se roteşte cu viteza unghiulară ω în jurul axei Δ, care trece prin originea O a coordonatelor şi formează cu axele coordonatelor, unghiuri egale. Deoarece:

$$\omega_x=\omega\cos\alpha, \quad \omega_y=\omega\cos\beta, \quad \omega_z=\omega\cos\gamma.$$

iar

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

atunci dacă $\alpha=\beta=\gamma$, obţinem:

$$\omega_x=\omega\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_y=\omega\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_z=\omega\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aplicînd formulele (18.6) ale lui Euler, vom avea:

$$v_x=\frac{\omega}{\sqrt{3}}(z-y), \quad v_y=\frac{\omega}{\sqrt{3}}(x-z), \quad v_z=\frac{\omega}{\sqrt{3}}(y-x).$$

De aici găsim:

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=\frac{\omega^2}{3}\left[(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2\right],$$

sau.

$$v^2=\frac{2\omega^2}{3}\left[(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\right].$$

58. Un solid se roteşte în jurul axei fixe Δ, care trece prin originea coordonatelor O şi formează cu axele coordonatelor unghiurile α, β, γ. Să se afle pătratul vitezei unui punct oarecare al acestui solid, dacă viteza unghiulară de rotaţie este egală cu ω. Avem:

$$\omega_x=\omega\cos\alpha, \quad \omega_y=\omega\cos\beta, \quad \omega_z=\omega\cos\gamma;$$

de aceea, formulele lui Euler se pot reprezenta sub forma:

$$v_x=\omega(z\cos\beta-y\cos\gamma), \quad v_y=\omega(x\cos\gamma-z\cos\alpha),$$
$$v_z=\omega(y\cos\alpha-x\cos\beta).$$

De aici găsim:

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=\omega^2\left[(z\cos\beta-y\cos\gamma)^2+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)^2+\right.$$
$$\left.+(y\cos\alpha-x\cos\beta)^2\right],$$

sau:

$$v^2=\omega^2\left[(z^2+y^2)\cos^2\alpha+(x^2+z^2)\cos^2\beta+(y^2+x^2)\cos^2\gamma-\right.$$
$$\left.2zy\cos\beta\cos\gamma-2xz\;\mathrm{coh}\,\gamma\cos\alpha-2yx\cos\alpha\cos\beta\right].$$

59. Să se găsească proiecțiile momentului $\overline{J}$ al vitezei unui punct oarecare al solidului care se rotește cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ în jurul unei axe fixe Δ, care trece prin originea O a axelor de coordonate. Conform § 11—13, avem:

$$J_x = yv_z - zv_y, \quad J_y = zv_x - xv_z, \quad J_z = xv_y - yv_x.$$

Aplicînd expresiei pentru J_x, formulele (18.16) ale lui Euler, vom obține:

$$J_x = y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z),$$

sau

$$J_x = \omega_x y^2 + \omega_x z^2 - \omega_y xy - \omega_z xz.$$

Adunînd și scăzînd din partea dreaptă, produsul $\omega_x x^2$, vom avea:

$$J_x = \omega_x (x^2 + y^2 + z^2) - x(\omega_x x - \omega_y y + \omega_z z).$$

Introducînd vectorul de poziție al punctului și expresia produsului scalar, găsim:

$$J_x = \omega_x r^2 - (\overline{\omega} \cdot \overline{r})\, x;$$

în mod analog pentru mărimile J_y și J_z, vom obține:

$$J_y = \omega_y r^2 - (\overline{\omega} \cdot \overline{r})\, y, \quad J_z = \omega_z r^2 - (\overline{\omega} \cdot \overline{r})\, z.$$

60. Să se găsească proiecțiile accelerației unui punct al solidului care se rotește cu o viteză unghiulară constantă $\overline{\omega}$ în jurul axei Δ care trece prin originea O a coordonatelor și formează unghiuri egale cu axele de coordonate. Avem:

$$\omega_x = \omega \cos\alpha, \quad \omega_y = \omega \cos\beta, \quad \omega_z = \omega \cos\gamma,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Deoarece $\alpha = \beta = \gamma$, vom obține:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}}.$$

De aceea, din formulele (18.14) găsim:

$$a_x = \frac{\omega^2}{3}(x + y + z) - \omega^2 x,$$

$$a_y = \frac{\omega^2}{3}(x + y + z) - \omega^2 y,$$

$$a_z = \frac{\omega^2}{3}(x + y + z) - \omega^2 z,$$

sau:

$$a_x = \frac{\omega^2}{3}(z + y - 2x), \quad a_y = \frac{\omega^2}{3}(x + z - 2y), \quad a_z = \frac{\omega^2}{3}(x + y - 2z).$$

De aici vom avea pentru pătratul accelerației:

$$a^2 = \frac{2\omega^4}{3}\left[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)\right].$$

CAPITOLUL XIX

MIŞCAREA PLAN PARALELĂ A SOLIDULUI

§ 81. Studiul geometric al deplasărilor solidului în mişcarea plan paralelă. In cadrul staticii s-a consacrat sistemului plan de forţe un capitol special, capitolul IX din prezentul curs de mecanică. Şi în cinematică se consacră un capitol special cazului analog de mişcare a solidului, adică acelui caz al cărui studiu ne duce la cercetarea sistemelor de deplasări, viteze şi acceleraţii, situate în acelaşi plan. O asemenea mişcare poate fi definită astfel:

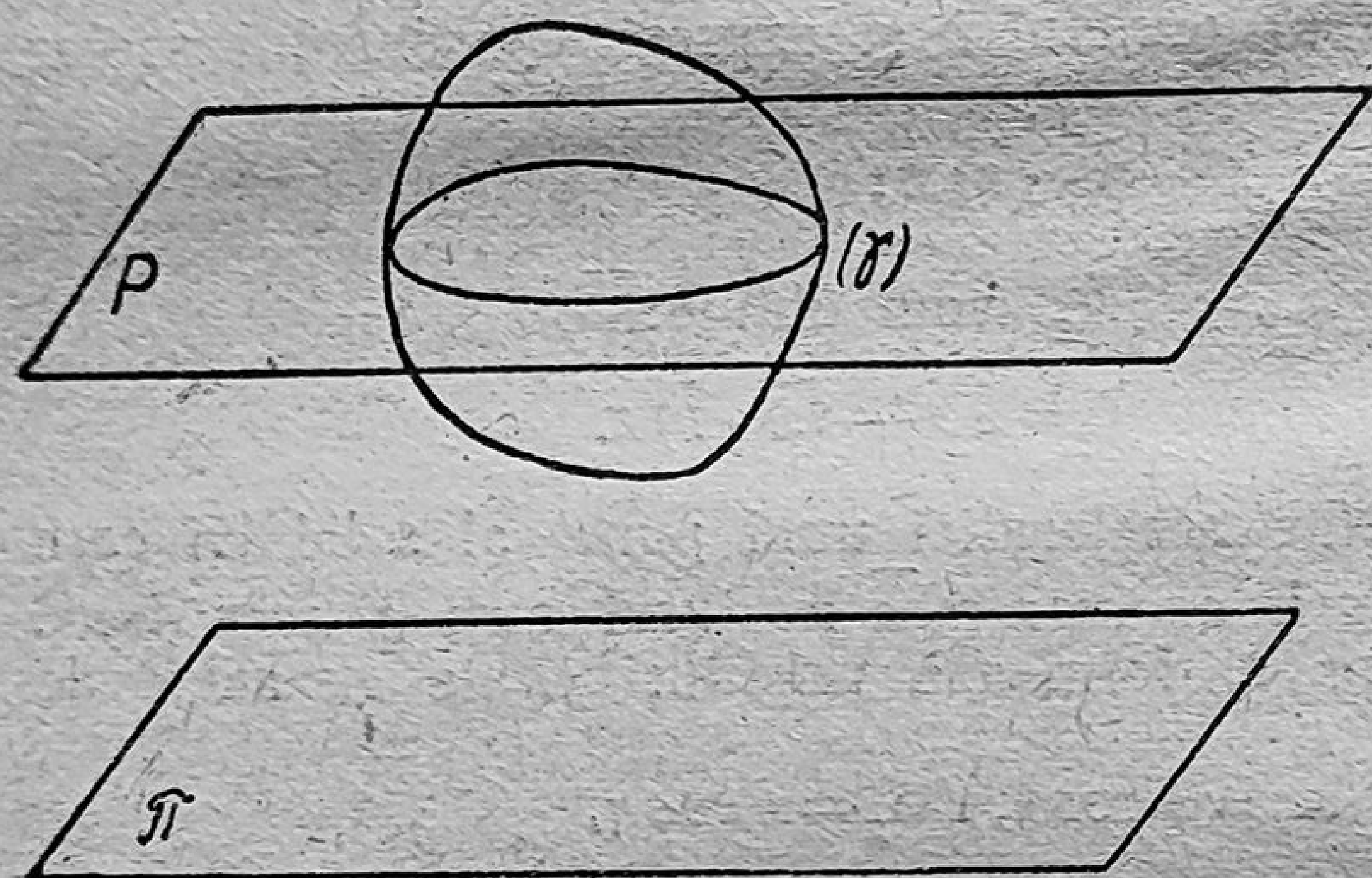


Fig. 171

Dacă în mişcarea unui solid toate punctele lui se deplasează paralel cu un plan oarecare, această mişcare a solidului se numeşte mişcare plan-paralelă, sau mişcare plană.

Asemenea mişcare a solidului este foarte importantă, deoarece ea are loc la foarte multe maşini şi mecanisme.

Să presupunem că un solid se găseşte într-o mişcare plan paralelă, fie π planul paralel cu care se produce mişcarea tuturor punctelor solidului (fig. 171). Ducem planul P, paralel cu planul π, astfel încît el să intersecteze corpul considerat; prin secţionare vom obţine o suprafaţă mărginită de conturul (γ). Evident, că prin deplasarea solidului considerat, figura plană mărginită de conturul (γ) se va deplasa în planul P. Astfel, *în loc să studiem mişcarea plană paralelă a solidului, este suficient să studiem mişcarea acestei figuri plane în planul ei.*

Se observă ușor că două puncte ale acestei figuri plane determină poziția ei în planul P, adică în loc să urmărim mișcarea figurii plane în planul ei, este suficient să urmărim mișcarea a două puncte oarecare ale ei, de exemplu, punctele A și B, din acest plan (fig. 172). Deoarece punctele A și B determină pe deplin segmentul AB, tragem de aici concluzia că studiul mișcării figurii plane în planul ei, se reduce la studiul mișcării unui segment de dreaptă în acest plan.

Să presupunem că la început figura plană ocupă poziția I; apoi, deplasîndu-se în planul ei, ea ocupă poziția a II-a (fig. 173). Observăm că aici nu ne interesează legea după care se produce

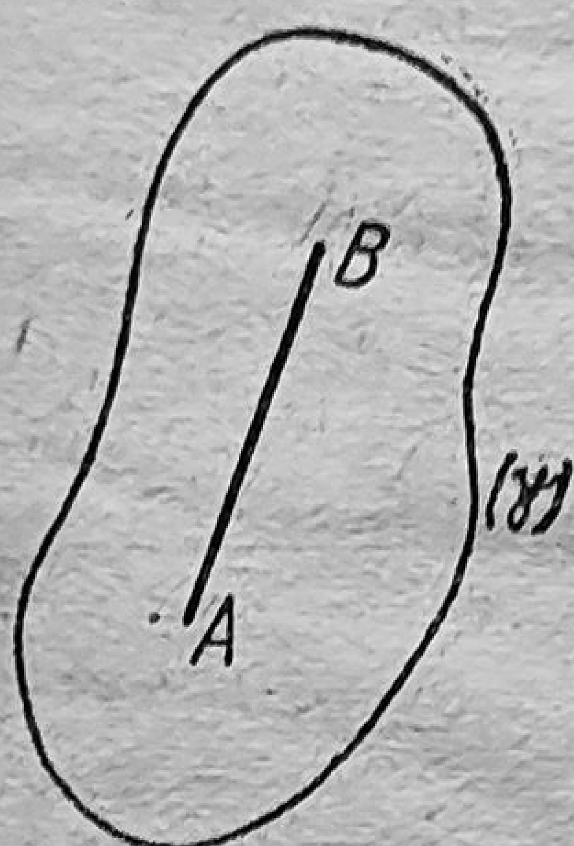


Fig. 172

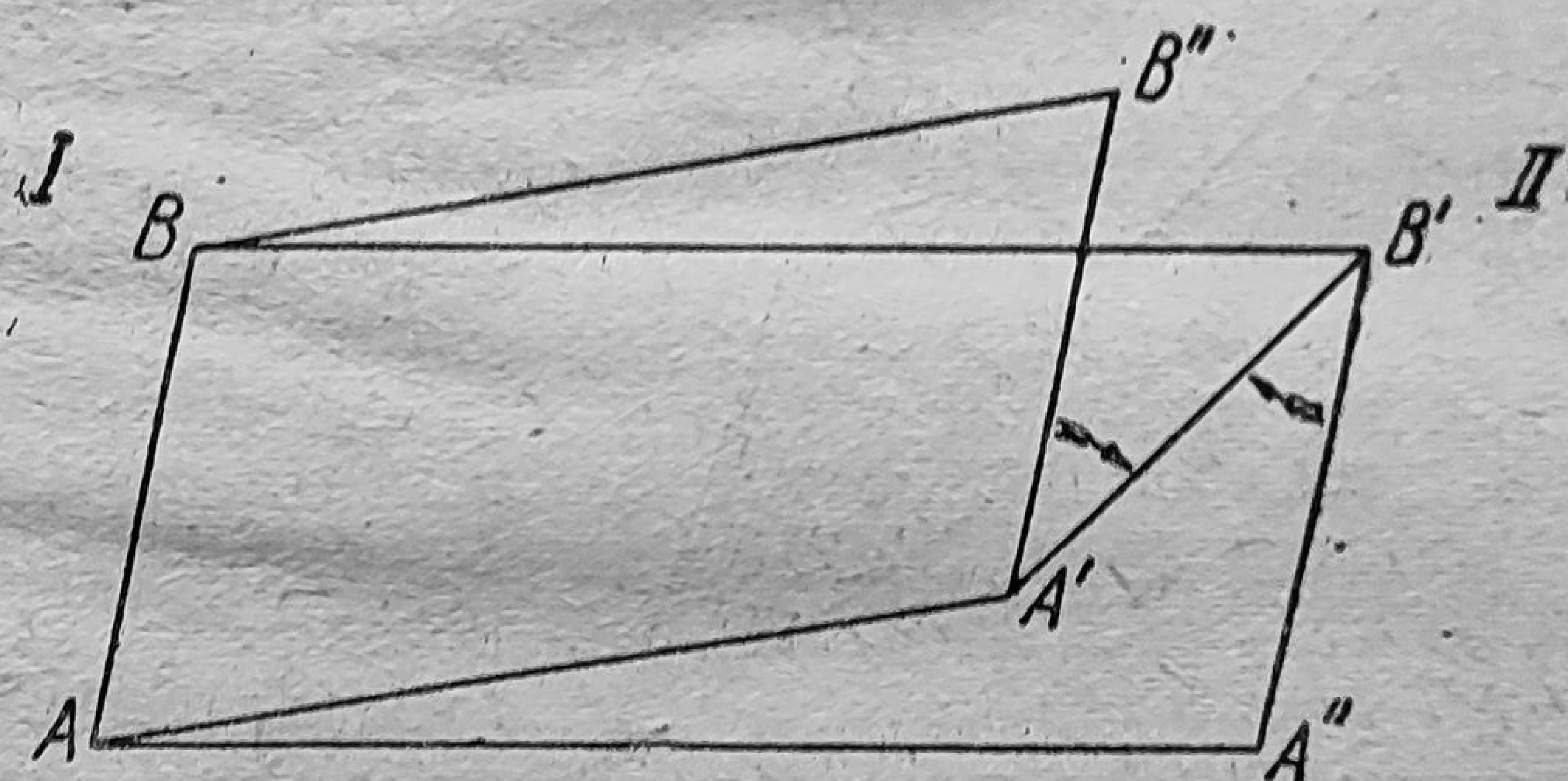


Fig. 173

deplasarea figurii din poziția I în poziția a II-a; putem chiar ignora această lege, deoarece noi examinăm numai cele două poziții I și II ale acestei figuri. Vom dovedi că *figura plană se poate totdeauna deplasa din poziția I în poziția a II-a printr-o mișcare de translație (§ 76) și printr-o mișcare de rotație.* În adevăr, vom lua în figura considerată în poziția ei I, un segment de dreaptă oarecare AB. În poziția a II-a a figurii plane, acest segment va trece în poziția $A'B'$. Unim între ele punctele A și A' prin dreapta AA' și ducem segmentul $BB'' \# AA'$. Vedem că deplasarea segmentului din poziția AB în poziția $A'B'$ se poate obține printr-o translație AA' care mută segmentul din poziția AB în poziția $A'B''$ și printr-o deplasare de rotație în jurul punctului A', sub unghiul $B''A'B'$ care deplasează segmentul din poziția $A'B''$ în poziția $A'B'$. Astfel, teorema este demonstrată. Observăm că *în timp ce mișcarea de translație va fi în general diferită pentru diversele puncte ale figurii plane, mărimea și sensul unghiului de rotație al figurii plane vor fi totdeauna aceleași.* În adevăr, vom face aceeași construcție ca și mai sus,

pentru punctul B; anume, vom uni printr-o dreaptă punctul B cu punctul B' şi vom duce segmentul $AA'' \# BB'$. Vedem că se poate deplasa segmentul AB în poziţia $A'B'$ printr-o translaţie BB', care mută segmentul AB în poziţia $A''B'$ şi printr-o rotaţie în jurul punctului B' sub unghiul $A''B'A''$, care mută segmentul din poziţia $A''B'$ în poziţia $A'B'$. Dar, în timp ce deplasările de translaţie AA' şi BB' sînt în general diferite, unghiurile de rotaţie $B''A'B'$ şi $A''B'A'$ sînt egale între ele ca unghiuri alterne interne la două drepte paralele şi ambele rotiri se fac în acelaşi sens, şi anume, pentru fig. 173 în sensul acelor unui ceasornic.

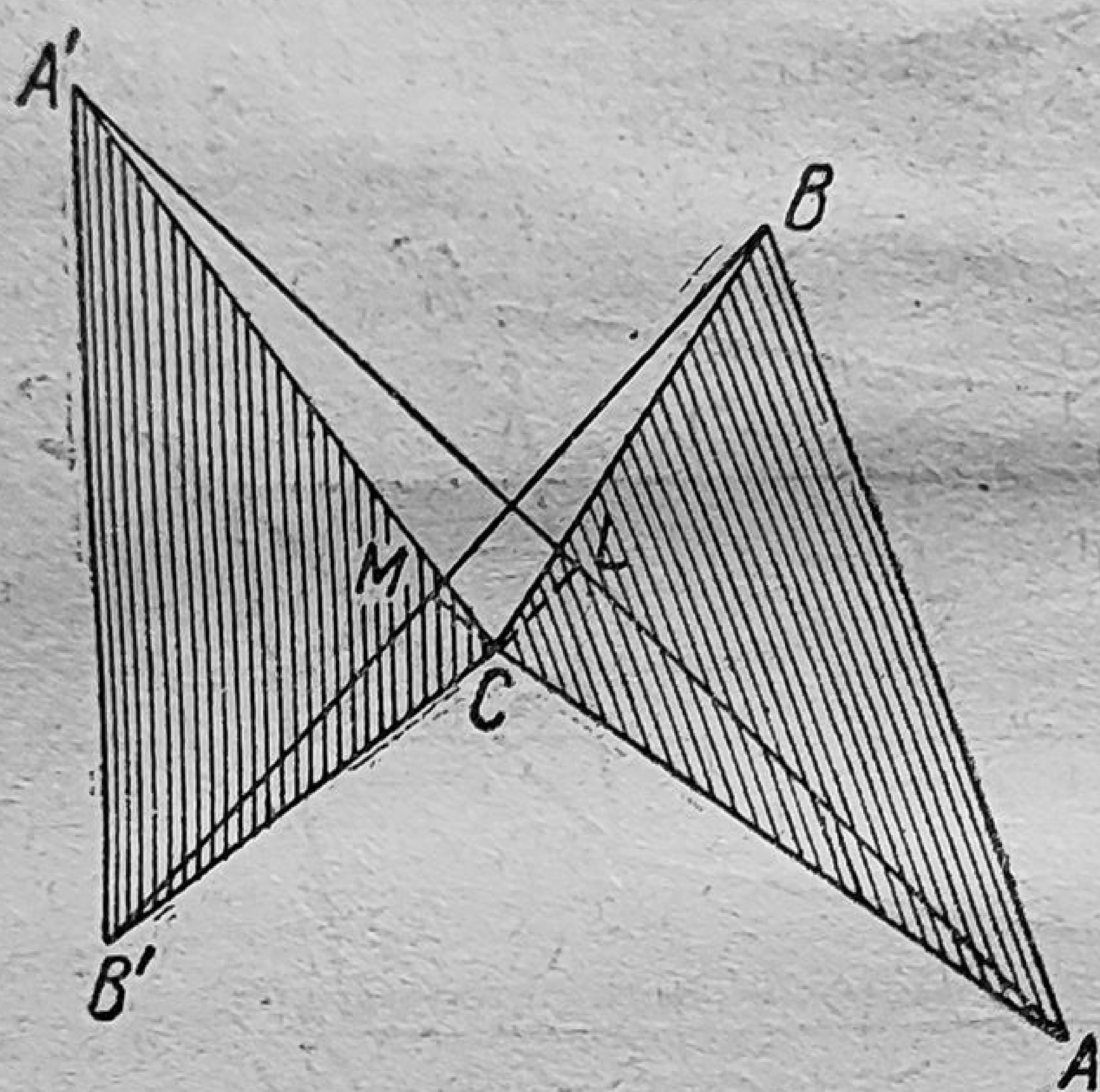


Fig. 174

Vom dovedi acum că amîndouă aceste mişcări, de translaţie şi de rotaţie, se pot înlocui printr-o singură mişcare de rotaţie, cu alte cuvinte vom demonstra următoarea teoremă:

Figura plană se poate totdeauna deplasa în planul ei, dintr-o poziţie în alta, prin rotirea ei în jurul unui anumit punct.

Vom lua în figura plană un segment oarecare de dreaptă AB şi vom presupune că din cauza deplasării figurii plane, segmentul AB trece în poziţia $A'B'$ (fig. 174). Unim prin drepte punctul A cu A' şi punctul B cu B'. Dacă segmentul AB se poate muta în poziţia $A'B'$ prin rotirea în jurul unui centru oarecare, atunci punctul A trebuie să treacă în A' descriind o circumferinţă şi punctul B trebuie să treacă în B' descriind o circumferinţă concentrică; de aceea, segmentele AA' şi BB' vor fi coardele acestor circumferinţe. Bazîndu-ne pe o teoremă din geometria elementară, vom ridica în mijloacele L şi M ale coardelor AA' şi BB' perpendiculare pe aceste coarde; perpendicularele ridicate se vor intersecta într-un punct C care trebuie să fie centrul de rotaţie. În adevăr, unim punctul C cu punctele A, B, A', B'. Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ vor fi egale între ele ca fiind triunghiuri cu laturi egale; în adevăr, avem: $A'B'=AB$ şi $CA=CA'$, $CB=CB'$ ca oblice egal depărtate de perpendicularele CL şi CM. De aici, urmează că rotind triunghiul ABC în jurul punctului C în sens pozitiv, sub unghiul ACA' îl vom aduce să coincidă cu triunghiul $A'B'C$, adică vom muta segmentul AB în poziţia $A'B'$ printr-o

rotaţie în jurul centrului C sub unghiul ACA'. Evident, că segmentul AB se poate aduce să coincidă cu segmentul $A'B'$ prin rotirea triunghiului ABC în jurul punctului C şi în sens negativ, adică în sensul acelor unui ceasornic. În cazul fig. 174, unghiul de rotaţie în sens negativ va fi mai mare decît unghiul de rotaţie în sens pozitiv. Vom alege totdeauna, în lipsa unor indicaţii speciale, pentru rotaţie cel mai mic unghi, dintre cele două unghiuri de rotaţie posibile.

Există cîteva cazuri speciale în care teorema precedentă nu conduce la soluţii practice. Să presupunem anume că $AB \| A'B'$

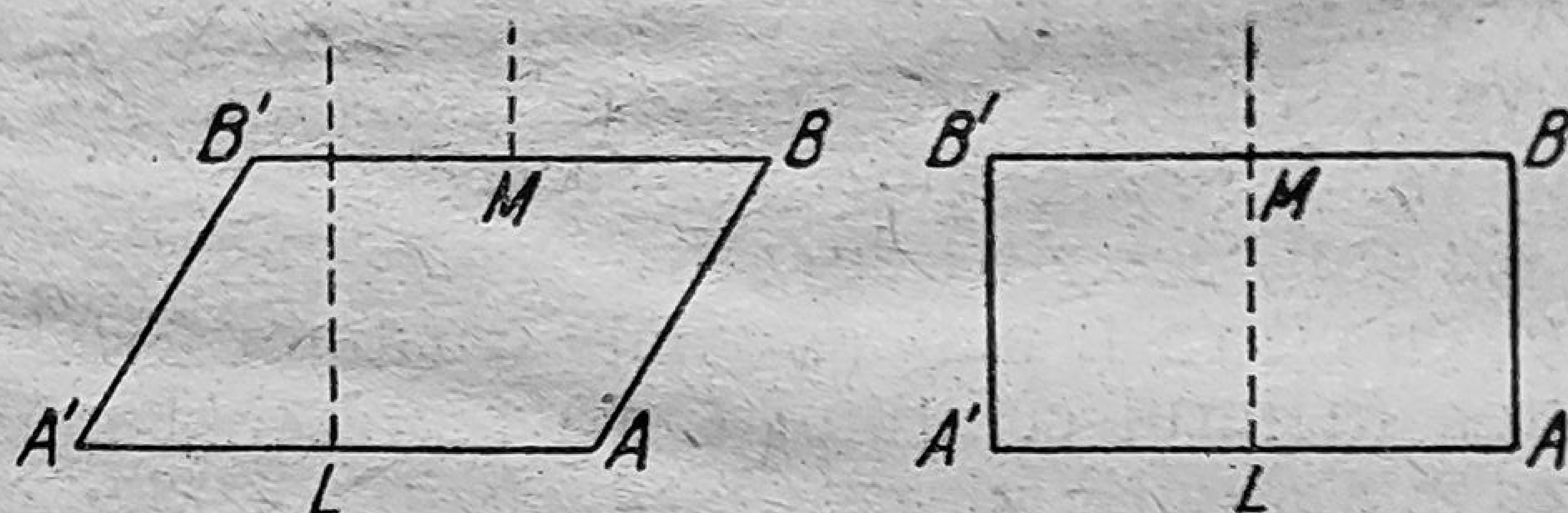


Fig. 175

după cum se arată în fig. 175. Executînd construcţia precedentă, noi vom găsi că perpendicularele ridicate din mijloacele L şi M ale segmentelor AA' şi BB' sau vor fi paralele între ele, sau se vor confunda. Dar, evident că în ambele cazuri centrul de rotaţie se găseşte la infinit, şi deplasarea segmentului AB se reduce la o deplasare de translaţie.

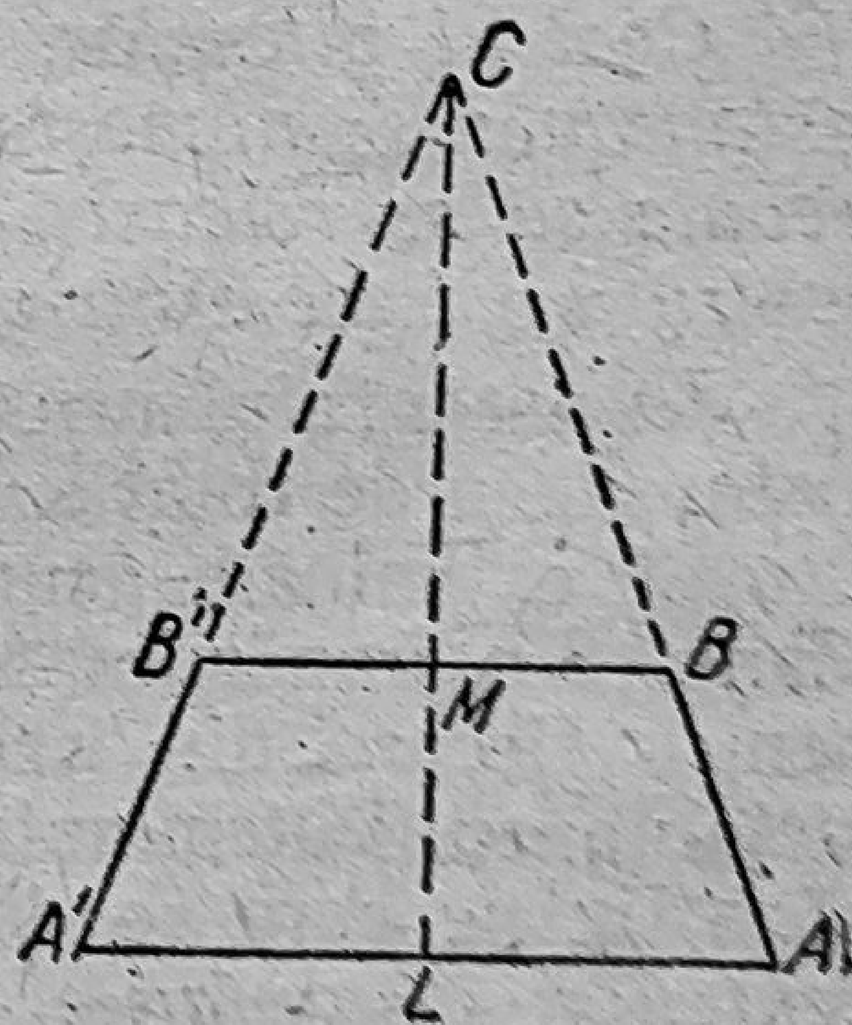


Fig. 176

Să presupunem apoi, că figura $ABB'A'$ va fi un trapez isoscel (fig. 176), în acest caz, perpendicularele pe AA' şi BB' în punctele L şi M vor coincide de asemenea, şi evident că punctul de rotaţie va fi punctul C care se află la întretăierea prelungirii laturilor trapezului AA şi $A'B'$.

Pînă acum am cercetat numai două poziţii: I şi II ale figurii plane, fără să ne punem întrebarea, în ce mod într-o deplasare reală, figura plană trece din poziţia I în poziţia a II-a. În general trecerea figurii plane din poziţia I în poziţia a II-a, printr-o singură rotaţie ar putea să nu reprezinte deplasarea reală a

figurii plane. Să presupunem acum că examinăm o deplasare *reală* foarte mică a figurii plane, la care poziţia a II-a va fi foarte apropiată de poziţia I. Aici la deplasarea reală, punctul A va trece într-un punct foarte apropiat A' descriind un arc foarte mic $\widehat{AA'}$ al unei curbe oarecare, iar punctul B va trece într-un punct foarte apropiat B', descriind un arc foarte mic $\widehat{BB'}$ al unei alte curbe oarecare. Vom face acum deplasarea figurii din poziţia I în poziţia a II-a printr-o rotaţie, găsind pentru aceasta centrul corespunzător C. Evident, că prin această mişcare de rotaţie, punctul A va descrie un arc de cerc foarte mic $\widehat{AA'}$ şi punctul B va descrie un arc de cerc foarte mic $\widehat{BB'}$, iar aceste arce de cerc vor fi foarte apropiate de acele arce de curbă foarte mici, care au fost descrise de către aceste puncte în deplasare reală. Astfel, cu cît va fi mai apropiată poziţia a II-a de poziţia I, cu atît rotirea în jurul centrului C va reprezenta mai precis deplasarea reală a figurii plane. Dacă poziţia a II-a va fi foarte apropiată de poziţia I, atunci la limită vom obţine un punct în jurul căruia rotirea sub un unghi infinit mic, reprezintă o deplasare reală infinit mică. Acest punct C se numeşte *centrul vitezelor, centrul instantaneu de rotaţie sau pol instantaneu*. De aici obţinem următoarea definiţie:

Centrul vitezelor, centrul instantaneu de rotaţie sau polul instantaneu se numeşte poziţia limită a punctului în jurul căruia trebuie să se rotească sub un unghi infinit mic, o figură plană, pentru a o trece dintr-o poziţie în alta, infinit apropiată de prima.

În paragraful următor ni se va da o altă defintie a centrului instantaneu de rotaţie, mai comodă pentru calcule.

Să examinăm acum o deplasare oarecare finită a unei figuri plane. S-o împărţim într-un număr de deplasări infinit mici şi pentru fiecare din aceste deplasări construim cîte un centru instantaneu. Putem nota poziţiile acestor centre instantanee într-un plan fix pe care se deplasează figura plană; *locul geometric al centrelor instantanee de rotaţie într-un plan fix, se numeşte centroidă fixă sau bază.*

Să ne imaginăm că planul figurii plane mobile este prelungit la infinit, astfel că, prin deplasarea figurii plane, planul mobil legat de ea alunecă pe cel fix. Putem de asemenea să notăm poziţiile centrelor instantanee şi pe acest plan mobil; *locul geometric al centrelor instantanee de rotaţie în planul mobil, se numeşte centroidă mobilă sau ruletă.*

Pentru a ne forma o imagine mai clară asupra celor expuse mai sus, se pot efectua următoarele construcţii. Pe o coală de hîrtie se desenează o serie de poziţii apropiate ale segmentului AB, aşa cum se arată în fig. 177. Apoi se determină pe această coală de hîrtie poziţiile centrului C_1 pentru trecerea de la AB la A_1B_1, centrului C_2 pentru trecerea din A_1B_1 în A_2B_2, centrului C_3 pentru trecerea din A_2B_2 în A_3B_3 etc. Locul geometric al punctelor C_1, C_2, C_3, ... la limită va fi centroida fixă sau baza. Mai departe trebuie luată o bucată de hîrtie de calc, transparentă şi desenat pe ea un segment egal cu segmentul AB. Apoi se aplică hîrtia de calc în aşa fel, încît segmentul de pe ea să coincidă cu segmentul AB de pe hîrtie, înfigem prin calc un ac în punctul C_1 şi rotim calcul în jurul acului în aşa fel, încît segmentul de pe el, plecînd de pe AB, să coincidă cu segmentul A_1B_1 de pe hîrtie; după aceea scoatem acul din punctul C_1, îl înfigem prin calc în punctul C_2 şi întoarcem calcul în aşa fel, încît segmentul de pe calc plecînd de pe A_1B_1 va coincide cu segmentul A_2B_2 pe hîrtie, iar gaura făcută în calc va pleca de pe punctul C_1 etc. Astfel, găurile în calc vor reprezenta locul centrelor de rotaţie în planul mobil, care la limită va da centroida mobilă (ruleta).

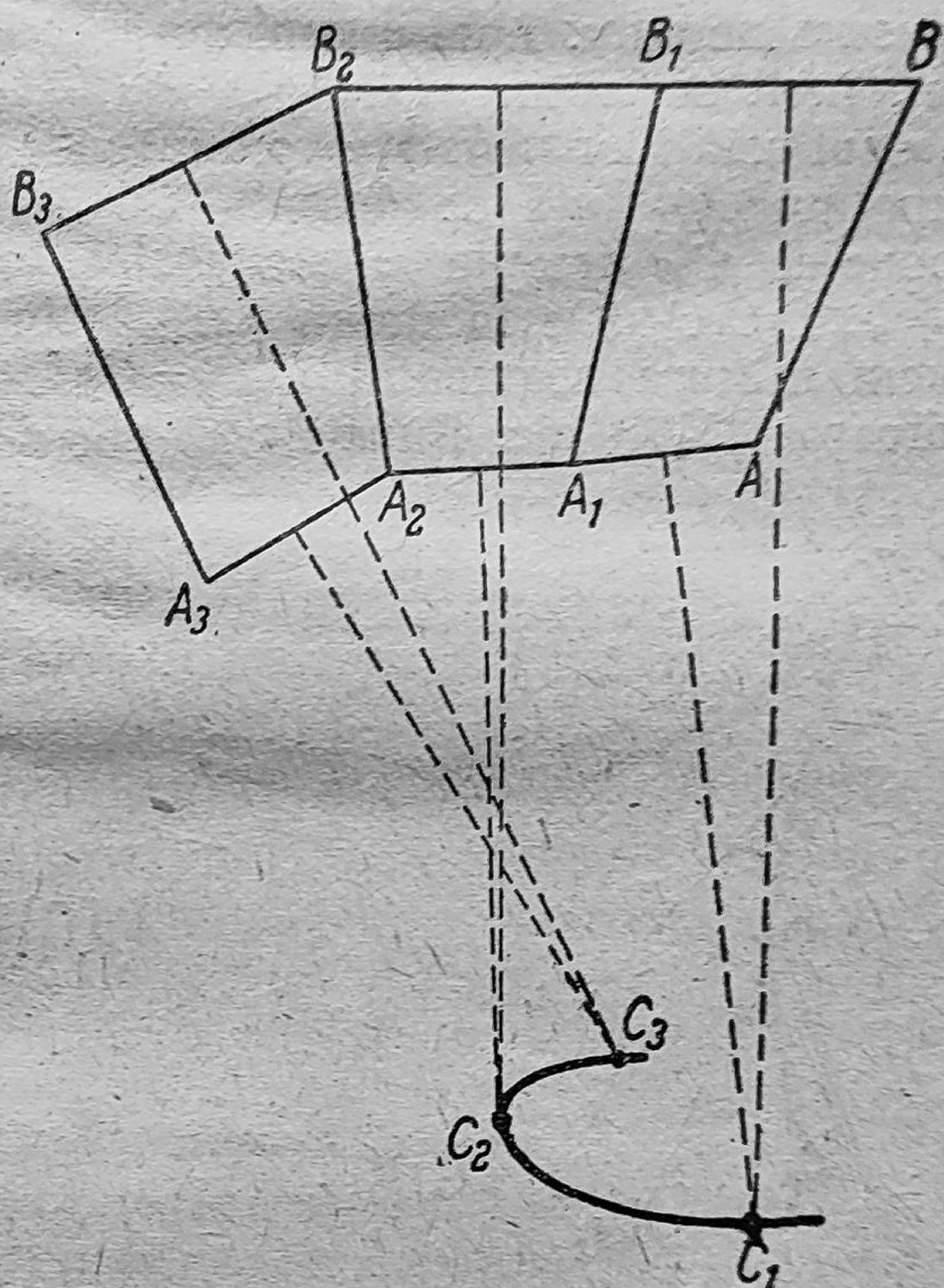


Fig. 177

Vom demonstra acum că, cunoscînd locul centrelor de rotaţie în planul fix şi unghiurile de rotaţie în jurul fiecăruia dintre ele, se poate găsi locul centrelor de rotaţie în planul mobil. Să presupunem că se dă locul centrelor de rotaţie C, C_1, C_2, C_3, ... într-un plan fix şi unghiurile de rotaţie $\Delta\theta$, $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$, ...

în jurul fiecăreia dintre ele (fig. 178). Vom uni punctele $C, C_1, C_2, C_3, \ldots$ cu drepte; vom obține o linie frîntă care la limită se va transforma în centroida fixă. Presupunem că toate rotațiile $\Delta\theta$, $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$, ... se produc în sens pozitiv, adică în sens contrar acelor unui ceasornic. Vom efectua construcția de mai jos. Măsurăm de la punctul C segmentul $CC'_1 = CC_1$ rotit sub unghiul $\Delta\theta$ în sens negativ. Apoi ducem din punctul C'_1 dreapta C'_1A_1 în așa fel, încît să avem $\sphericalangle CC'_1A_1 = \sphericalangle CC_1C_2$. De la dreapta C'_1A_1 în sensul rotațiilor negative vom măsura segmentul $C'_1C'_2 = C_1C_2$ sub unghiul $\Delta\theta_1$ față de dreapta C'_1A_1. Mai departe, vom duce din punctul C'_2 dreapta C'_2A_2, astfel încît să avem $\sphericalangle C'_1C'_2A_2 = \sphericalangle C_1C_2C_3$. De la dreapta C'_2A_2 în sensul rotațiilor negative, vom măsura segmentul $C'_2C'_3 = C_2C_3$ sub unghiul $\Delta\theta_2$ față de dreapta C'_2A_2 etc. Punctele C, C'_1, C'_2, C'_3 obținute în acest fel, vor fi locurile centrelor de rotație în planul mobil și linia frîntă $CC_1C_2C_3\ldots$ la limită va fi centroida mobilă.

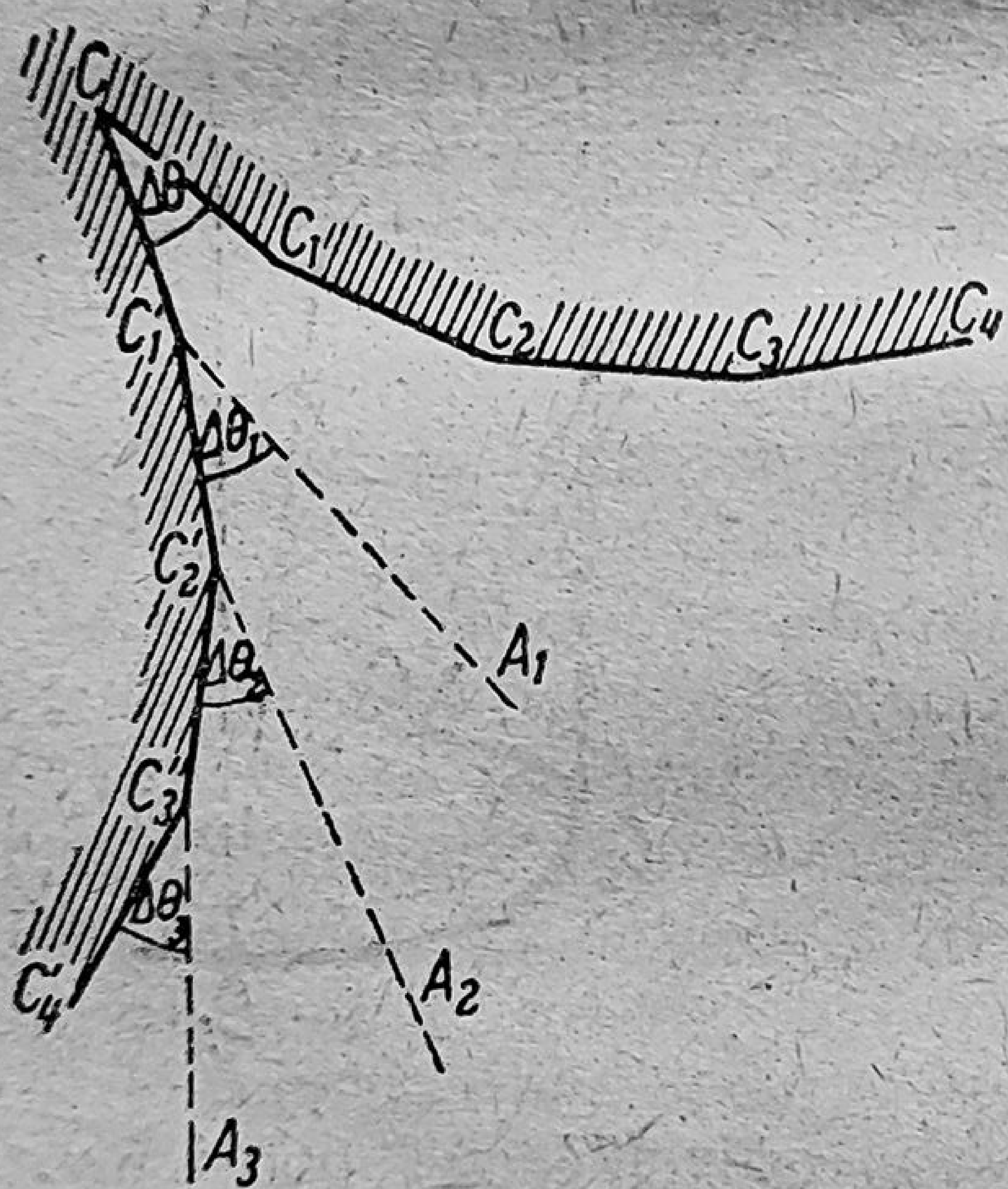


Fig. 178

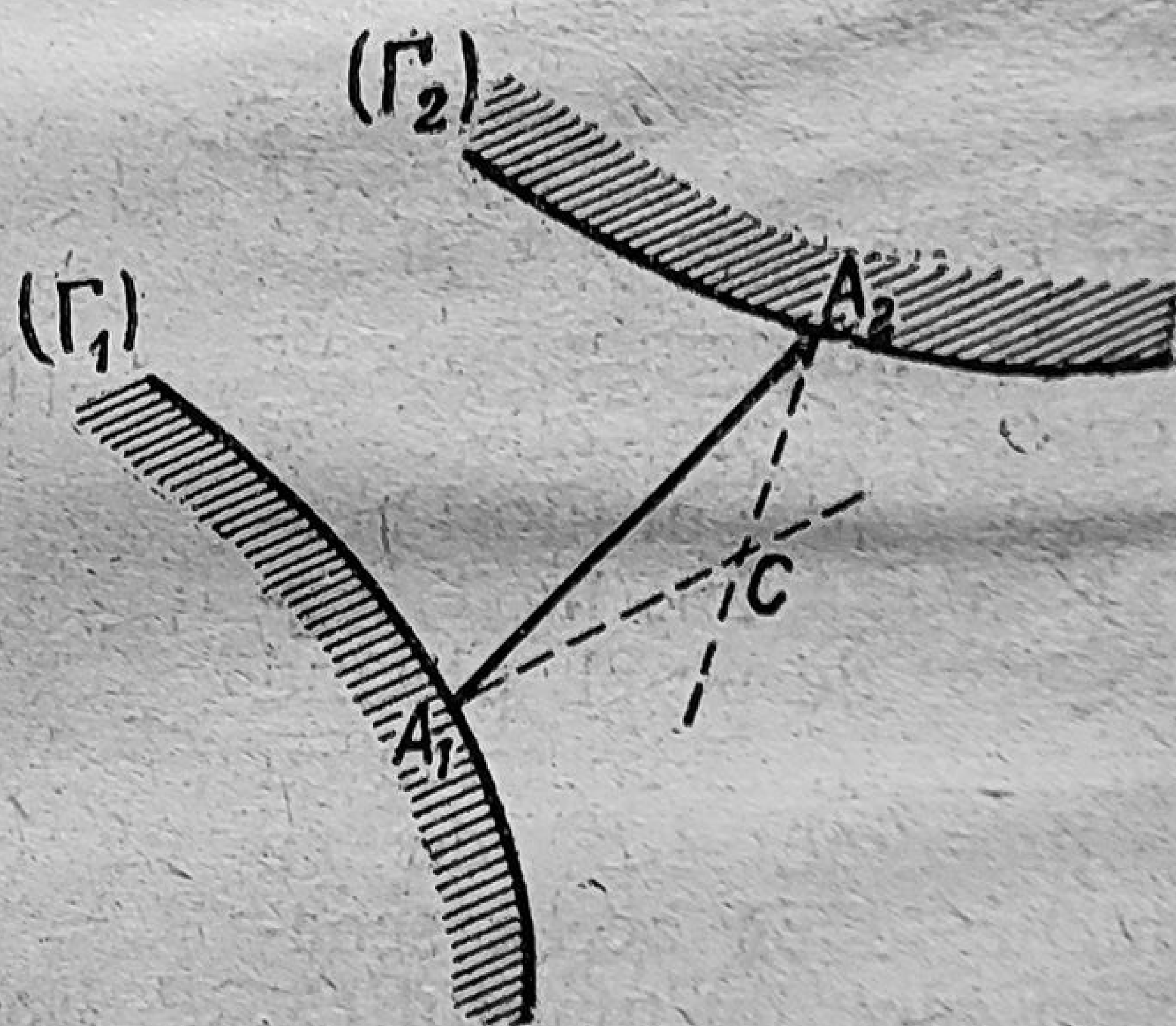


Fig. 179

În adevăr, să presupunem conform celor arătate mai sus că linia frîntă $CC'_1C'_2C'_3$ este construită în planul mobil, iar linia frîntă $CC_1C_2C_3\ldots$ în planul fix. În poziția reprezentată în fig. 178, punctul C servește ca punct de rotație. Vom roti planul mobil în jurul punctului C în sens pozitiv cu unghiul $\Delta\theta$. Atunci, conform construcției, punctul C'_1 va coincide cu punctul C_1 și dreapta C'_1A_1 se va suprapune pe dreapta C_1C_2. Vom roti apoi planul mobil în jurul punctului C_1, cu care a coincis punctul C'_1

în sens pozitiv cu unghiul $\Delta\theta_1$, atunci, conform construcției punctul C_2' va coincide cu punctul C_2, și dreapta $C_2'A_2$ se va suprapune peste dreapta C_2C_3 etc. Continuînd aceste raționamente, vom vedea, că toate punctele C_1', C_2', C_3', ... vor coincide succesiv cu punctele C_1, C_2, C_3, ..., adică punctele C_1', C_2', C_3', ..., reprezintă locurile centrelor de rotație în planul mobil. Cu ajutorul unei foi de hîrtie și a uneia de calc, toate aceste construcții se pot verifica ușor.

Această construcție duce la o concluzie foarte importantă. Vedem că prin suprapunerea succesivă a centrelor C_1' cu C_1, C_2 cu C_2, C_3' cu C_3 și așa mai departe, laturile CC_1', $C_1'C_2'$, $C_2'C_3'$... ale liniei frînte $CC_1'C_2'C_3'$ ... coincid succesiv cu laturile CC_1, C_1C_2, C_2C_3 ale liniei frînte $CC_1C_2C_3$ ..., adică linia frîntă $CC_1'C_2'C_3'$ se rostogolește fără alunecare pe linia frîntă $CC_1C_2C_3$. Deoarece la limită aceste linii frînte se transformă în centroide concludem că:

Orice mișcare a unei figuri plane în planul ei, se poate obține printr-o rostogolire fără alunecare a centroidei mobile, legată invariabil cu acea figură, pe centroida fixă.

Excepție o constituie numai mișcarea de translație pentru care ambele centroide se transformă într-un punct al planului situat la infinit.

Vedem de asemenea că, *punctul de contact al centroidei mobile cu cea fixă este centrul instantaneu de rotație în momentul dat.*

Centroidele se folosesc în mecanica aplicată.

Trebuie subliniat că, prin intermediul centroidelor pentru o viteză arbitrară de rostogolire, reproducem mișcarea reală numai g e o m e t r i c; pentru ca să reproducem mișcarea reală și m e c a n i c rostogolirea centroidei mobile pe cea fixă trebuie să fie astfel, încît în orice moment să fie realizată o viteză a acestei rostogoliri care să reproducă viteza reală a mișcării.

Vom indica următorul caz al unei mișcări date, cînd este ușor de determinat poziția centrului instantaneu de rotație. Fie dată mișcarea unei figuri plane în așa fel, încît un segment oarecare A_1A_2, legat invariabil de această figură, trebuie să alunece în tot timpul mișcării cu capetele lui pe curbele date (Γ_1) și (Γ_2) (fig. 179). Să presupunem că segmentul A_1A_2 a căpătat o deplasare infinit mică, ocupînd poziția $A_1'A_2'$. Pentru ca să găsim poziția centrului de rotație, vom uni între ele prin drepte punctele A_1 cu A_1' și A_2 cu A_2', vom împărți coardele A_1A_1' și A_2A_2' în

două şi din mijlocul lor vom ridica perpendiculare; intersecţia acestor perpendiculare va determina centrul de rotaţie C'. Dar segmentele A_1A_1' şi A_2A_2' prelungite în ambele sensuri sînt secante care se transformă la limită în tangente, iar perpendicularele duse pe ele se transformă în normale la curbele (Γ_1) şi (Γ_2). În acest fel, obţinem că *centrul instantaneu de rotaţie este situat în punctul de intersecţie al normalelor la curbele* (Γ_1) *şi* (Γ_2) *ridicate la capetele segmentului* A_1A_2.

Să aplicăm acest rezultat la următoarea problemă. Fie dată mişcarea planului mobil astfel încît segmentul A_1A_2 dus pe plan alunecă cu extremităţile sale pe două drepte perpendiculare între ele Ox şi Oy din planul fix (fig. 180). Conform celor arătate mai sus vom duce în punctele A_1 şi A_2 normalele, adică perpendicularele pe dreptele Ox şi Oy, vom obţine punctul C care va fi chiar centrul instantaneu de rotaţie. Nu este greu de găsit pentru acest caz centroida fixă. Deoarece $OC=A_1A_2$, adică este egal cu lungimea segmentului, atunci punctul C în toate poziţiile segmentului A_1A_2 trebuie să fie situat la o distanţă constantă de la punctul O, adică *centroida fixă este circumferinţa descrisă din punctul O cu o rază egală cu lungimea segmentului.*

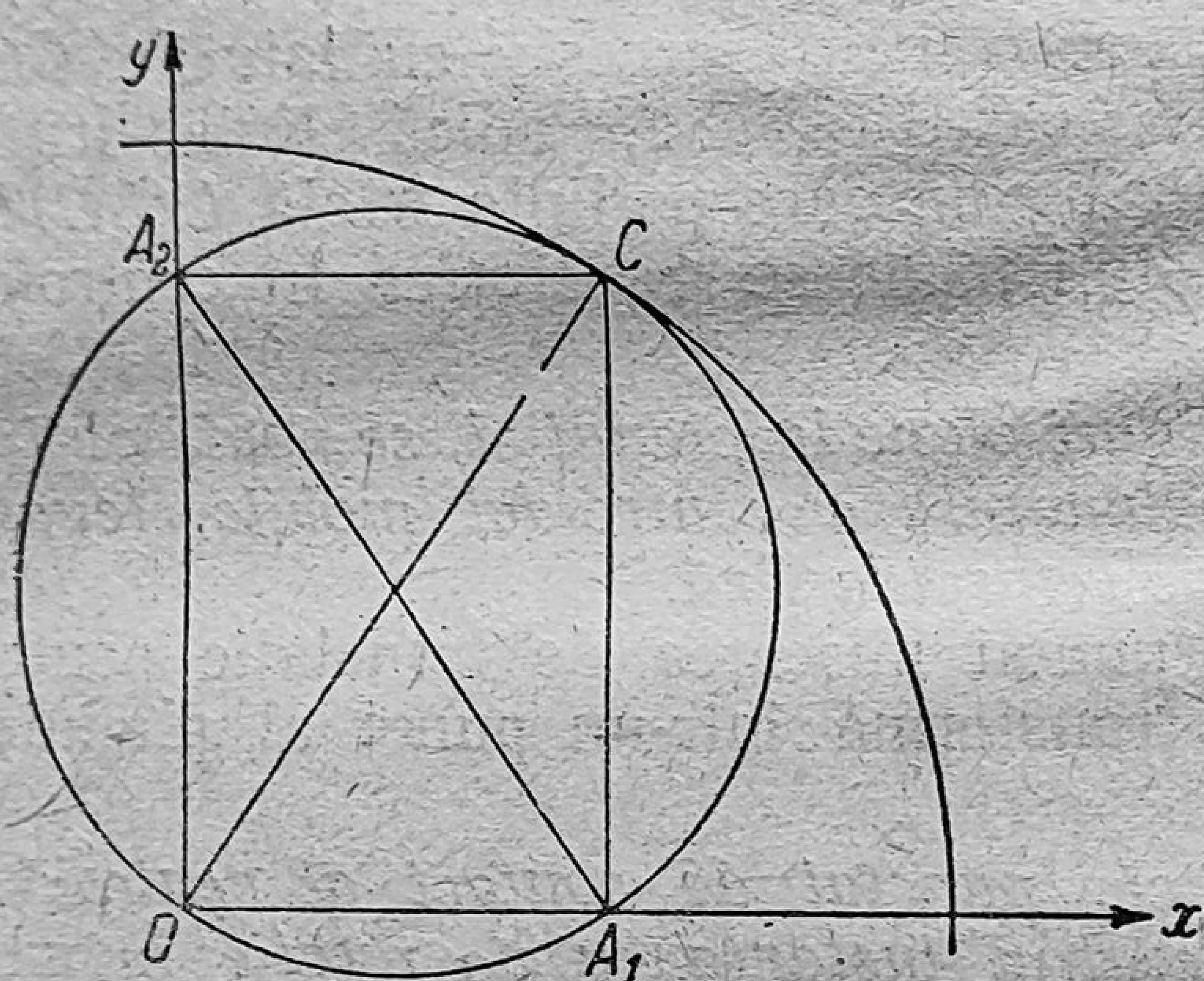


Fig. 180

În raport cu planul mobil punctul C va fi totdeauna în vîrful unghiului drept $A_1C\,A_2$, care se sprijină pe segmentul A_1A_2. Din geometrie se ştie că locul geometric al vîrfurilor unghiurilor drepte care se sprijină pe un segment, este circumferinţa descrisă pe acest segment luat ca diametru. Astfel, *centroida mobilă este o circumferinţă în care segmentul dat este diametru.* Prin urmare raza circumferinţei care reprezintă centroida mobilă, este de două ori mai mică decît raza circumferinţei, care reprezintă centroida fixă.

Centroida fixă poate fi completată pînă la o circumferinţă întreagă şi prin urmare mişcarea cercetată a planului mobil se

poate obține printr-o rostogolire fără alunecare pe partea interioară a cercului. a unui alt cerc care are o rază de două ori mai mică. Vom demonstra că, în acest caz toate punctele planului mobil descriu drepte, elipse sau cercuri. În adevăr, punctul K — centrul cercului mic — descrie, evident un cerc (fig. 181). Punctele cercului mic descriu drepte. Aceasta este evident pentru punctele A_1 și A_2, dar același lucru se întîmplă și cu punctele B_1 și B_2 situate la extremitățile unui alt diametru B_1B_2 al cercului mic, care vor descrie respectiv dreptele Ox' și Oy',

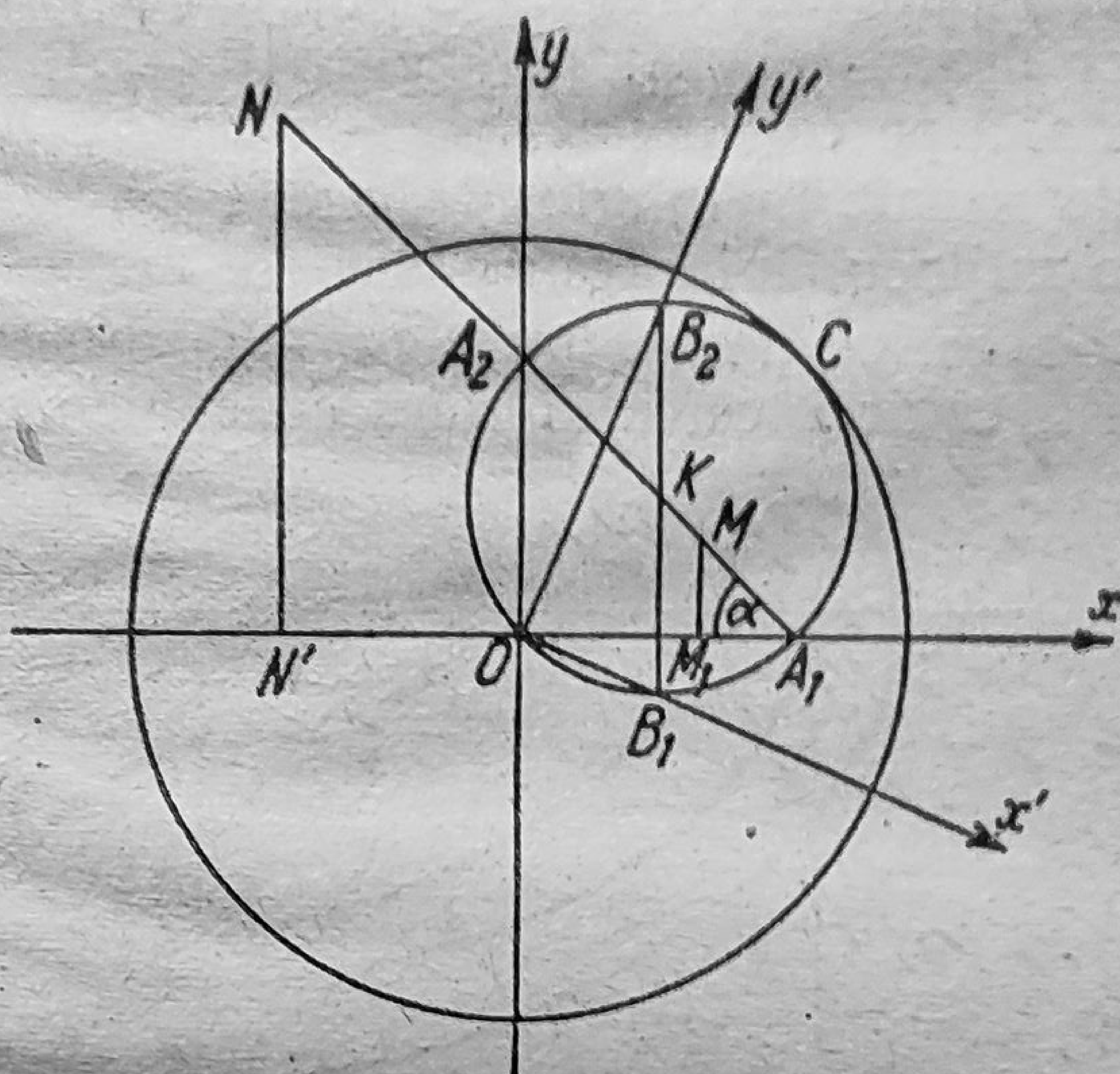


Fig. 181

deoarece dreptele Ox' și Oy' îndeplinesc în această mișcare același rol ca și dreptele Ox și Oy. Să luăm acum un punct oarecare M pe segmentul A_1A_2; coordonatele punctului M vor fi:

$$x=OM_1=A_2M\cos\alpha,\qquad y=MM_1=A_1M\sin\alpha.$$

De aici obținem:

$$\frac{x}{A_2M}=\cos\alpha,\qquad \frac{y}{A_1M}=\sin\alpha;$$

ridicînd la pătrat și adunînd, vom găsi că punctul M descrie elipsa

$$\frac{x^2}{A_2M^2}+\frac{y^2}{A_1M^2}=1.$$

Vom lua în sfîrșit un punct oarecare N, situat în afara segmentului A_1A_2, dar pe aceeași dreaptă. Pentru coordonatele acestui punct avem expresiile:

$$x=-ON'=-A_2N\cos\alpha,\qquad y=NN'=A_1N\sin\alpha;$$

de aici, ca și mai înainte, vom obține:

$$\frac{x^2}{A_2N^2}+\frac{y^2}{A_1N^2}=1,$$

adică punctul N descrie de asemenea o elipsă. Astfel, vedem că, dacă segmentul A_1A_2 se prelungeşte la infinit în ambele părţi, toate punctele dreptei obţinute aflate în afara acestui segment, vor descrie elipse; punctele A_1 şi A_2 ale acestui segment, care se află pe cercul interior, vor descrie segmente de dreaptă; punctele situate în interiorul acestui segment vor descrie elipse, afară de mijlocul lui care va descrie un cerc. Deoarece, acelaşi lucru va avea loc pentru punctele unei drepte oarecare B_1B_2 care trece prin centrul cercului mic, concludem de aici că toate punctele

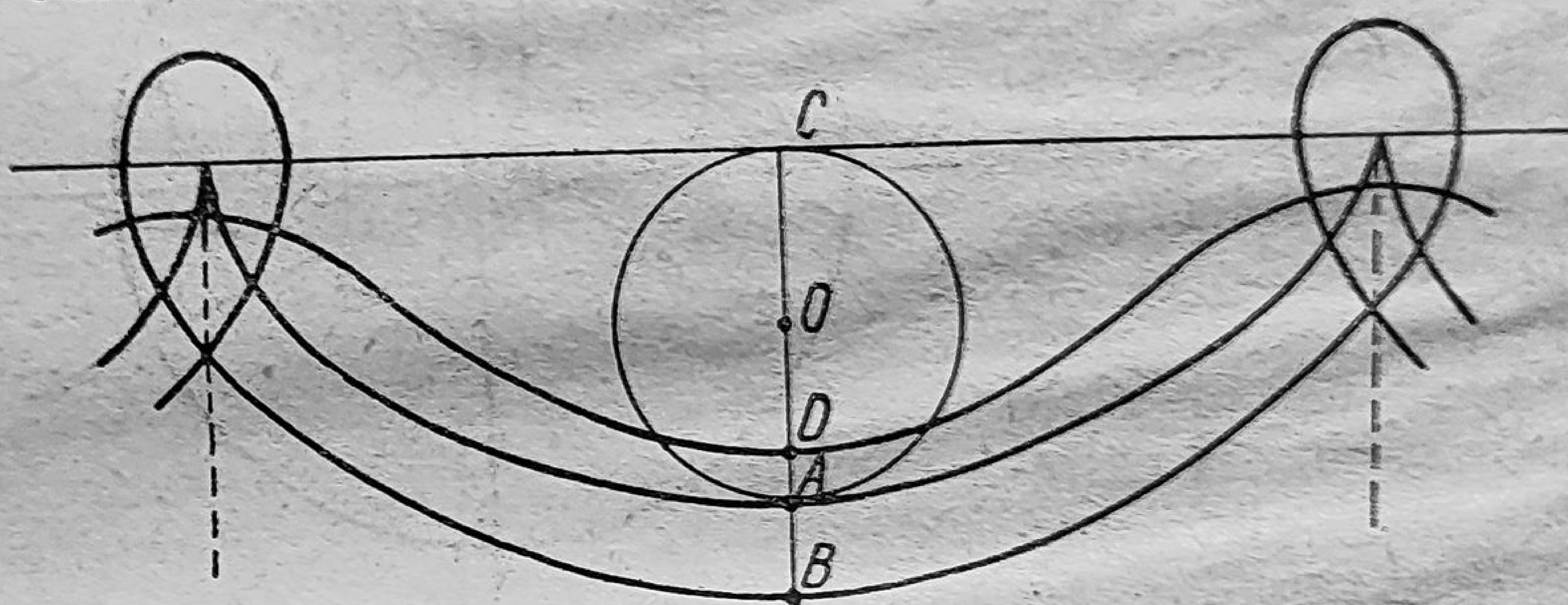


Fig. 182

planului mobil descriu elipse care degenerează în segmente de dreaptă pentru punctele cercului mic şi, în circumferinţe, pentru centrul cercului mic.

Bazîndu-ne pe proprietăţile mişcării considerate nu este greu să se construiască un aparat de trasare a elipselor, numit *elipsograf*. Pentru aceasta este suficient să facem să alunece pe glisiere, pe două bare perpendiculare între ele xOx şi yOy, aplicate pe o foaie de hîrtie, o a treia bară articulată cu glisierele. Fixînd în diferite locuri, din această a treia bară, un creion, şi făcînd bara să alunece pe glisiere, de-a lungul barelor xOx şi yOy vedem, conform celor expuse mai sus, că creionul trebuie să descrie o elipsă pe foaia de hîrtie. Forma şi dimensiunile fiecărei elipse, depinde evident de poziţia creionului pe bara mobilă, şi de distanţa dintre glisiere.

Să examinăm încă un exemplu, cînd centroida fixă (bara) este o dreaptă, iar centroida mobilă (ruleta) este o circumferinţă (fig. 182); este evident că centrul instantaneu este situat în punctul de contact al cercului cu dreapta. La această mişcare, punctul A, situat pe ruletă va descrie o cicloidă; punctul D situat în interiorul cercului, va descrie curba denumită *cicloidă pre-*

scurtată sau trohoidă; punctul B aflat în afara cercului, va descrie o curbă, reprezentată în fig. 182, denumită *cicloidă alungită.*

Ambele cazuri studiate pot fi considerate cazuri particulare ale cazului unui cerc care se rostogoleşte fără alunecare pe un alt cerc; razele cercurilor, în general pot fi luate arbitrar. Centroida mobilă, în acest caz poate atinge pe cea fixă în interior sau în exterior. În ultimul exemplu dat, centroida fixă a fost dreaptă, adică o circumferinţă cu raza infinit mare. Dacă schimbăm rolul centroidelor, adică centroida fixă o facem mobilă, iar centroida mobilă o facem fixă, atunci această schimbare a rolului centroidelor se numeşte *inversarea mişcării.*

Deoarece la inversarea mişcărilor, mişcarea relativă a punctelor ambelor plane va fi aceeaşi, indiferent care centroidă va fi considerată mobilă şi care fixă, este evident că în primul exemplu studiat fixînd într-un punct oarecare al planului legat de cercul mic un cuţit, şi luînd cercul mic drept centroidă fixă, vom găsi că datorită mişcării planului legat de cercul mare, cuţitul îl va tăia după o elipsă. Pe această proprietate, se bazează strungurile pentru fasonatul materialului în formă de elipse. Un astfel de strung a fost propus de renumitul pictor şi savant Leonardo da Vinci (1452—1519).

Trecînd de la mişcarea figurii plane la mişcarea plan paralelă corespunzătoare a solidului, evident că în locul centrelor de rotaţie, trebuie să considerăm axele de rotaţie, perpendiculare pe planul figurii şi care trec prin centrele de rotaţie. În acest caz, vom obţine suprafeţe cilindrice, numite *axoide.* Astfel *mişcarea plană paralelă a unui solid, se poate obţine prin rostogolirea fără alunecare a unei axoide cilindrice mobile pe axoida fixă.*

Alte detalii privitoare la acest procedeu de cercetare geometrică a mişcării plan paralele a sodiului se pot găsi în cursurile speciale de cinematică mecanismelor.

§ 82. Studiul analitic al mişcării plan paralele a solidului. Viteza. După studiul geometric al mişcării plan paralele a solidului, vom trece la studiul său analitic şi, ca şi în paragraful precedent, vom considera mişcarea figurii plane în planul ei, ca reprezentînd mişcarea plan paralelă a solidului. Deoarece studiul mişcării unei figuri plane în planul ei se reduce la rîndul lui la studiul mişcării în plan al unui segment de dreaptă luat pe această figură, vom examina pe figura plană, un segment oare-

care de dreaptă AB (fig. 183). Vom lua în planul fix, pe care se deplasează figura plană, un punct oarecare fix O şi vom uni punctul O cu punctele A şi B prin vectorii $\overline{OA}=\bar{\rho}_A$ şi $\overline{OB}=\bar{\rho}$; vom nota prin r vectorul $\overline{AB}$. Avem:

$$\bar{\rho}=\bar{\rho}_A+\bar{r}. \tag{19.1}$$

La mişcarea figurii plane, vectorii $\bar{\rho}$ şi $\bar{\rho}_A$ vor varia, în general, şi ca modul şi ca direcţie, iar vectorul $\bar{r}$ va varia numai ca direcţie, deoarece modulul său este egal cu distanţa constantă dintre punctele A şi B. Derivînd în raport cu timpul ambii membri ai relaţiei (19.1) obţinem:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt}=\frac{d\bar{\rho}_A}{dt}+\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Dar $\frac{d\bar{\rho}}{dt}$ este vectorul viteză $\bar{v}$ al punctului B; $\frac{d\bar{\rho}_A}{dt}$ este vectorul viteză $\bar{v}_A$ al punctului A; în ce priveşte derivata $\frac{d\bar{r}}{dt}$, deoarece vectorul $\bar{r}$ este de modul constant, ea este egală cu viteza liniară de rotaţie a punctului B în jurul punctului A, şi de aceea, conform formulei (18.5) obţinem $\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{\omega}\times\bar{r}$ unde $\bar{\omega}$ este vectorul viteză unghiulară. In acest fel, relaţia precedentă poate căpăta forma:

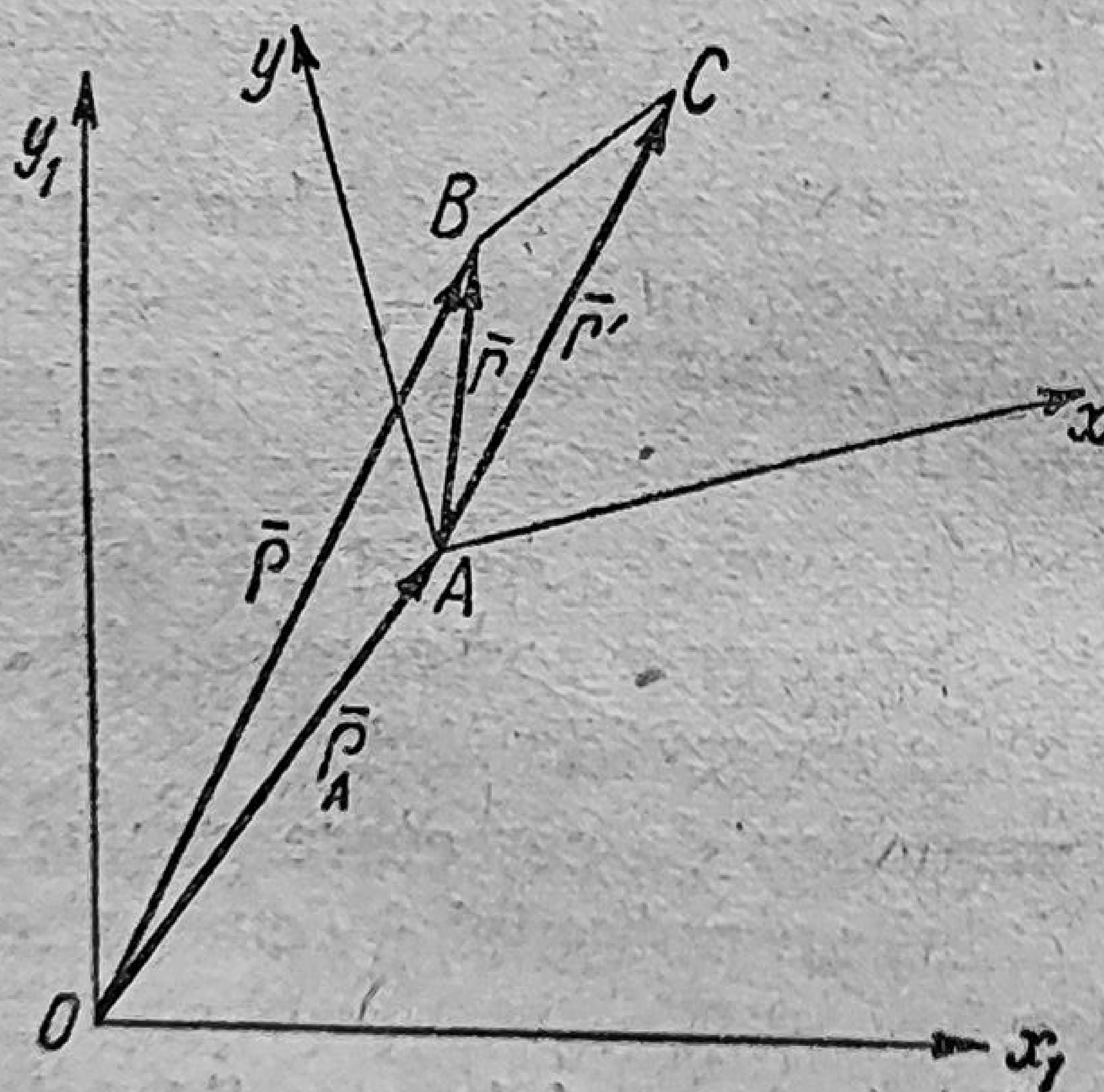


Fig. 183

$$\bar{v}=\bar{v}_A+\bar{\omega}\times\bar{r}; \tag{19.2}$$

aceasta este o formă particulară a formulei (16.23), cînd $v_2=\bar{\omega}\times\bar{r}$. Vedem că viteza punctului se compune geometric din două viteze; prima identică cu viteza punctului A, iar a doua se obţine din cauza vitezei unghiulare ω de rotaţie în jurul punctului A. Dacă viteza unghiulară $\bar{\omega}$ ar fi egală cu zero, atunci am avea $\bar{v}=\bar{v}_A$, şi mişcarea figurii plane s-ar reduce la o mişcare de translaţie. Să observăm că dacă vom alege în locul punctului A un alt punct al figurii plane, vom obţine, în general, un alt

vector $\bar{v}_A$, dar vectorul $\bar{\omega}$ va rămîne acelaşi oriunde ar fi luat punctul A pe figura plană şi, astfel $\bar{\omega}$ reprezintă viteza unghiulară de rotaţie a figurii plane; în adevăr, în paragraful precedent, am văzut că unghiul de rotaţie al figurii plane nu depinde de alegerea punctului A. De asemenea este evident că vectorul viteză $\bar{v}$ al punctului B va rămîne acelaşi oriunde ar fi luat punctul A pe figura plană; viteza $\bar{v}$ a punctului B, rămîne invariabilă la schimbarea poziţiei punctului A, independent de variaţiile corespunzătoare ale prmului şi ale celui de-al doilea factor al formulei (19.2).

Să găsim acum un astfel de punct C în planul mobil legat invariabil de figura plană, ca viteza $\bar{v}_C$ a punctului C, în momentul considerat să fie egală cu zero.

Notînd vectorul $\bar{AC}$ prin r', vom obţine:

$$\bar{v}_C=\bar{v}_A+\bar{\omega}\times\bar{r}',$$

sau, deoarece $\bar{v}_C=0$, atunci

$$0=\bar{v}_A+\bar{\omega}\times\bar{r}'. \tag{19.3}$$

Această egalitate mai poate fi prezentată şi sub forma:

$$\bar{r}'\times\bar{\omega}=\bar{v}_A.$$

Pentru determinarea vectorului r' cunoscînd vectorii $\bar{v}_A$ şi $\bar{\omega}$ trebuie să rezolvăm ecuaţia vectorială de mai sus. In statică am văzut că o soluţie a acestei ecuaţii nu va fi univocă; în adevăr, dacă am obţinut vectorul $\bar{r}'$, atunci vom avea şi alte soluţii de forma $\bar{r}'+d$, unde $\bar{d}$ este un vector arbitrar, paralel la vectorul $\bar{\omega}$, adică perpendicular pe planul de mişcare al figurii, deoarece datorită paralelismului vectorilor $\bar{d}$ şi $\bar{\omega}$ trebuie să avem:

$$(\bar{r}'+\bar{d})\times\bar{\omega}=\bar{r}'\times\bar{\omega}+\bar{d}\times\bar{\omega}=\bar{r}'\times\bar{\omega}.$$

Deoarece în cazul considerat avem de-a face cu o problemă plană, găsind vectorul $\bar{r}'$ situat în planul de mişcare al figurii, putem pune $\bar{d}=0$, adică punctul C se va determina univoc. Vom scădea termen cu termen din egalitatea (19.2) egalitatea (19.3); obţinem:

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}-\bar{\omega}\times\bar{r}'=\bar{\omega}\times(\bar{r}-\bar{r}'). \tag{19.4}$$

După cum se vede uşor din fig. 183, vom avea $\overline{r}-\overline{r}'=\overline{AB}-$ $-\overline{AC}=\overline{CB}$; de aceea, găsim:

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{CB}, \qquad (19.5)$$

adică, viteza punctului B într-un moment dat este la fel ca în cazul cînd punctul B s-ar roti cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ în jurul punctului fix C. Astfel, ajungem analitic la definiţia centrului vitezelor sau a centrului instantaneu de rotaţie, şi anume:

Centrul vitezelor, centrul instantaneu de rotaţie sau polul instantaneu se numeşte acel punct din planul mobil, a cărui viteză la un moment dat este egală cu zero.

Vom trece în formulele (19.2), (19.3) şi (19.4) de la notaţiile vectoriale la cele analitice, şi vom folosi două sisteme de axe ortogonale de coordonate, aşa cum se va proceda totdeauna la studiul mişcării solidului; anume, un sistem fix de axe de coordonate cu originea în punctul O, sistem aşezat în planul fix, pe care se mişcă figura plană, şi un sistem mobil de axe de coordonate, cu originea în punctul A, sistem legat invariabil de figura plană mobilă. Sistemul fix al axelor de coordonate îl vom nota prin Ox_1y_1, iar sistemul mobil prin Axy. Vom nota vectorii unitari care determină axele fixe de coordonate prin $\overline{i}_1$ şi $\overline{j}_1$, iar vectorii unitari care determină axele mobile de coordonate, prin $\overline{i}$ şi $\overline{j}$. Evident că vectorii $\overline{i}_1$ şi $\overline{j}_1$ sînt constanţi iar vectorii $\overline{i}$ şi $\overline{j}$ sînt constanţi ca modul dar variază ca direcţie deoarece ei se rotesc o dată cu axele mobile Axy. Dacă am fi construit şi axele Oz şi Az, atunci aceste axe fiind perpendiculare pe planul de mişcare al figurii plane, ar fi paralele între ele şi noi am avea $\overline{k}_1=\overline{k}$. Prin urmare, $\overline{\omega}=\overline{k}_1\omega$ şi $\overline{\omega}=\overline{k}\omega$, unde ω este proiecţia vectorului $\overline{\omega}$ pe axa Oz sau pe axa Az. Vom nota proiecţiile vitezelor $\overline{v}_A$ şi $\overline{v}$ pe axele Ox_1y_1 şi Axy respectiv prin:

$$(v_A)_{x_1},\quad (v_A)_{y_1};\qquad (v_A)_x,\quad (v_A)_y;\qquad v_{x_1},\quad v_{y_1};\qquad v_x,\quad v_y.$$

Vom nota prin (a, b) şi (x_1, y_1) coordonatele punctelor A şi B în raport cu axele Ox_1y_1; prin (x, y) coordonatele punctului B în raport cu axele Axy; prin $(x_1', y_1',)$ şi prin (x', y') coordonatele centrului instantaneu de rotaţie C respectiv în raport cu axele Ox_1y_1 şi Axy. Avem:

$$\overline{v}_A=\overline{i}_1(v_A)_{x_1}+\overline{j}_1(v_A)_{y_1},\quad \overline{v}=\overline{i}_1v_{x_1}+\overline{j}_1v_{y_1},$$
$$\overline{v}_A=\overline{i}(v_A)_x+\overline{j}_1(v_A)_y;\quad \overline{v}=\overline{i}v_x+\overline{j}v_y.$$

Din fig. 183 se vede, că:

$$\bar{r}=\bar{i}_1(x_1-a)+\bar{j}_1(y_1-b)=\bar{i}x+\bar{j}y,$$

$$\bar{r}'=\bar{i}_1(x_1'-a)+\bar{j}_1(y_1'-b)=\bar{i}x'+\bar{j}y',$$

$$\overline{CB}=\bar{r}-\bar{r}'=\bar{i}_1(x_1-x_1')+\bar{j}_1(y_1-y_1')=\bar{i}(x-x')+\bar{j}(y-y').$$

Trecînd de la formulele vectoriale (19.2), (19.3) şi (19.4) la cele analitice, în sistemul fix de coordonate Ox_1y_1, vom avea:

$$\bar{i}_1 v_{x_1}+\bar{j}_1 v_{y_1}=\bar{i}_1(v_A)_{x_1}+\bar{j}_1(v_A)_{y_1}+\begin{vmatrix}\bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1\\ 0 & 0 & \omega\\ x_1-a & y_1-b & 0\end{vmatrix},$$

$$0=\bar{i}_1(v_A)_{x_1}+\bar{j}_1(v_A)_{y_1}+\begin{vmatrix}\bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1\\ 0 & 0 & \omega\\ x_1'-a & y_1'-b & 0\end{vmatrix},$$

$$\bar{i}_1 v_{x_1}+\bar{j}_1 v_{y_1}=\begin{vmatrix}\bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1\\ 0 & 0 & \omega\\ x_1-x_1' & y_1-y_1' & 0\end{vmatrix}.$$

Egalînd între ei coeficienţii vectorilor unitari de acelaşi fel în părţile din stînga şi dreapta acestor formule, vom obţine din prima formulă:

$$\left.\begin{aligned} v_{x_1}&=(v_A)_{x_1}-\omega(y_1-b),\\ v_{y_1}&=(v_A)_{y_1}+\omega(x_1-a);\end{aligned}\right\}\qquad(19.6)$$

din a doua vom obţine:

$$\left.\begin{aligned} 0&=(v_A)_{x_1}-\omega(y_1'-b),\\ 0&=(v_A)_{y_1}-\omega(x_1'-a);\end{aligned}\right\}\qquad(19.7)$$

în sfîrşit din a treia formulă vom găsi:

$$\left.\begin{aligned} v_{x_1}&=-\omega(y_1-y_1'),\\ v_{y_1}&=+\omega(x_1-x_1').\end{aligned}\right\}\qquad(19.8)$$

Formulele (19.7) determină coordonatele (x_1', y_1') ale centrului instantaneu de rotaţie C în raport cu axele fixe de coordonate Ox_1y_1; din aceste formule obţinem:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a - \frac{(v_A)_{y_1}}{\omega}, \\ y_1' &= b + \frac{(v_A)_{x_1}}{\omega}. \end{aligned}\right\} \quad (19.9)$$

Deoarece la mişcarea unei figuri plane, mărimile a, b, $(v_A)_{x_1}$, $(v_A)_{y_1}$, ω sînt funcţii cunoscute de timpul t dacă mişcarea figurii plane este cunoscută, atunci din formulele (19.9) vom avea:

$$x_1' = f_1(t), \quad y_1' = \varphi_1(t).$$

Din aceste ecuaţii se poate vedea cum variază coordonatele centrului instantaneu de rotaţie C în raport cu timpul t în planul fix. Eliminînd din ele timpul t, obţinem ecuaţia centroidei fixe, sub forma:

$$F_1(x_1', y_1') = 0.$$

Din formulele (19.8), obţinem modulul vectorului viteză al punctului B, ridicîndu-le la pătrat şi adunîndu-le şi avem:

$$v = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}} = \sqrt{\omega^2(y_1 - y_1')^2 + \omega^2(x_1 - x_1')^2},$$

sau

$$v = |\omega| \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2}.$$

Dar expresia care stă sub radical este pătratul distanţei de la punctul B pînă la centrul instantaneu C, adică lungimea CB. De aceea vom avea:

$$v = |\omega| CB. \quad (19.10)$$

Vedem încă o dată confirmarea formulei (19.5), iar formula (19.10) poate fi exprimată în felul următor: *modulul vitezei punctului B este egal cu produsul modulului vitezei unghiulare de rotaţie a figurii plane, cu distanţa de la punctul B la centrul instantaneu de rotaţie.* Din comparaţia formulelor (19.8) şi (18.11) rezultă că *vectorul viteză al punctului B este astfel ca şi cum în momentul considerat figura plană s-ar roti cu viteza unghiulară ω în jurul punctului C, considerat fix*, precum s-a mai indicat cu ocazia formulelor (19.5). Pentru a evita orice nelămurire, vom sublinia că punctul C în realitate nu este fix; putem doar să

afirmăm că în momentul dat viteza lui este egală cu zero, dar mai jos vom vedea că accelerația punctului C, în general nu este egală cu zero. De aceea, dacă în momentul dat punctul C este centru instantaneu de rotaţie, atunci, într-un interval de timp infinit mic, deplasarea lui va fi infinit mică, cel puţin de ordinul doi, în timp ce deplasările tuturor celorlalte puncte ale figurii plane vor fi infinit mici de ordinul întîi.

Pentru a lămuri cele afirmate mai înainte vom examina o deplasare infinit mică a unui punct care se mişcă în linie dreaptă. Presupunem că punctul se mişcă pe dreapta Ox după legea $x=f(t)$ şi în momentul t_0 are coordonata z_0, astfel că vom avea $x_0=f(t_0)$. Să găsim coordonata x a punctului după un interval de timp infinit mic h, adică în momentul $t=t_0+$h; vom avea: $x=f(t_0+h)$. Dezvoltînd partea dreaptă în serie tayloriană vom obţine:

$$x=f(t_0)+hf'(t_0)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(t_0)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(t_0)+\ldots,$$

sau

$$x=x_0+hv_0+\frac{h^2}{1\cdot 2}a_0+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(t_0)+\ldots,$$

unde $v_0=f'(t_0)$ şi $a_0=f''(t_0)$ sînt viteza şi accelerația punctului în momentul $t=t_0$. Dacă viteza punctului în momentul t_0 nu este egală cu zero, atunci deplasarea $x=x_0$ a punctului, este un infinit mic de ordinul întîi. Dacă însă $v_0=0$, atunci deplasarea $x-x_0$ a punctului, pentru $a_0\neq 0$ este un infinit mic de ordinul doi. Dar, dacă şi accelerația a_0 în momentul t_0 este de asemenea egală cu zero, atunci deplasarea punctului într-un interval de timp infinit mic h, va fi în general un infinit mic de ordinul trei etc.

Trecînd de la formulele vectoriale (19.2), (19.3) şi (19.4) la cele analitice, în sistemul mobil de coordonate Axy, vom avea:

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y=\bar{i}(v_A)_x+\bar{i}(v_A)_y+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & 0\end{vmatrix},$$

$$0=\bar{i}(v_a)_x+\bar{j}(v_A)_y+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x' & y' & 0\end{vmatrix},$$

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x-x' & y-y' & 0\end{vmatrix}.$$

Egalînd între ei coeficienţii vectorilor unitari de acelaşi fel, în partea stîngă şi dreaptă a acestor formule, vom obţine din prima formulă:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= (v_A)_x - \omega y, \\ v_y &= (v_A)_y + \omega x; \end{aligned}\right\} \quad (19.11)$$

din a doua vom obţine:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (v_A)_x - \omega y', \\ 0 &= (v_A)_y + \omega x'; \end{aligned}\right\} \quad (19.12)$$

în sfîrşit din a treia formulă găsim:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\omega(y - y'), \\ v_y &= +\omega(x - x'). \end{aligned}\right\} \quad (19.13)$$

Formulele (19.12) determină coordonatele centrului instantaneu de rotaţie C în raport cu axele mobile de coordonate Axy; din aceste formule obţinem:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{(v_A)_y}{\omega}, \\ y' &= +\frac{(v_A)_x}{\omega}. \end{aligned}\right\} \quad (19.14)$$

Deoarece în mişcarea figurii plane mărimile $(v_A)_x$, $(v_A)_y$ şi ω sînt funcţii de timpul t, atunci din formulele (19.14) vom avea:

$$x' = f(t), \quad y' = \varphi(t).$$

Din aceste formule se poate vedea, cum variază în timp coordonatele centrului instantaneu de rotaţie C în planul mobil. Eliminînd din ele timpul t, obţinem ecuaţia centroidei mobile sub forma:

$$F(x', y') = 0.$$

Din formulele (19.13), vom obţine modulul vectorului viteză al punctului B, ridicîndu-le la pătrat şi adunînd, şi anume:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\omega| \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = |\omega|\, CB,$$

adică ajungem la formula (19.10).

Ca exemplu de determinare pe cale analitică a centroidelor, vom examina următoarea problemă. O bară rigidă AB, se mişcă pe un plan fix, fiind tot timpul tangentă la o circumferinţă fixă

(C) cu raza egală cu a, și rezemîndu-se cu capătul său A pe o dreaptă fixă Ox_1, care trece prin centrul O al acestei circumferințe (fig. 184). Conform celor expuse mai sus, pentru a găsi poziția centrului instantaneu de rotație C, vom duce normalele în punctele A și E la curbele (C) și Ox_1; aceste normale se vor întretăia într-un punct oarecare C care va fi chiar centrul instantaneu de rotație. Vom construi sistemul fix de coordonate Ox_1y_1

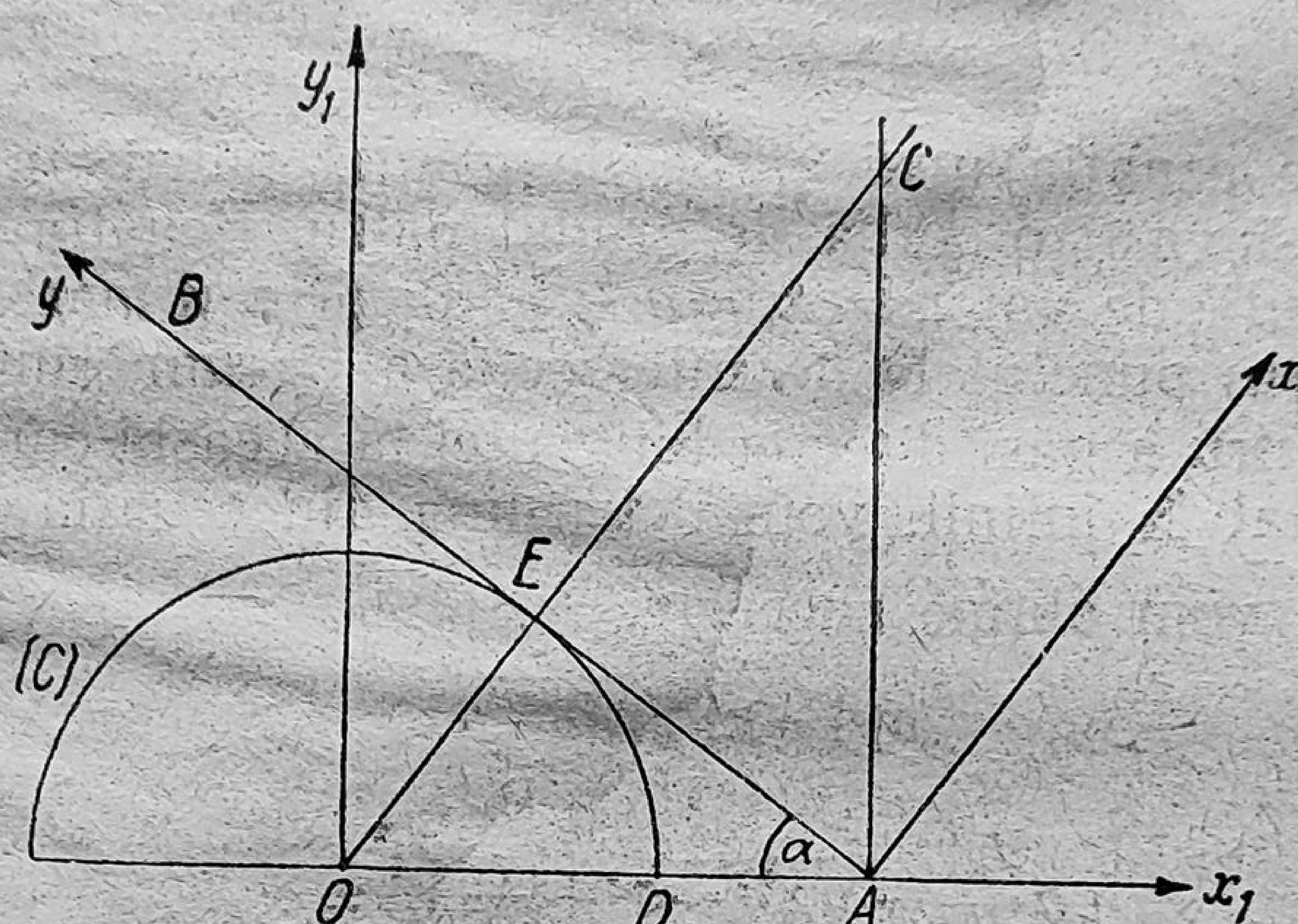


Fig. 184

și sistemul mobil de coordonate Axy, cum se arată în fig. 184. Vom găsi coordonatele (x_1', y_1') și (x', y') ale punctului C respectiv în raport cu axele Ox' y' și Axy, exprimate în funcție de unghiul α de înclinare al dreptei AB în raport cu dreapta Ox_1. Avem:

$$x_1' = OA, \quad y_1' = AC.$$

Din $\triangle OEA$ și $\triangle AOC$, obținem:

$$x_1' = \frac{a}{\sin\alpha}, \quad y_1' = x_1' \operatorname{ctg}\alpha.$$

Din aceste două ecuații găsim:

$$\sin\alpha = \frac{a}{x_1'}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{y_1'}{x_1'}.$$

Deoarece

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

atunci, înlocuind în această relaţie pe sin α şi ctg α prin valorile lor, vom obţine,

$$\frac{y_1'^2}{x_1'^2}=\frac{1-\frac{a^2}{x_1'^2}}{\frac{a^2}{x_1'^2}}=\frac{x_1'^2-a^2}{a^2}.$$

Scăpînd de numitori, vom avea:

$$x_1'^4-a^2(x_1'^2+y_1'^2)=0.$$

Aceasta este ecuaţia unei curbe de gradul patru; în acest fel, centroida fixă va fi o curbă de gradul patru. Ecuaţia precedentă este satisfăcută de valorile $x_1'=a$, $y_1'=0$; prin urmare, centroida fixă trece prin punctul D de intersecţie a circumferinţei (C) cu axa Ox_1. Pentru a găsi direcţia tangentei la această curbă, într-un punct depărtat la infinit, vom determina din ecuaţia precedentă derivata $\frac{dy_1'}{dx_1'}$; vom obţine succesiv:

$$ay_1'=x_1'\sqrt{x_1'^2-a^2}$$

şi

$$a\frac{dy_1'}{dx_1'}=\sqrt{x'^2-a^2}+\frac{x_1'^2}{\sqrt{x_1'^2-a^2}}.$$

Din ambele ecuaţii concludem că trebuie totdeauna să avem $x_1'^2 \geqslant a^2$, şi că dacă x' tinde spre infinit, tind spre infinit de asemenea şi mărimile y_1' şi $\frac{dy_1'}{dx_1'}$. De aici rezultă că centroida fixă, depărtîndu-se la infinit în sus şi la dreapta punctului D, tinde către o direcţie paralelă la axa Oy_1. Vom observa că valorile $x_1'=y_1'=0$ satisfac de asemenea ecuaţia centroidei, iar acest punct O este un punct izolat al curbei.

Să determinăm ecuaţia centroidei mobile, din triunghiul ABC; avem:

$$x'=EC, \quad y'=AE.$$

Deoarece

$$AE=a \operatorname{ctg} \alpha,$$
$$EC=AE \operatorname{ctg} \alpha=a \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

vom obţine:

$$x'=a \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad y'=a \operatorname{ctg} \alpha,$$

adică:

$$\frac{y'^2}{a}=x'$$

Prin urmare ecuaţia

$$y'^2 = ax'$$

reprezintă centroida mobilă, care va fi o parabolă cu parametrul egal cu $\frac{a}{2}$, ce are ca axă dreapta Ax. De aici rezultă că mişcarea planului mobil, legat de dreapta AB, poate fi obţinută prin rostogolirea fără alunecare a parabolei $y'^2 = ax'$ pe curba de gradul patru:

$$x_1'^4 - a^2(x_1'^2 + y_1'^2) = 0.$$

§ 83. Studiul analitic al mişcării plan paralele a solidului. Acceleraţie. Pentru a obţine acceleraţia punctelor unei figuri plane, este suficient să se derive în raport cu timpul ambele părţi ale relaţiei (19.2), vom avea:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r})$$

sau

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Deoarece

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

vom obţine:

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Aplicînd ultimei egalităţi formula (18.12), vom avea:

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = (\bar{\omega} \cdot \bar{r})\,\bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}.$$

Deoarece $\bar{\omega} \perp \bar{r}$, găsim (§ 18):

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = -\omega^2 \bar{r};$$

prin urmare, vom avea:

$$\bar{a} = \bar{a}_A + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r}. \qquad (19.15)$$

Această formulă ne dă posibilitatea de a calcula acceleraţia unui punct oarecare al unui solid aflat în mişcare plan-paralelă, în

funcţie de acceleraţia cunoscută $\overline{a}_A=\frac{d\overline{v}_A}{dt}$ a unui punct oarecare A, de viteza unghiulară de rotaţie $\overline{\omega}$ şi de acceleraţia unghiulară $\frac{d\overline{\omega}}{dt}$. Dacă avem: $\overline{\omega}=0$ şi $\frac{d\overline{\omega}}{dt}=0$, atunci vom obţine $\overline{a}=\overline{a}_A$, adică acceleraţiile tuturor punctelor figurii plane vor fi egale între ele, ceea ce este evident, deoarece în acest caz solidul se află în mişcare de translaţie. Dacă avem $\overline{\omega}=\text{const}$, atunci trebuie să avem $\frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r}=0$, şi acceleraţia $\overline{a}$ este suma geometrică a acceleraţiei $\overline{a}_A=\frac{d\overline{v}_A}{dt}$ şi a acceleraţiei centripete $-\omega^2\overline{r}$ ce apare din cauza rotaţiei punctului B în jurul punctului A (§ 79).

Vom introduce aceleaşi sisteme de axe de coordonate mobile şi fixe şi aceleaşi notaţii ca în paragraful precedent, şi vom pune:

$$\overline{a}_A=\overline{i}_1(a_A)_{x_1}+\overline{j}_1(a_A)_{y_1},$$
$$\overline{a}_A=\overline{i}(a_A)_x+\overline{j}(a_A)_y.$$

Trecînd de la formula vectorială (19.15) la cea analitică, în sistemul fix de coordonate, vom avea:

$$\overline{i}_1 a_{x_1}+\overline{j}_1 a_{y_1}=\overline{i}_1(a_A)_{x_1}+\overline{j}_1(a_A)_{y_1}+\begin{vmatrix}\overline{i}_1 & \overline{j}_1 & \overline{k}_1\\ 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt}\\ x_1-m & y_1-n & 0\end{vmatrix}-$$
$$-\omega^2[\overline{i}_1(x_1-m)+\overline{j}_1(y_1-n)].$$

De aici, egalînd între ei coeficienţii lui $\overline{i}_1$ şi $\overline{j}_1$, vom obţine:

$$\left.\begin{aligned} a_{x_1}&=(a_A)_{x_1}-\frac{d\omega}{dt}(y_1-n)-\omega^2(x_1-m),\\ a_{y_1}&=(a_A)_{y_1}+\frac{d\omega}{dt}(x_1-m)-\omega^2(y_1-n).\end{aligned}\right\} \qquad (19.16)$$

Vom găsi de asemenea un punct E, a cărui acceleraţie în momentul dat este egală cu zero. Notînd coordonatele acestui punct E în raport cu axele fixe de coordonate prin ξ_1 şi η_1, din formulele (19.16), vom avea următoarele relaţii:

$$\left.\begin{aligned} 0&=(a_A)_{x_1}-\frac{d\omega}{dt}(\eta_1-n)-\omega^2(\xi_1-m),\\ 0&=(a_A)_{y_1}+\frac{d\omega}{dt}(\xi_1-m)-\omega^2(\eta_1-n).\end{aligned}\right\} \qquad (19.17)$$

Rezolvînd aceste ecuaţii în raport cu diferenţele $(\xi_1 - m)$ şi $(\eta_1 - n)$ vom obţine:

$$\xi_1 - m = \frac{(a_A)_{x_1}\omega^2 - (a_A)_{y_1}\frac{d\omega}{dt}}{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2},$$

$$\eta_1 - n = \frac{(a_A)_{x_1}\frac{d\omega}{dt} + (a_A)_{y_1}\omega^2}{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}.$$

Din aceste formule este uşor de găsit coordonatele ξ_1 şi η_1 ale punctului E, a cărui acceleraţie în momentul dat este egală cu zero; punctul E se numeşte centrul *acceleraţiilor*. Comparînd expresiile coordonatelor ξ_1 şi η_1 ale punctului E cu expresiile coordonatelor x'_1 şi y'_1 (19.9) ale centrului vitezelor C, vedem că centrul vitezelor C şi centrul acceleraţiilor E sînt în general puncte diferite, adică în punctul C care reprezintă la momentul dat centrul vitezelor, viteza în acest moment va fi egală cu zero, acceleraţia însă va fi diferită de zero (§ 82). Vom scădea termen cu termen din formulele (19.16) formulele (19.17), vom avea:

$$\left.\begin{aligned} a_{x_1} &= -\frac{d\omega}{dt}(y_1 - \eta_1) - \omega^2 (x_1 - \xi_1), \\ a_{y_1} &= +\frac{d\omega}{dt}(x_1 - \xi_1) - \omega^2 (y_1 - \eta_1). \end{aligned}\right\} \qquad (19.18)$$

Pentru a găsi modulul a al acceleraţiei $\bar{a}$, ridicăm la pătrat formulele (19.18), adunăm rezultatele şi extragem rădăcina pătrată din ambele părţi ale ecuaţiei obţinute; vom obţine:

$$a = \sqrt{\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4\right]\left[(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2\right]}.$$

Deoarece suma $(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2$ reprezintă pătratul distanţei de la punctul B pînă la punctul E, adică este egală cu BE^2, atunci din ultima formulă găsim:

$$a = BE\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}.$$

Comparînd această formulă cu formulele (18.17) şi formulele (19.18) cu formulele (18.16), constatăm că pentru acceleraţia punctului B se obţine aceeaşi valoare, care ar rezulta dacă punc-

tul E ar fi fix şi punctul B s-ar roti în jurul punctului E cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$. Prin aceasta se explică denumirea de centrul accelerațiilor, dată punctului E.

Trecînd de la forma vectorială (19.15) la cea analitică în sistemul mobil de coordonate, vom avea:

$$\bar{i}a_x+\bar{j}a_y=\bar{i}(a_A)_x+\bar{j}(a_A)_y+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt}\\ x & y & 0\end{vmatrix}-\omega^2(\bar{i}x+\bar{j}y).$$

De aici, egalînd între ei coeficienții lui $\bar{i}$ şi $\bar{j}$, vom obține:

$$\left.\begin{aligned}a_x&=(a_A)_x-\frac{d\omega}{dt}y-\omega^2x,\\ a_y&=(a_A)_y+\frac{d\omega}{dt}x-\omega^2y.\end{aligned}\right\}\qquad(19.19)$$

Notînd coordonatele centrului accelerațiilor E în raport cu axele mobile de coordonate, prin ξ şi η, din formulele (19.19), vom avea următoarele relații:

$$\left.\begin{aligned}0&=(a_A)_x-\frac{d\omega}{dt}\eta-\omega^2\xi,\\ 0&=(a_A)_y+\frac{d\omega}{dt}\xi-\omega^2\eta.\end{aligned}\right\}\qquad(19.20)$$

Scăzînd termen cu termen din formulele (19.19) formulele (19.20), vom găsi:

$$\left.\begin{aligned}a_x&=-\frac{d\omega}{dt}(y-\eta)-\omega^2(x-\xi),\\ a_y&=+\frac{d\omega}{dt}(x-\xi)-\omega^2(y-\eta).\end{aligned}\right\}\qquad(19.21)$$

De aici, vom obține ca şi mai sus:

$$a=\sqrt{\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\omega^4\right][(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}=BE\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\omega^4}.$$

Din formulele (19.20) se pot determina coordonatele (ξ, η) ale centrului accelerațiilor E în planul mobil, în raport cu sistemul

mobil al axelor de coordonate; rezolvînd aceste ecuații, vom obține:

$$\xi = \frac{(a_A)_x \omega^2 - (a_A)_y \frac{d\omega}{dt}}{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4},$$

$$\eta = \frac{(a_A)_x \frac{d\omega}{dt} + (a_A)_y \omega^2}{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}.$$

Comparînd aceste formule cu formulele (19.14) pentru coordonatele (x', y') ale centrului instantaneu C în raport cu sistemul mobil de axe de coordonate, concludem încă o dată că punctele C și E — centrul instantaneu și centrul accelerațiilor, nu coincid între ele.

Observăm că pentru viteză și accelerație, formulele în sistemul mobil de coordonate și formulele în sistemul fix, au avut la bază aceleași formule vectoriale. În aceasta constă una din cauzele avantajelor notațiilor vectoriale, deoarece în notațiile analitice, am fi nevoiți să deducem separat chiar de la început formulele în sistemul fix de coordonate și formulele în sistemul mobil, adică pentru fiecare sistem de axe de coordonate, trebuie să se facă calcule chiar de la început.

§ 84. Aplicații. Din cele expuse în paragrafele precedente, rezultă că dacă ne sînt cunoscute pozițiile centrului instantaneu și viteza unghiulară la un moment oarecare, putem găsi pentru acest moment vitezele tuturor punctelor figurii plane. Să presupunem că C este centrul instantaneu, se cere să se găsească vitezele punctelor A și B. Știm că $v_A = CA \cdot \omega$ și $v_B = CB \cdot \omega$, unde CA și CB sînt dreptele ce unesc centrul instantaneu C și punctele A și B. Ducînd din punctele A și B perpendiculare pe dreptele CA și CB în sensul rotirii figurii plane și luînd pe ele segmentele $CA \cdot \omega$ și $CB \cdot \omega$ vom găsi vectorii viteză $\overline{v}_A$ și $\overline{v}_B$.

Să examinăm cîteva exemple:

1. Să presupunem că segmentul A_1A_2 alunecă cu extremitățile sale pe două drepte perpendiculare între ele Ox și Oy (fig. 185); se cere să se găsească viteza punctului K al acestui segment. Unind centrul instantaneu C cu punctul K și luînd pe perpendiculara pe dreapta KC în punctul K segmentul cu lungimea $CK \cdot \omega$, vom găsi vectorul viteză $\overline{v}_K$ al punctului K. Deoarece vectorul $d\overline{r}$ al unei deplasări infinit mici este egal cu vectorul viteză înmulțit

cu diferenţiala timpului, adică $d\bar{r}=\bar{v}dt$, vom găsi totodată şi deplasarea infinit mică $d\bar{r}$ a punctului K, astfel cum se arată în fig. 185. Observăm, că acest mod de determinare a deplasărilor infinit mici ale punctelor unei figuri plane, se aplică destul de des în practică.

2. Fie dat sistemul de bare AB, EG, F_1E_1A, FF_1, EE_1, care sînt prevăzute cu articulaţii în punctele A, B, F_1, E_1, F, E, iar bara AB are la extremitatea ei o glisieră D, care alunecă pe bara fixă EG (fig. 186). Să se găsească centrul vitezelor C ale barei AB. Deoarece punctele F_1 şi E_1 ale barei F_1E_1A trebuie să descrie arce de cerc cu centrele corespunzătoare în punctele F şi E, centrul vitezelor barei F_1E_1A se află în punctul O; de aceea, viteza punctului A trebuie să fie perpendiculară pe dreapta OA şi centrul vitezelor barei AB trebuie să se afle pe dreapta OA. De aici rezultă că centrul vitezelor se află în punctul de intersecţie al dreptei BB' perpendiculară pe dreapta EG, cu dreapta AO, adică în punctul C. Deci, deplasarea infinit mică $d\bar{r}$ a unui punct oarecare K al barei AB, trebuie să fie dirijată perpendicular pe dreapta CK, în sensul indicat în fig. 186, dacă viteza unghiulară ω este pozitivă şi de sens contrar dacă viteza unghiulară ω este negativă.

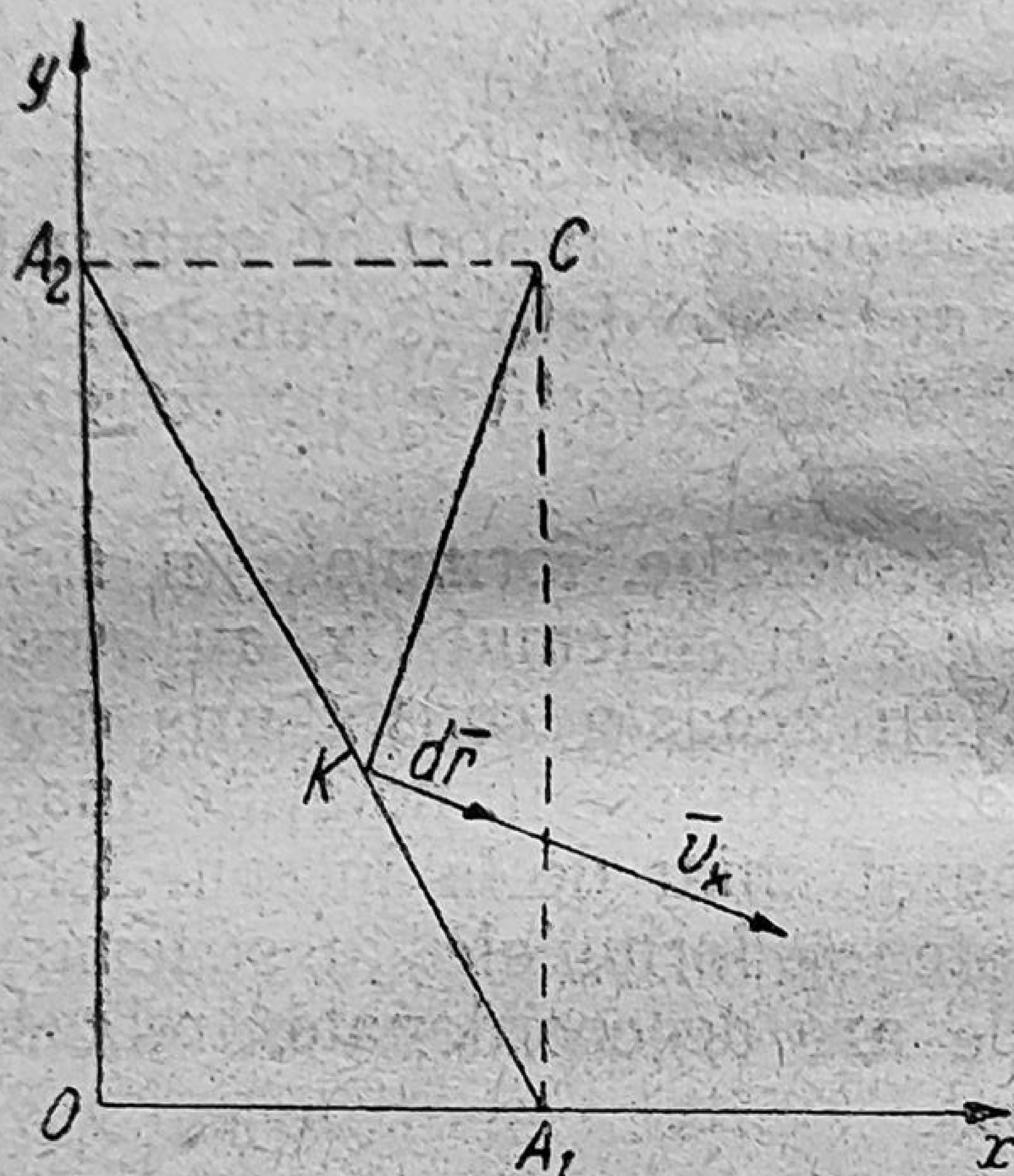


Fig. 185

3. Să presupunem că cunoaştem vectorii viteză $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ a două puncte oarecare A şi B dintr-o figură plană (fig. 187). Evident că vectorii $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ nu pot fi arbitrari, deoarece punctele A şi B aparţin aceleiaşi figuri plane. Ducînd dreptele $AC \perp \bar{v}_A$ şi $BC \perp \bar{v}_B$ vom găsi centrul instantaneu în punctul de intersecţie C al acestor drepte AC şi BC. Vom măsura la aceeaşi scară modulele vitezelor v_A şi v_B pe dreptele CA şi CB; ele vor fi egale cu segmentele Ca şi Cb. Unind între ele punctele a şi b printr-o dreaptă, obţinem triunghiul Cab, care se numeşte *planul vitezelor*. Presupunem că vrem să aflăm viteza unui punct oarecare D al

figurii plane. Unim punctul D cu punctul C, punctul A cu D și ducem $Ad \parallel AD$. Atunci segmentul Cd va reprezenta viteza punctu-

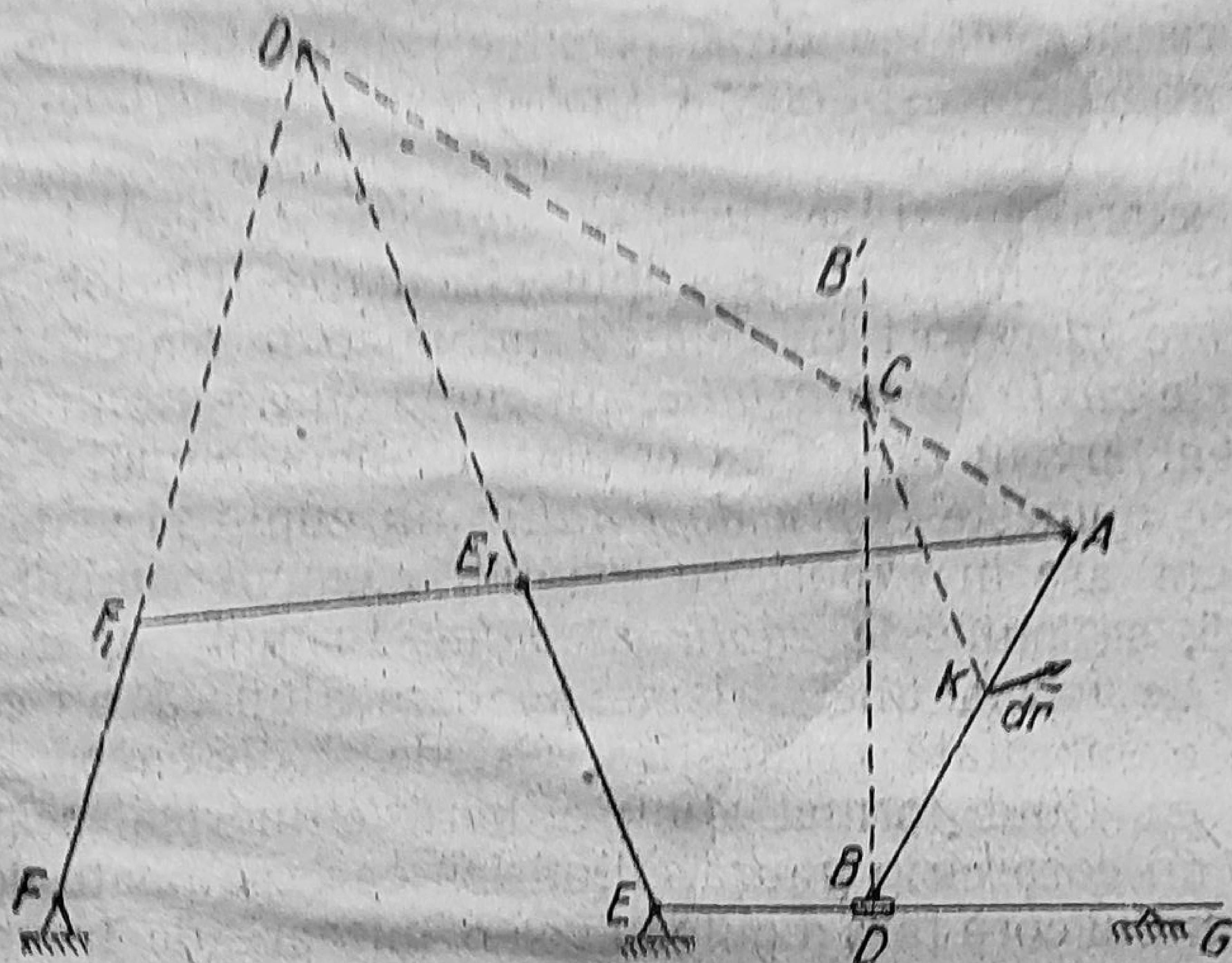


Fig. 186

lui D la aceeași scară care s-a luat pentru reprezentarea vitezelor v_A și v_B prin segmentele Ca și Cb. În adevăr, notăm scara prin μ, astfel încît $v_A = \mu CA$; pe de altă parte din asemănarea $\triangle CAD$ și $\triangle Cad$ avem:

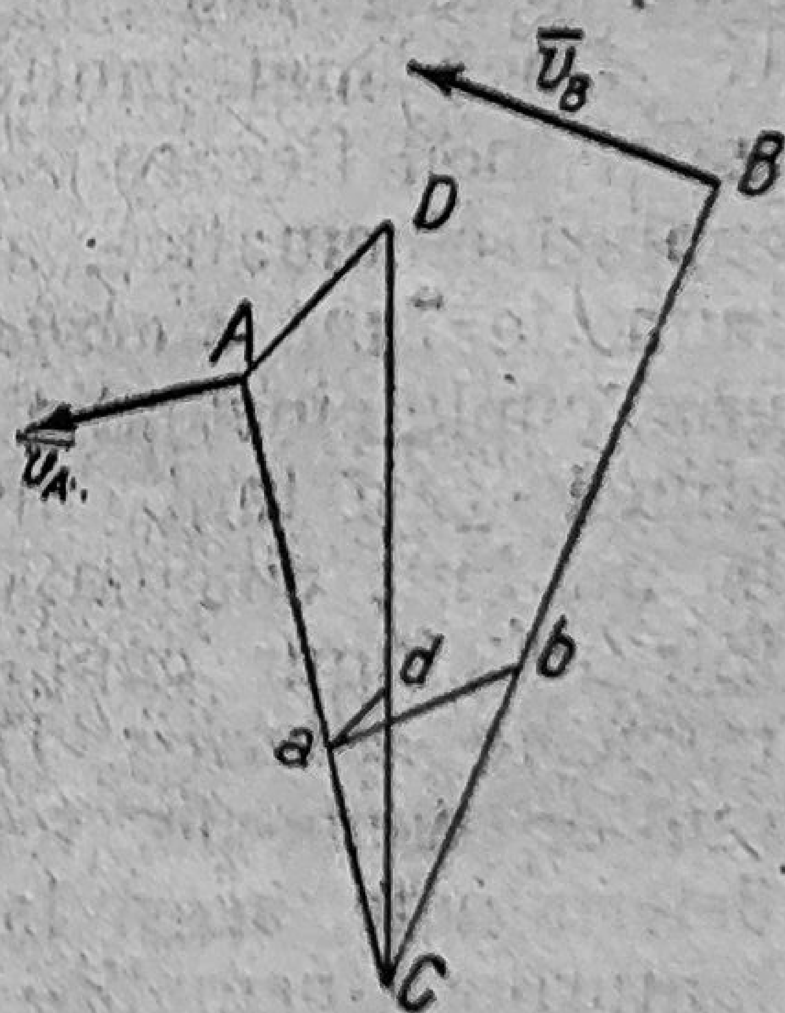


Fig. 187

$$\frac{CA}{Ca} = \frac{CD}{Cd}, \quad \text{sau} \quad \frac{CA \cdot \omega}{Ca} = \frac{CD \cdot \omega}{Cd}.$$

De aici obținem:

$$\frac{v_A}{Ca} = \frac{v_D}{Cd}.$$

Deoarece avem: $\frac{v_A}{Ca} = \mu$, vom avea deci: $\frac{v_D}{Cd} = \mu$, adică $v_D = \mu\, Cd$, ceea ce era de demonstrat. Vedem, că dacă cunoaștem triunghiul Cab, putem găsi viteza oricărui punct al figurii plane; așa se explică denumirea de plan al vitezelor, care se dă triunghiului Cab.

4. Un exemplu de două corpuri, astfel încît primul corp să limiteze mișcarea celui de-al doilea, și al doilea să limiteze miș-

carea primului, se numeşte *cuplu cinematic;* corpurile componente ale cuplului cinematic se numesc *elementele* cuplului. Pentru ca limitarea mişcării reciproce a elementelor să poată avea loc, este necesar ca acestea să fie în contact; formele geometrice după care se produce acest contact se numesc *legăturile* cuplului cinematic. Cuplurile cinematice se numesc *inferioare,* dacă legăturile lor sînt suprafeţe şi se numesc *superioare,* dacă legăturile lor sînt curbe sau puncte. Un cuplu cinematic inferior, la care un element are în raport cu celălalt numai o mişcare de translaţie, se numeşte *cuplu de translaţie;* un cuplu cinematic inferior la care un element are în raport cu celălalt element numai o mişcare de rotaţie, se numeşte *cuplu de rotaţie;* un cuplu cinematic la care un element are în raport cu celălalt element numai o mişcare elicoidală, se numeşte *cuplu elicoidal.* Primul cuplu ni-l putem imagina de forma unei prisme pe care alunecă un corp cu un locaş pe o suprafaţă prismatică. Cel de-al doilea cuplu se poate imagina ca fiind format dintr-o bară cilindrică peste care se îmbracă un corp cu o gaură cilindrică care se poate doar roti în jurul primului corp fără a putea avea o mişcare de translaţie de-a lungul barei cilindrice. În sfîrşit, al treilea cuplu poate fi realizat printr-o piuliţă cu un filet elicoidal, montată pe un şurub. Evident că aceste cupluri permit să se inverseze mişcarea, adică, de exemplu, în primul cuplu, de a lăsa corpul fix şi a deplasa prisma care trece prin el.

Dacă mai multe cupluri cinematice sînt legate între ele, astfel încît fiecare element nu intervine mai mult decît în două cupluri cinematice, atunci acest sistem de cupluri cinematice se numeşte *lanţ cinematic simplu.* Dacă fiecare dintre elementele unui cuplu cinematic simplu, intervine în două cupluri cinematice, atunci acest lanţ cinematic simplu se numeşte *închis,* dacă însă la un lanţ cinematic simplu sînt elemente care nu intră decît într-un singur cuplu cinematic, atunci acest lanţ cinematic se numeşte *neînchis.* Dacă, la mişcările date ale unuia sau mai multor elemente, toate celelalte elemente au mişcări complet determinate, acest lanţ cinematic se numeşte *mecanism.* Studiul lanţurilor cinematice şi al mecanismelor poate fi găsit în lucrarea lui I. I. Artobolevski „Teoria mecanismelor şi maşinilor", 1953.

La teoria matematică a mecanismelor a contribuit în mare măsură renumitul matematician, acad. Pafnutie Lvovici Cebîşev (1821—1894), care ocupîndu-se iniţial doar cu problemele teoretice matematice, şi-a pus mai pe urmă şi a rezolvat adeseori, probleme matematice legate de practică.

Să examinăm un lanţ cinematic plan şi închis, ale cărui elemente sînt bare prevăzute la capete cu articulaţii cilindrice; astfel, lanţul cinematic plan considerat, se compune doar din cupluri de rotaţie. Evident că numărul elementelor trebuie să fie mai mare decît trei, deoarece trei elemente formînd un triunghi, nu pot avea mişcări relative. De aceea cel mai simplu lanţ cinematic închis, trebuie să fie format din patru elemente, cum se arată în fig. 188. Dacă în acest lanţ cinematic vom imobiliza, de exemplu, elementul AB, atunci, deoarece mişcările celorlalte elemente BC, CD şi DA, vor fi complet determinate, vom obţine un mecanism. Acest mecanism se numeşte mecanism format din *patru elemente articulate*. Elementul c poartă denumirea de *bielă*, elementele b şi d se numesc *manivele* dacă ele pot avea o rotire completă în jurul punctelor A şi B, şi *balansoare*, în caz contrar.

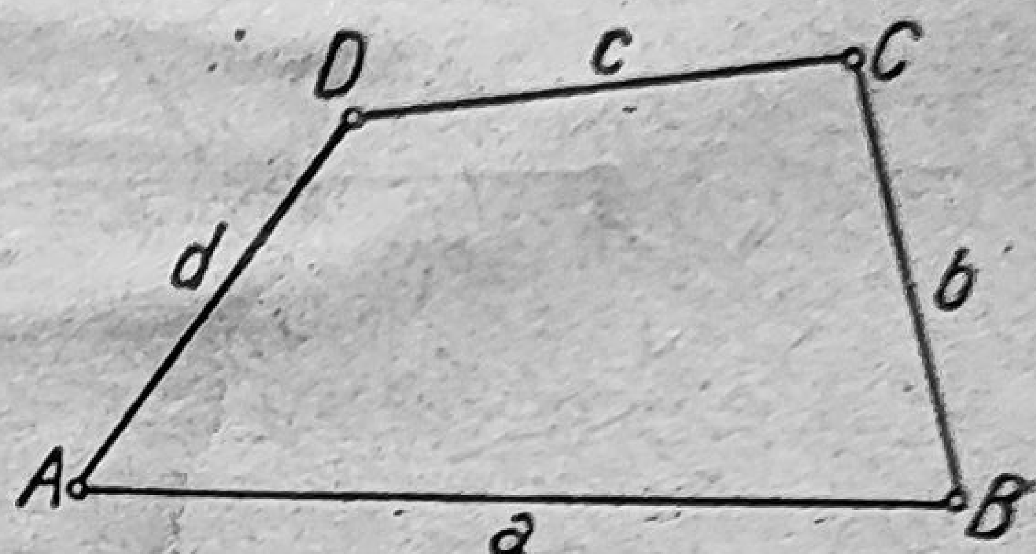


Fig. 188

Nu este greu de găsit condiţia suficientă ca elementul b sau d să fie manivele. Să presupunem că avem $d<a$. Dacă d este manivelă, atunci are două poziţii posibile, care îi asigură rotirea completă în jurul punctului A; aceste poziţii sînt reprezentate în fig. 189 (I) şi (II). Fie $c>b$. Atunci din fig. (I) după proprietăţile laturilor triunghiului, avem:

$$a-d\geqslant c-b;$$

din fig. (II) obţinem:

$$a+d\leqslant c+b.$$

Scăzînd din egalitatea a doua pe prima, găsim $2d<2b$, adică manivelă, trebuie să fie cea mai mică dintre elementele d şi b. Deoarece am presupus că $a>d$, $c>b$, şi am găsit că $b>d$, de aici rezultă că manivela va fi cea mai mică dintre cele patru elemente. Cele două inegalităţi precedente se mai pot reprezenta şi astfel:

$$c+d\leqslant a+b, \quad a+d\leqslant c+b.$$

Indiferent de faptul că elementul a este mai mare sau mai mic decît elementul c, amîndouă aceste inegalităţi vor fi satisfăcute, cu condiţia ca suma dintre elementul cel mai mare şi cel mai mic să fie mai mică sau egală cu suma celorlalte două elemente. Ipoteza $c<b$ duce la o concluzie analogă. Astfel, ajungem la următorul adevăr:

Pentru ca un element al unui mecanism cu patru elemente să fie manivelă, este suficient ca acesta să fie cel mai mic dintre

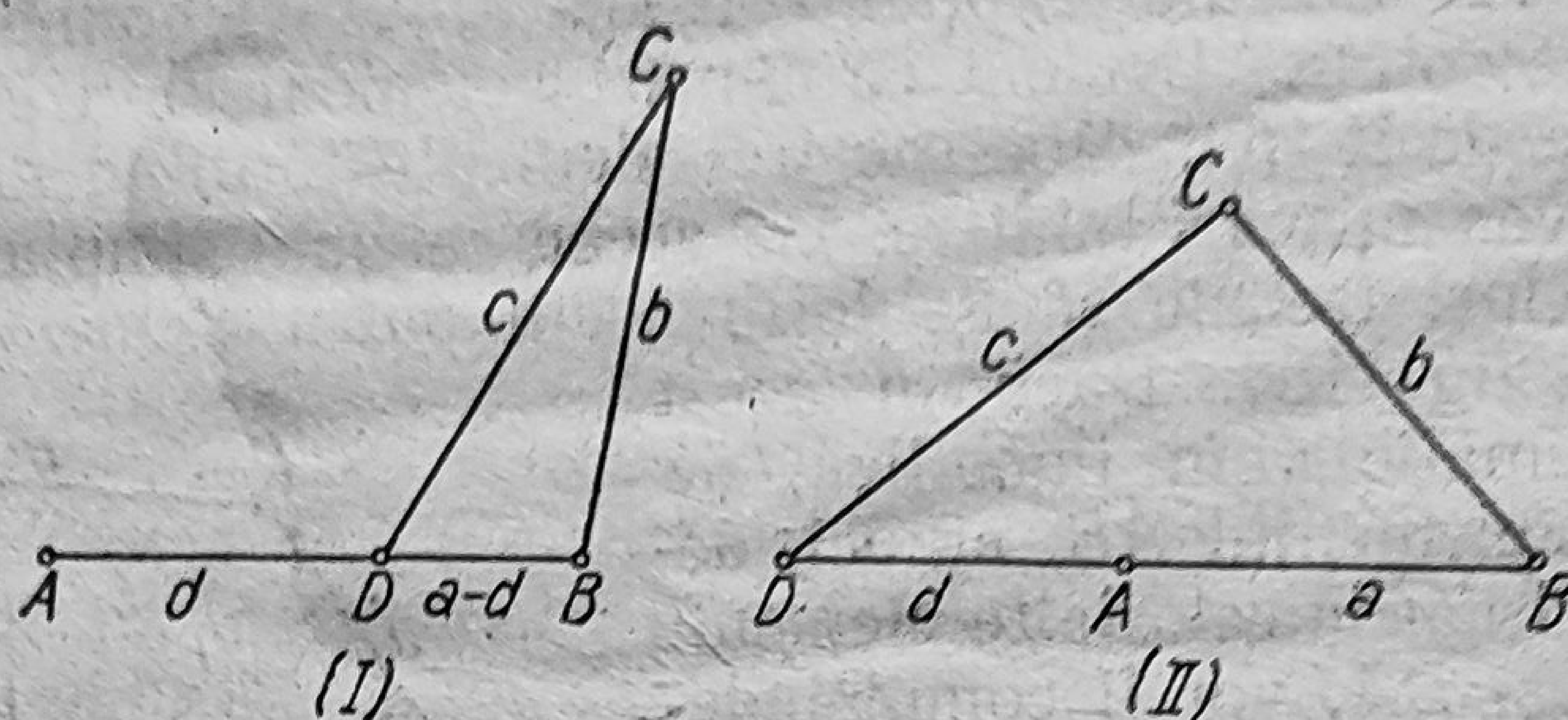


Fig. 189

cele patru elemente şi suma elementului cel mai mic cu cel mai mare să fie mai mică sau egală cu suma celorlalte două elemente.

Din triunghiurile cercetate de noi se mai pot deduce şi inegalităţile:

$$a-d \leqslant b+c, \quad a+d \geqslant c-b.$$

Nu ne-am folosit de aceste inegalităţi deoarece ele duc la inegalităţi evidente, care sînt totdeauna satisfăcute:

$$a \leqslant b+c+d, \quad a+b+d \geqslant c.$$

Să examinăm mişcarea bielei CD (fig. 190). Punctele C şi D, care aparţin barelor BC şi AD şi care sînt în acelaşi timp şi capetele bielei CD, descriu prin mişcarea lor, arce de cerc cu razele egale cu b şi d, cu centrele în punctele B şi A. Prin urmare, în baza § 81, centrul instantaneu al vitezelor O, al bielei CD se află în punctul de intersecţie O al normalelor la aceste circumferinţe duse în punctele C şi D, adică în punctul de intersecţie al prelungirilor barelor BC şi AD. Vom lua un punct oarecare K al bielei CD şi vom găsi viteza lui $\overline{v}_K$. Conform celor precedente, modulul acestei viteze este egal cu $\Omega \cdot OK$, unde Ω este valoarea absolută

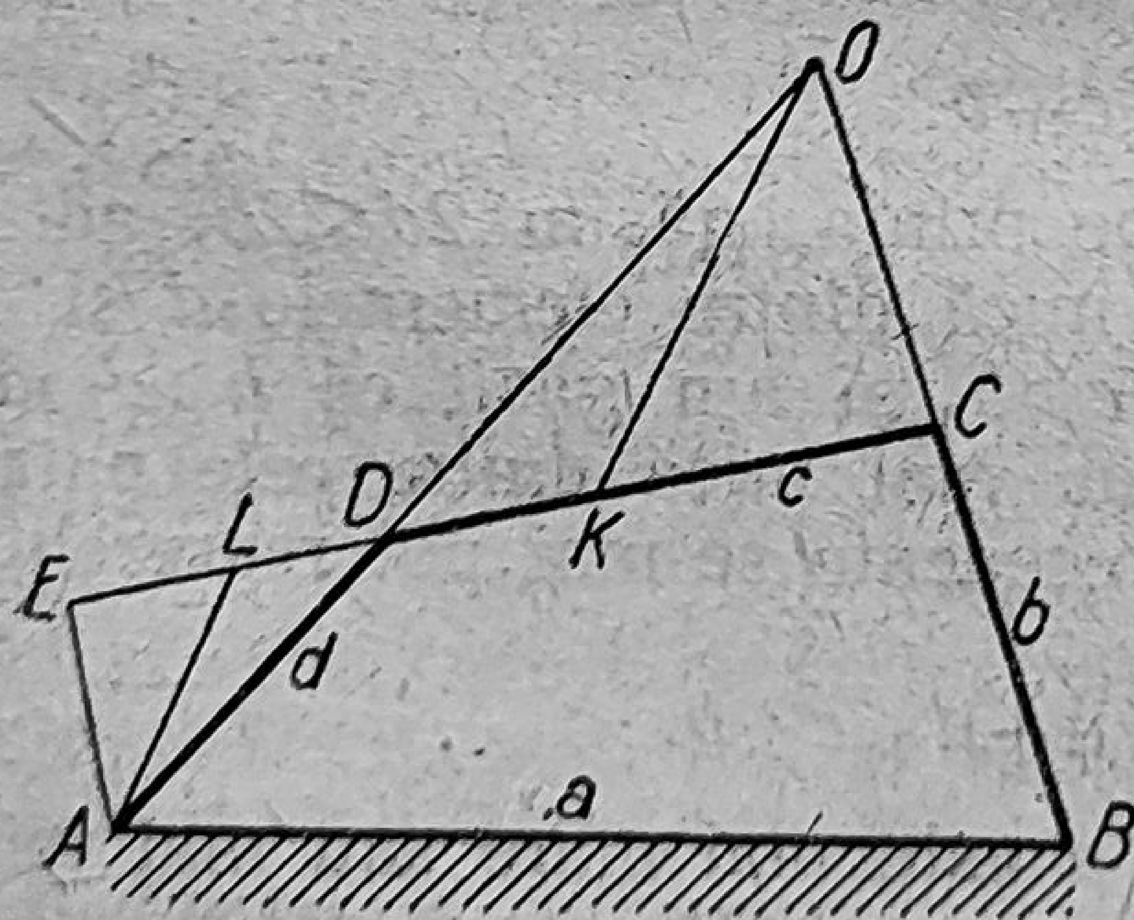


Fig. 190

a vitezei unghiulare de rotație a bielei, iar direcția vitezei punctului K va fi perpendiculară pe dreapta OK, adică:

$$\bar{v}_k = \bar{n}^0 \Omega \cdot OK,$$

unde n^0 este vectorul unitar perpendicular pe dreapta OK. Pentru a determina viteza unghiulară Ω, vom aplica formula precedentă unuia din capetele bielei, de exemplu, punctului D; vom obține pentru modulul v_D al vitezei punctului D, expresia:

$$v_D = \Omega \cdot OD.$$

Pe de altă parte, pentru modulul v_D al vitezei punctului D, avem:

$$V_D = \omega d = \omega \cdot AD,$$

iar viteza unghiulară ω este totdeauna cunoscută, deoarece ea ni se dă prin regimul de mișcare al mecanismului. Din aceste două egalități obținem:

$$\Omega \cdot OD = \omega \cdot AD,$$

sau

$$\Omega = \omega \frac{AD}{OD}.$$

Prin urmare, vom avea:

$$\bar{v}_K = \bar{n}^0 \omega \frac{AD}{OD} \cdot OK.$$

În acest fel, viteza punctului arbitrar K al bielei, se determină printr-o relație simplă dintre lungimile barelor mecanismului.

La executarea acestei construcții se poate întîmpla ca punctul O să fie atît de îndepărtat, încît nu încape în limitele desenului. Evident, că aceasta se va întîmpla atunci cînd barele BC și AD sînt aproape paralele între ele. Pentru determinarea vitezei punctului K al bielei, în acest caz, vom duce dreapta $AE \parallel BC$ și vom prelungi biela CD pînă la intersecția ei în punctul E cu dreapta AE. Vom obține triunghiul AED asemenea cu triunghiul OCD, ca triunghiuri avînd laturile paralele două cîte două.

Luăm pe dreapta ED un punct L astfel încît să avem:

$$\frac{EL}{LD} = \frac{CK}{KD}.$$

De aici avem:

$$\frac{EL}{LD}+1=\frac{CK}{KD}+1,$$

sau

$$\frac{ED}{LD}=\frac{CD}{KD},$$

adică

$$\frac{ED}{CD}=\frac{LD}{KD}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AED şi OCD găsim:

$$\frac{ED}{CD}=\frac{AD}{OD}.$$

Pe baza proporţiei precedente, vom avea:

$$\frac{AD}{OD}=\frac{LD}{KD},$$

sau

$$\frac{AD}{LD}=\frac{CD}{KD}.$$

De aici concludem că triunghiurile ALD şi OKD, avînd cîte un unghi egal cu vîrful în punctul D cuprins între laturi proporţionale vor fi asemenea între ele. Deci, trebuie să avem:

$$\frac{OK}{AL}=\frac{KD}{LD}=\frac{OD}{AD}.$$

De aici vom avea:

$$OK=AL\cdot\frac{OD}{AD}.$$

Introducînd această valoare în expresia precedentă a vectorului viteză $\overline{v}_K$ al punctului K, vom obţine:

$$\overline{v}_K=\overline{n}^0\omega\cdot AL.$$

Vedem că pentru determinarea vitezei $\overline{v}_K$ este suficient să măsurăm segmentul AL, lucru totdeauna posibil, deoarece triunghiul ADE va intra totdeauna în limitele desenului.

Să observăm că datorită asemănării triunghiurilor OKD şi ADL vom avea totdeauna $AL\parallel OK$, aşa că vectorul $\overline{n}^0$ va fi perpendicular şi pe dreapta AL. Evident că triunghiul ADE reprezintă planul vitezelor pentru biela CD, deoarece, atunci cînd punctul K

coincide cu punctele C şi D, avem $v_C = \omega \cdot AE$ şi $v_D = \omega \cdot AD$, adică segmentele AE şi AD sînt proporţionale cu vitezele punctelor C şi D.

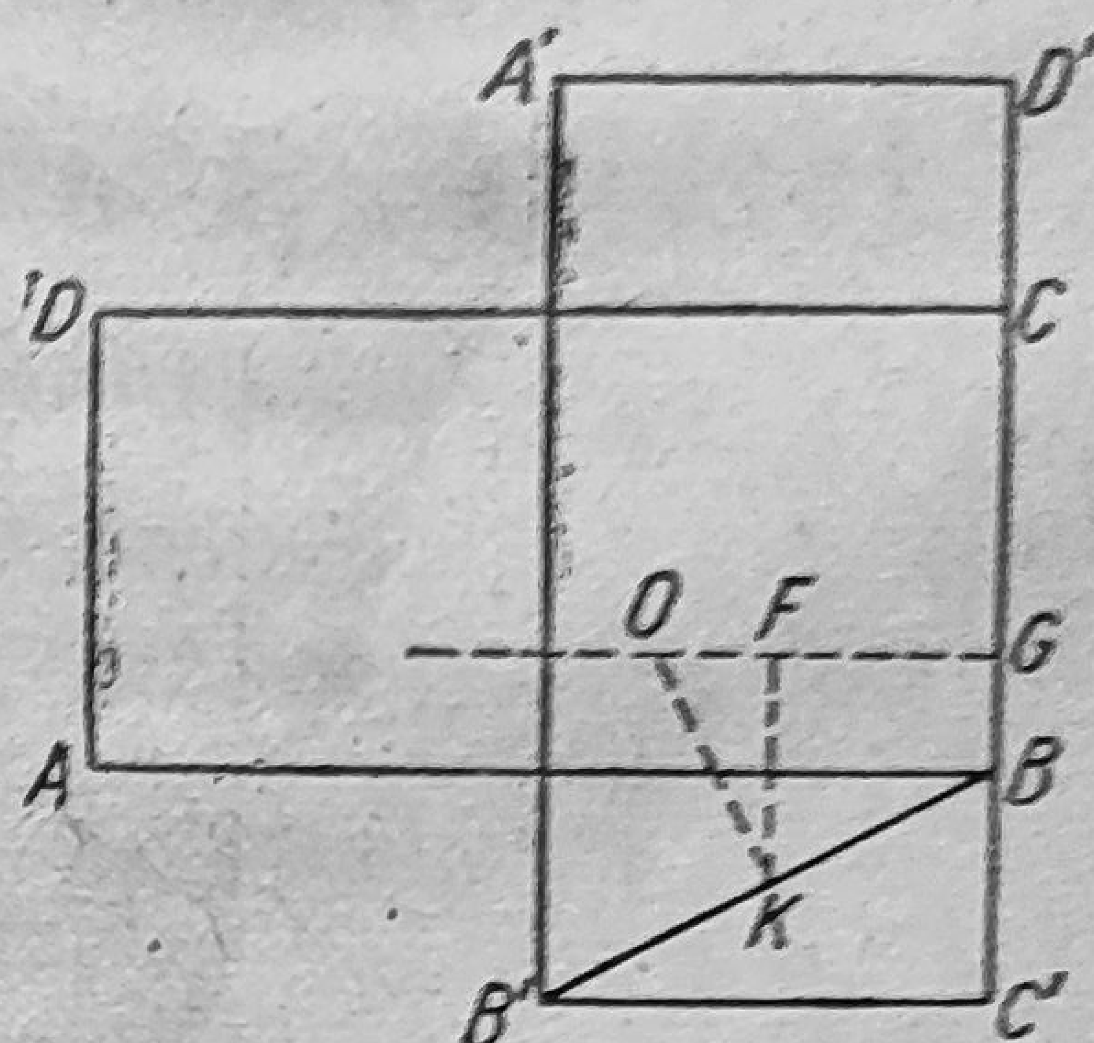


Fig. 191

§ 85. Exemple. 61. In ce loc trebuie aşezat cepul unei mese mobile, spre a putea întoarce tăblia mesei cu un unghi drept şi s-o deschidem în mod obişnuit? În poziţia închisă tăblia mobilă a mesei este un dreptunghi a cărui lungime $AB=2l$ este dublul lăţimii $AD=l$ (fig. 191). Tăblia mesei $ABCD$ poate fi rotită în jurul cepului cu 90° în poziţia $A'B'C'D'$, şi apoi masa poate fi deschisă astfel încît tăblia ia forma unui pătrat cu latura $2l$. Conform indicaţiilor § 81, împărţim segmentele CC' şi BB' în două părţi egale; în mijloacele lor G şi K ridicăm perpendiculare; punctul O de intersecţie al acestor perpendiculare va fi centrul de rotaţie al tăbliei, adică locul unde trebuie fixat cepul. Deoarece $D'C=BC'=\frac{l}{2}$, vom obţine că $CC'=\frac{3l}{2}$; de aici vom găsi:

$$GC'=\frac{3l}{4}, \quad BG=\frac{3l}{4}-\frac{l}{2}=\frac{l}{4}.$$

Triunghiurile dreptunghice OKF şi $BB'C'$ vor fi asemenea deoarece au unghiuri egale; prin urmare, vom avea:

$$\frac{OF}{FK}=\frac{BC'}{B'C'},$$

sau

$$OF=FK\cdot\frac{BC'}{B'C'}=\frac{l}{2}\cdot\frac{\frac{l}{2}}{l}=\frac{l}{4}.$$

Astfel, găsim

$$GO=\frac{l}{2}+\frac{l}{4}=\frac{3l}{4}.$$

Ştiind că $BG=\frac{l}{4}$, $GO=\frac{3l}{4}$, cunoaştem astfel locul unde va trebui fixat cepul.

62. Să se deducă ecuaţia centroidei fixe şi a celei mobile pentru biela AB a maşinii cu abur (fig. 192). Pentru determinarea ecuaţiei centroidei fixe, vom alege un sistem ortogonal de axe de coordonate fixe Ox_1y_1, iar pentru determinarea ecuaţiei centroidei mobile, vom alege un sistem mobil de axe de coordonate Axy. Evident, că bara OB este o manivelă, deoarece

punctul B execută o rotire completă în jurul punctului O. Se vede uşor că
centrul instantaneu al bielei AB va fi punctul de intersecţie C al pre-

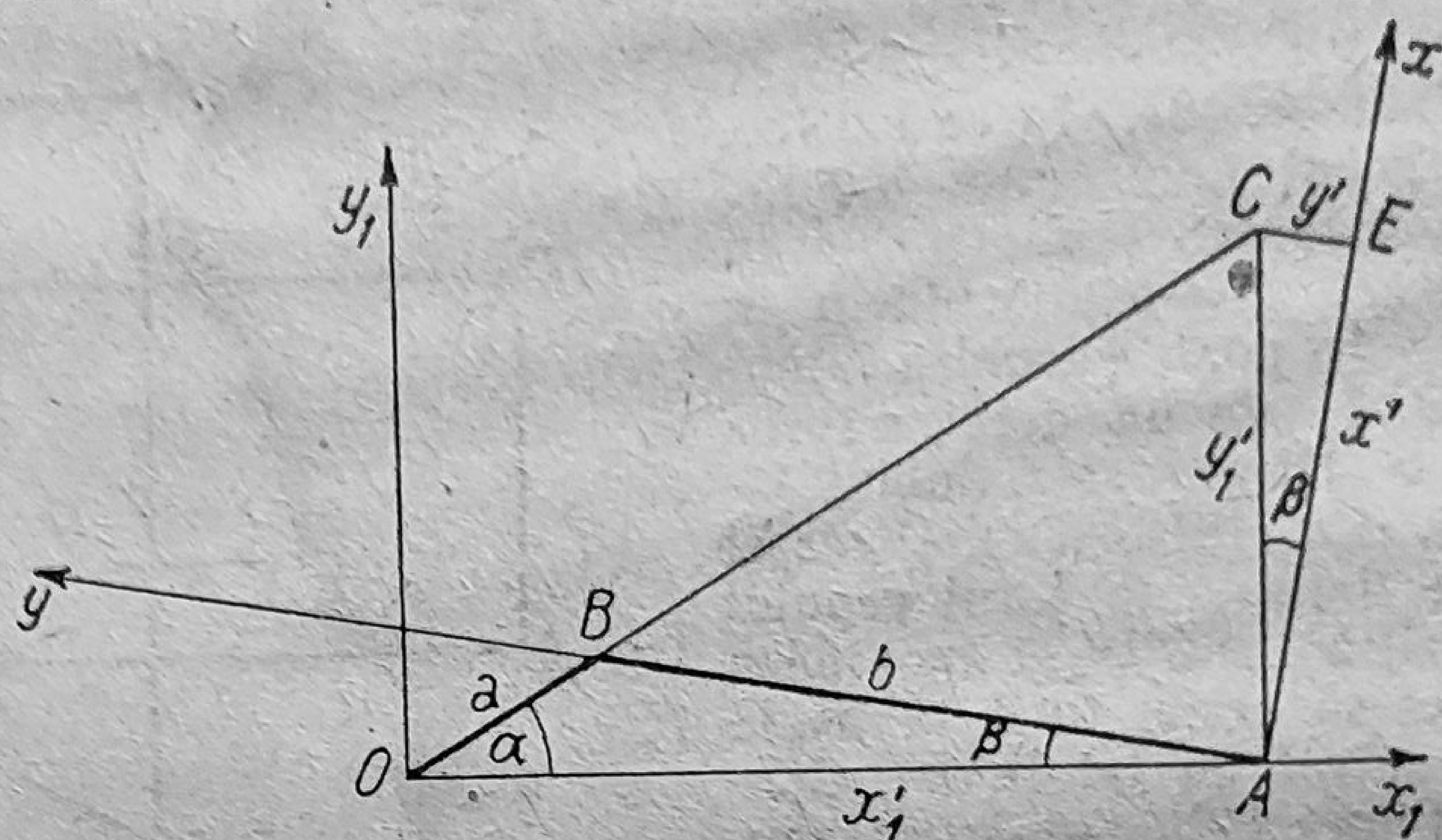


Fig. 192

lungirii lui OB cu perpendiculara în punctul A pe dreapta Ox_1; notăm coordonatele punctului C prin (x_1', y_1'), unde:

$$x_1' = OA, \quad y_1' = AC.$$

Vom introduce notaţiile $OB = a$, $AB = b$, $\measuredangle BOA = \alpha$, $\measuredangle BAO = \beta$. Făcînd desenul pentru diferite valori ale unghiului α este uşor să ne convingem că pentru valorile unghiului α situate în primul şi în al treilea cadran vom avea $y_1' > 0$, iar pentru valorile unghiului α situate în al doilea şi al patrulea cadran vom avea $y_1' < 0$. Pentru valorile unghiului α situate în primul cadran vom obţine din fig. 192:

$$x_1' = OA = a \cos \alpha + b \cos \beta, \quad a \sin \alpha = b \sin \beta, \quad y_1' = x_1' \operatorname{tg} \alpha.$$

Din primele două ecuaţii găsim:

$$b \cos \beta = x_1' - a \cos \alpha, \quad b \sin \beta = a \sin \alpha;$$

ridicîndu-le la pătrat şi adunînd rezultatele, vom avea:

$$b^2 = x_1'^2 + a^2 - 2 a x_1' \cos \alpha.$$

De aici avem:

$$\cos \alpha = \frac{x_1'^2 + a^2 - b^2}{2 a x_1'}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{[x_1'^2 + a^2 - b^2]^2}{4 a^2 x_1'^2}$$

Deoarece:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1'}{x_1'},$$

vom găsi:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{x_1'^2}{x_1'^2 + y_1'^2}.$$

Egalînd între ele cele două expresii obținute pentru $\cos^2\alpha$ vom ajunge la ecuația centroidei fixe în coordonate ortogonale, sub următoarea formă:

$$\frac{x_1'^2}{x_1'^2+y_1'^2}=\frac{[x_1'^2+a^2-b^2]^2}{4a^2x_1'^2}.$$

Introducem coordonatele polare (r_1', φ_1') după formulele:

$$x_1'=r_1'\cos\varphi_1', \quad y_1'=r_1'\sin\varphi_1'.$$

Vom obține:

$$\cos^2\varphi_1'=\frac{[r_1'^2\cos^2\varphi_1'-(b^2-a^2)]^2}{4a^2r_1'^2\cos^2\varphi_1'}.$$

Aducînd la același numitor și extrăgînd rădăcina pătrată, vom avea:

$$r_1'^2\cos^2\varphi_1'-(b^2-a^2)=\pm 2ar_1'\cos^2\varphi_1'.$$

Deoarece pentru $\alpha=0$ trebuie să avem:

$$\beta=0, \quad y_1'=0, \quad \varphi_1'=0, \quad x_1'=r_1'=a+b,$$

concludem că în partea dreaptă trebuie să se ia semnul plus. Astfel, vom avea:

$$r_1'^2\cos^2\varphi_1'-(b^2-a^2)=+2ar_1'\cos^2\varphi_1,$$

sau:

$$\cos\varphi_1'=\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{r_1'(r_1'-2a)}}.$$

Deoarece pentru $\varphi_1'=0$ trebuie să avem: $r_1'=a+b$, rezultă că radicalul trebuie luat cu semnul plus și pentru intervalul $\frac{\pi}{2}\geqslant\varphi_1'\geqslant 0$, vom obține ecuația centroidei fixe în coordonate polare, sub forma definitivă:

$$\cos\varphi_1'=+\sqrt{\frac{b^2-a^2}{r_1'(r_1'-2a)}}.$$

Să trecem acum la determinarea ecuației centroidei mobile, notînd prin (x', y') coordonatele centrului instantaneu C în raport cu sistemul mobil al axelor de coordonate ortogonale mobile Axy. Avem:

$$x'=AC\cos\beta, \quad y'=AC\sin\beta, \quad AC=OA\cdot \operatorname{tg}\alpha;$$

prin urmare:

$$x'=OA\cdot\operatorname{tg}\alpha\cos\beta, \quad y'=OA\cdot\operatorname{tg}\alpha\sin\beta.$$

Introducem coordonatele polare (r', φ') ale punctului C după formulele:

$$x'=r'\cos\varphi', \quad y'=r'\sin\varphi'.$$

Vedem că trebuie să avem:

$$\varphi'=\beta, \quad r'=AC=OA\operatorname{tg}\alpha.$$

Din prima şi a doua relaţie vom obţine:

$$r'=(a\cos\alpha+b\cos\beta)\,\mathrm{tg}\,\alpha=a\sin\alpha+b\cos\varphi'\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Din relaţia $a\sin=b\sin\beta=b\sin\varphi'$ vom avea:

$$a\sin\alpha=b\sin\varphi',\quad a\cos\alpha=\sqrt{a^2-b^2\sin^2\varphi'},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b\sin\varphi'}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\varphi'}},$$

Prin urmare:

$$r'=(b\sin\varphi'+b\cos\varphi')\frac{b\sin\varphi'}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\varphi'}},$$

adică:

$$r'=b\sin\varphi'\left[1+\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\sin^2\varphi'}}\right].$$

Deoarece totdeauna are loc inegalitatea $\frac{a}{b}<1$, putem să punem $\frac{a}{b}=\sin\varepsilon$; vom găsi atunci:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\sin^2\varphi'=(\sin\varepsilon+\sin\varphi')(\sin\varepsilon-\sin\varphi')=$$

$$=2\sin\frac{\varepsilon+\varphi'}{2}\cos\frac{\varepsilon-\varphi'}{2}\,2\sin\frac{\varepsilon-\varphi'}{2}\cos\frac{\varepsilon+\varphi'}{2}=\sin(\varepsilon+\varphi')\sin(\varepsilon-\varphi').$$

În acest fel, ajungem la următoarea ecuaţie a centroidei fixe în coordonate polare:

$$r'=b\sin\varphi'\left[1+\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{\sin(\varepsilon+\varphi')\sin(\varepsilon-\varphi')}}\right].$$

Observăm, că dacă vom avea $\alpha=\frac{\pi}{2}$, adică vom avea $OB\perp OA$, atunci punctul C se va găsi la infinit, şi vom avea:

$$r_1'=r'=\infty,\quad x_1'=\sqrt{b^2-a^2},\quad \varphi_1'=\frac{\pi}{2},\quad \varphi'=\varepsilon.$$

Nu vom reproduce calculele care nu prezintă dificultăţi pentru valorile unghiului α în celelalte cadrane.

63. Să se folosească planul vitezelor pentru găsirea vitezelor punctelor unei biele a unei maşini cu abur.

Mecanismul maşinii cu abur se obţine prin deformarea mecanismului cu patru bare articulate (fig. 188) cînd bara BC este balansoar, bara AD este manivelă şi punctul B se depărtează la infinit. În acest caz, vom avea fig. 193. Deoarece punctul B va fi un punct depărtat la infinit, dreptele AB şi CD se intersectează într-un punct îndepărtat la infinit, adică devin paralele. În mecanismul cu patru bare, punctul C descrie un arc de cerc cu raza egală cu BC; deoarece punctul B este depărtat la infinit,

această circumferință devine o dreaptă (Γ) pe care trebuie să alunece punctul C. Știm că pentru obținerea centrului instantaneu O al bielei CD, trebuie prelungită dreapta AD pînă la intersecția ei cu prelungirea BC, adică pînă la intersecția prelungirii dreptei AD cu perpendiculara pe dreapta (Γ), ridicată în punctul C. Dacă punctul O nu încape pe desen, putem

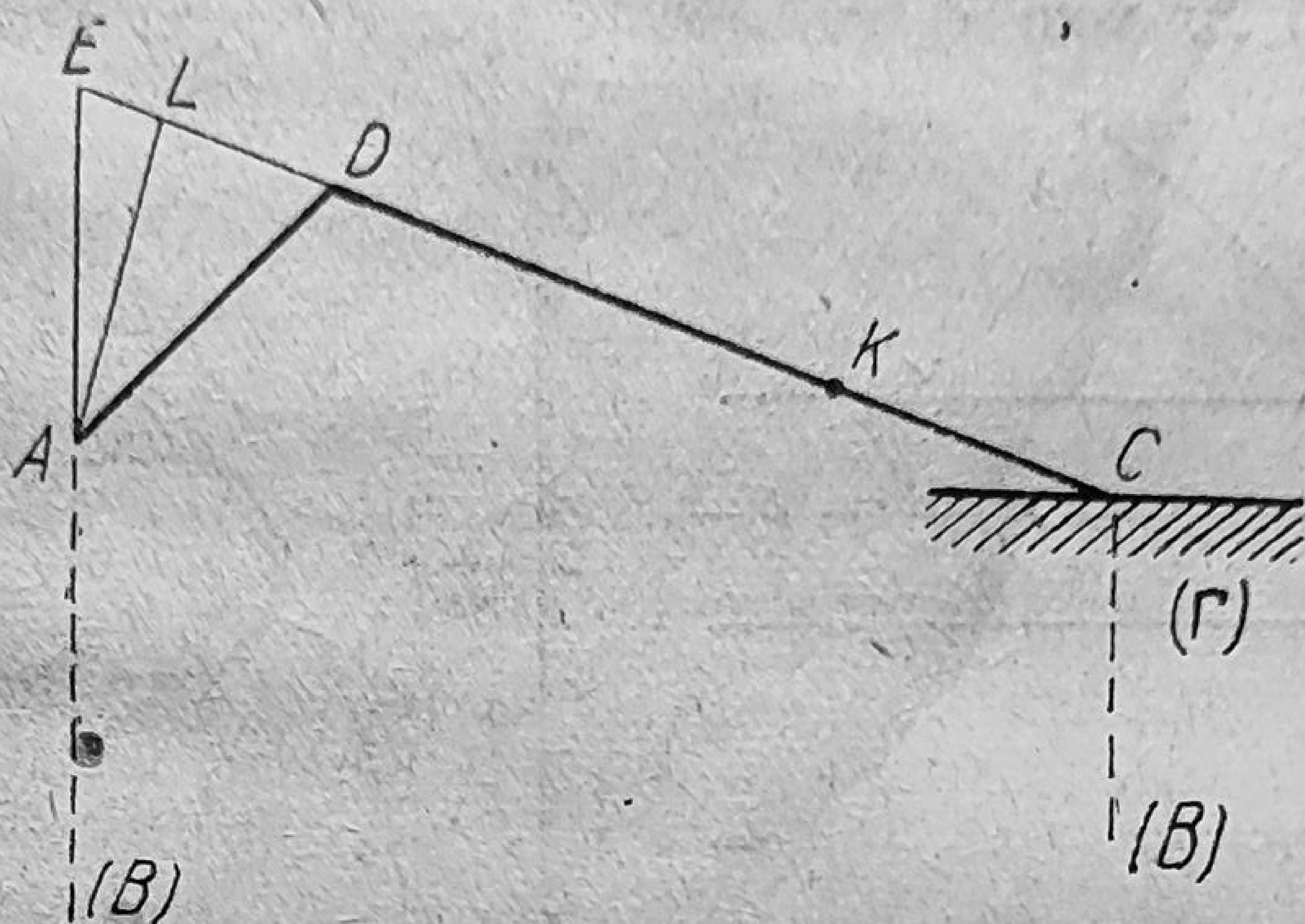


Fig. 193

apela la construcția planului vitezelor, așa cum s-a arătat mai sus. In acest scop vom duce prin punctul A dreapta $AE \parallel BC$, adică perpendiculară pe dreapta (Γ), și vom prelungi biela CD pînă în punctul lor de intersecție, punctul E cu dreapta AE. Să determinăm viteza unui punct oarecare K al bielei CD. Atunci vom lua pe dreapta ED punctul L, astfel încît:

$$\frac{EL}{LD}=\frac{CK}{KD}.$$

Unim punctul L cu punctul A prin dreapta AL; pe baza celor precedente viteza $\bar{v}_K$ a punctului K va fi:

$$\bar{v}_k=\bar{n}^0\omega \cdot AL$$

unde ω este viteza unghiulară a manivelei AD, iar $\bar{n}^0$ este vectorul unitar, perpendicular pe dreapta AL. Acest exemplu ne arată clar avantajul aplicării planului vitezelor.

64. Un corp, mărginit de o suprafață dată de rotația S, se poate deplasa printr-o mișcare elicoidală în jurul unei axe fixe Δ. Pe suprafața S a corpului apasă un știft drept, astfel încît axa știftului să rămînă totdeauna perpendiculară pe axa corpului considerat, iar știftul să se poată deplasa printr-o mișcare de translație, paralel cu axa lui. Dacă știftul ar avea capete ascuțite, atunci poziția știftului, în orice moment, ar determina raza corpului de rotație dat, adică lungimea perpendicularei coborîtă din punctul de contact al știftului cu suprafața S pe axa corpului considerat. Totuși nu este posibil ca știftul să fie prevăzut cu un vîrf ascuțit, deoarece vîrful va zgîria și, astfel, va deteriora suprafața S; de aceea, știftul se termină printr-o emisferă al cărei diametru este egal cu diametrul știftului. De aici rezultă eroarea care se observă pe fig. 194; anume, dacă știftul s-ar termina printr-un vîrf, atunci el ar indica raza CA a corpului, pe cînd el indică în

realitate raza CB. Să se găsească o astfel de suprafaţă, încît ştiftul terminat cu o emisferă, rezemîndu-se pe această suprafaţă, să indice razele exacte ale corpului mărginit de suprafaţa S. Această problemă se poate rezolva pur grafic. Fie L curba de intersecţie a suprafeţei S cu planul desenului. Dacă vom aşeza secţiunea ştiftului, astfel încît capătul A să fie situat pe curba L, cum se arată în fig. 195, atunci o parte din semicerc se va găsi în stînga curbei L; vom desena aceste arce de cerc. Efectuînd asemenea

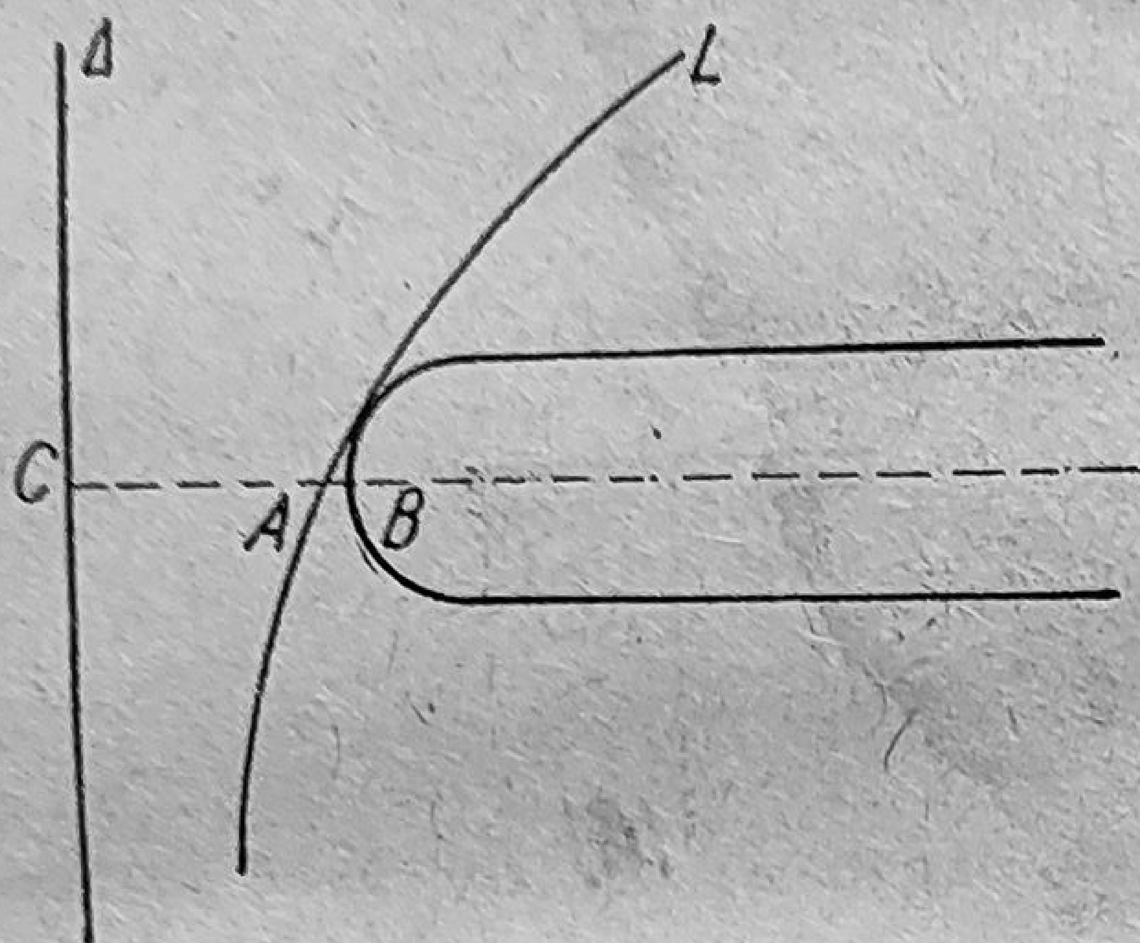


Fig. 194

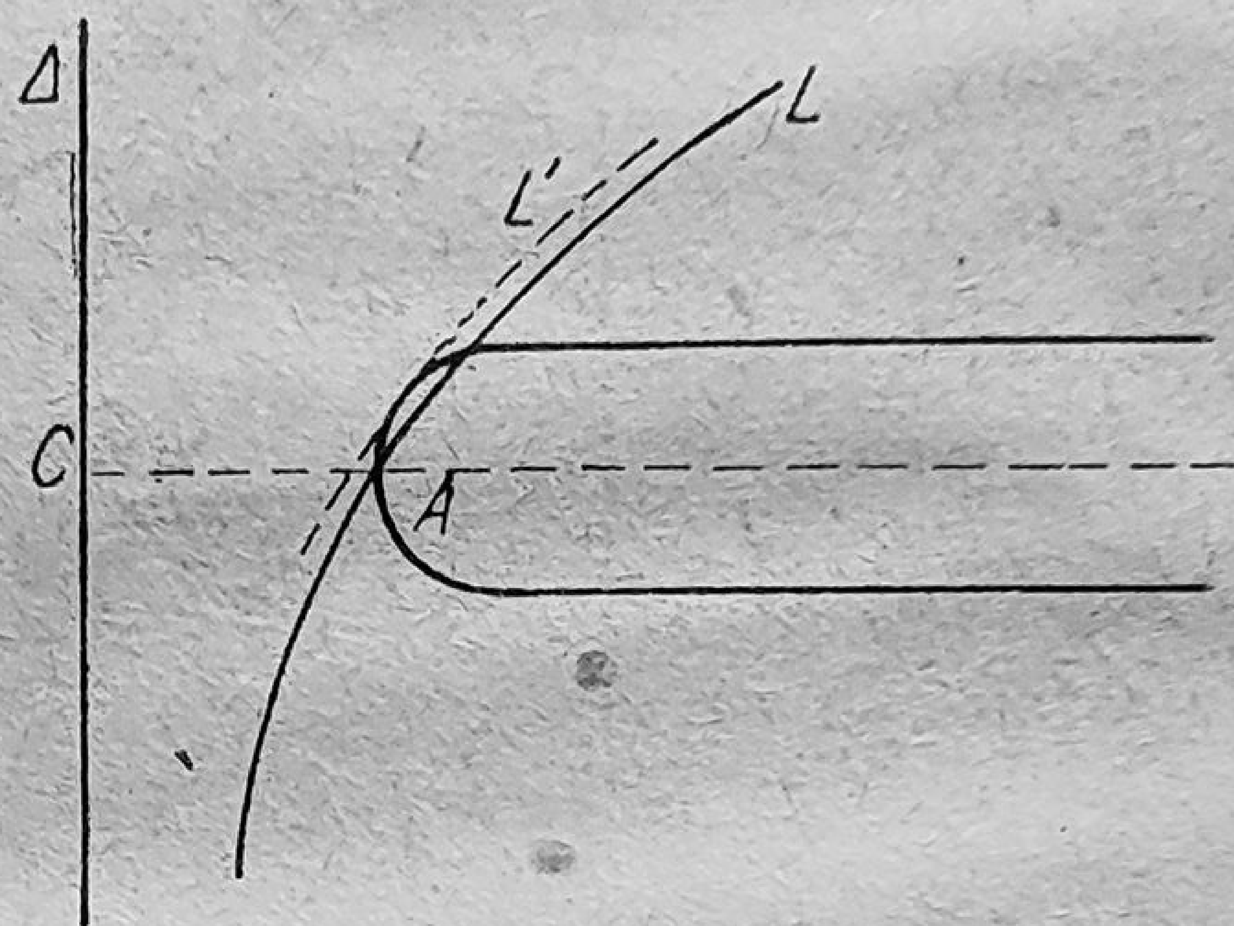


Fig. 195

construcţii pentru mai multe puncte ale curbei L şi găsind înfăşurătoarea L' a acestor arce de cerc, vom găsi astfel curba de intersecţie L' a suprafeţei căutate cu planul desenului. Deoarece suprafaţa căutată trebuie să fie o suprafaţă de rotaţie, ea se obţine prin rotirea curbei L' în jurul axei Δ.

65. Să se rezolve problema 64 analitic, dacă $\beta=f(\alpha)$ este ecuaţia curbei L, unde α sînt abscisele iar β ordonatele punctelor ei. Dacă raza emisferei capătului ştiftului este R, atunci ecuaţia cercului care are centrul într-un punct oarecare $O_1(\alpha+R,\ \beta)$ şi care trece prin punctul A al curbei L, va fi:

$$(x-\alpha-R)^2+[y-f(\alpha)]^2=R^2,$$

sau

$$F'(\alpha)=(x-\alpha-R)^2+[y-f(\alpha)]^2-R^2=0.$$

Vom obţine înfăşurătoarea acestor cercuri, eliminînd α din ecuaţiile $F(\alpha)=0$ şi $F'(\alpha)=0$; vom obţine:

$$F'(\alpha)=(x-\alpha-R)+[y-f(\alpha)]\,f'(\alpha)=0.$$

Întrucît $f'(\alpha)=\operatorname{tg}\varphi$, în care φ este unghiul format de tangenta la curba L în punctul A cu axa Ox, iar în ecuaţia $F(\alpha)=0$, putem pune:

$$x-\alpha-R=R\cos\omega, \quad y-f(\alpha)=R\sin\omega,$$

în care ω este unghiul format de raza R a cercului cu axa Ox, atunci din ecuaţia $F'(\alpha)=0$, vom avea:

$$\cos\omega+\sin\omega\operatorname{tg}\varphi=0,$$

sau

$$1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi=0.$$

Din această ecuaţie rezultă că raza R, dusă în punctul de tangenţă al cercului la curba L', este perpendiculară pe tangenta la curba L dusă din punctul A, adică trebuie să avem: $\omega=\frac{\pi}{2}+\varphi$ (fig. 196). Notînd unghiul format de raza R, dusă în punctul de tangenţă al cercului cu curba L', cu direcţia O_1A prin ϑ, atunci vom avea $\omega=\pi-\vartheta$, şi vom obţine:

$$\pi-\vartheta=\frac{\pi}{2}+\varphi.$$

Astfel, vom avea:

$$\vartheta=\frac{\pi}{2}-\varphi.$$

De aici rezultă că pentru construirea curbei L' trebuie să se măsoare unghiul $\frac{\pi}{2}-\varphi$ pe care îl formează tangenta la curba L din punctul A, cu axa Oy şi sub acest unghi să se ducă raza $O_1K=R$, după cum se arată în fig. 196; atunci punctul K va fi un punct al curbei L'. Făcînd această construcţie pentru diferite valori ale ordonatei β vom obţine punctele curbei L'.

66. O bară dreaptă DB, care se poate roti în planul π în jurul punctului D, are la capătul B, ataşată la ea, o figură plană S, situată în plan şi mărginită de curba (C) cum se arată în fig. 197. O bară cotită, $AQPNM$, care se poate roti în acelaşi plan în jurul punctului A, se reazemă cu capătul ei M de curba (C) care limitează figura S. Bara DB formează unghiul γ cu dreapta AD, iar bara AQ, unghiul β. Să se găsească o astfel de formă a curbei (C), încît între unghiurile β şi γ să existe o dependenţă funcţională dată, adică fiecărei valori a unghiului γ să-i corespundă o anumită valoare dată pentru unghiul β şi invers. Se dau $AD=L$, $PN=n_1$, $AQ=n_2$, $PQ-NM=\delta$, $DE=l_1$.

Unim prin dreapta AM, punctul A cu punctul M şi notăm $AM=l'$; apoi fie $\measuredangle MAD=\beta'$ şi $\measuredangle MAQ=\psi$. Curba (C) este determinată dacă vom cunoaşte lungimea ρ a perpendicularei MR coborîtă din punctul M pe dreapta DB şi lungimea x a segmentului ER care reprezintă distanţa de la punctul E de fixare a figurii S pe bara DB pînă la piciorul R al perpendicularei MR. Ne vom folosi de fig. 198 la care punctele comune cu fig. 197 sînt notate prin aceleaşi litere. Coborîm perpendiculara MH pe dreapta AD. Din triunghiul AMH, avem:

$$MH=l'\sin\beta',\quad AH=l'\cos\beta',\quad DH=AD-AH=L-l'\cos\beta'.$$

De aceea:

$$GH=DH\operatorname{tg}\gamma=(L-l'\cos\beta')\operatorname{tg}\gamma.$$

În acest fel, găsim:

$$MG=MH-GH=l'\sin\beta'-(L-l'\cos\beta')\operatorname{tg}\gamma,$$

sau

$$MG=l'\frac{\sin\beta'\cos\gamma+\cos\beta'\sin\gamma}{\cos\gamma}-L\operatorname{tg}\gamma=l'\frac{\sin(\beta'+\gamma)}{\cos\gamma}-L\operatorname{tg}\gamma.$$

Fig. 196

Fig. 197

Fig. 198

Deoarece $\beta'=\beta+\psi$ după cum se vede din fig. 197, obținem:

$$MG=l'\frac{\sin(\beta+\gamma+\psi)}{\cos\gamma}-L\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

sau

$$MG=\frac{\sin(\beta+\gamma)\,l'\cos\psi+\cos(\beta+\gamma)\,l'\sin\psi}{\cos\gamma}-L\,\mathrm{tg}\,\gamma;$$

folosind fig. 197 și observînd din fig. 198 că avem:

$$\rho=MR=MG\cos\gamma,$$

vom găsi:

$$\rho=(n_1+n_2)\sin(\beta+\gamma)+\delta\cos(\beta+\gamma)-L\sin\gamma.$$

Pentru determinarea lungimii x, observăm că:

$$x=ER=DR-DE=DR-l_1.$$

Din triunghiul DMR avem:

$$DR=\rho\,\mathrm{ctg}\,(\omega-\gamma)=\rho\frac{1+\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\omega-\mathrm{tg}\,\gamma}.$$

Deoarece:

$$\mathrm{tg}\,\omega=\frac{MH}{DH}=\frac{l'\sin\beta'}{L-l'\cos\beta'},$$

obținem:

$$\frac{1+\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\omega-\mathrm{tg}\,\gamma}=\frac{L-l'\cos\beta'+l'\sin\beta'\,\mathrm{tg}\,\gamma}{l'\sin\beta'-(L-l'\cos\beta')\,\mathrm{tg}\,\gamma}=\frac{L\cos\gamma-l'(\cos\beta'\cos\gamma-\sin\beta'\sin\gamma)}{l'(\sin\beta'\cos\gamma+\cos\beta'\sin\gamma)-L\sin\gamma},$$

adică ajungem la formula

$$\frac{1+\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\omega-\mathrm{tg}\,\gamma}=\frac{L\cos\gamma-l'\cos(\beta'+\gamma)}{l'\sin(\beta'+\gamma)-L\sin\gamma}=\frac{L\cos\gamma-l'\cos(\beta+\gamma+\psi)}{l\sin(\beta+\gamma+\psi)-L\sin\gamma}.$$

De aici vom avea:

$$\frac{1+\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\omega-\mathrm{tg}\,\gamma}=\frac{L\cos\gamma-[\cos(\beta+\gamma)\,l'\cos\psi-\sin(\beta+\gamma)\,l'\sin\psi]}{\sin(\beta+\gamma)\,l'\cos\psi+\cos(\beta+\gamma)\,l'\sin\psi-L\sin\gamma}=$$

$$=\frac{L\cos\gamma-(n_1+n_2)\cos(\beta+\gamma)+\delta\sin(\beta+\gamma)}{(n_1+n_2)\sin(\beta+\gamma)+\delta\cos(\beta+\gamma)-L\sin\gamma}.$$

Din expresia lungimii ρ vom găsi:

$$\frac{1+\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\omega-\mathrm{tg}\,\gamma}=\frac{L\cos\gamma-(n_1+n_2)\cos(\beta+\gamma)+\delta\sin(\beta+\gamma)}{\rho}.$$

În acest fel, vom avea:

$$DR=L\cos\gamma-(n_1+n_2)\cos(\beta+\gamma)+\delta\sin(\beta+\gamma),$$

și obținem:

$$x=L\cos\gamma+\delta\sin(\beta+\gamma)-(n_1+n_2)\cos(\beta+\gamma)-l_1.$$

Din formulele obținute pentru mărimile ρ și x se pot determina coordonatele (x, ρ) ale punctelor curbei (C) în funcție de perechile de valori ale unghiurilor (β, γ) și de valorile date ale parametrilor L, δ, n_1, n_2, l_1.

CAPITOLUL XX

MIŞCAREA DE ROTAŢIE A SOLIDULUI ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX

§ 86. Studiul geometric al rotaţiei solidului în jurul unui punct fix. În acest capitol, vom studia mai întîi geometric iar apoi analitic mişcarea de rotaţie a solidului în jurul unui punct fix.

Dacă un solid se mişcă astfel încît un punct oarecare legat invariabil de corp rămîne în repaus, atunci această mişcare se numeşte mişcare de rotaţie a solidului în jurul unui punct fix.

Punctul fix O poate fie să aparţină corpului, fie să se găsească în afara lui, dar atunci trebuie să ne imaginăm că el este invariabil legat de corp într-un fel oarecare, de exemplu, cu ajutorul unei bare. Exemplu al unui solid cu un punct fix, poate fi sfîrleaza; capătul axei de rotaţie al sfîrlezei reazemă în locaşul făcut în suport, astfel încît acest capăt al axei rămîne fix în timpul rotaţiei sfîrlezei.

Să presupunem că solidul se roteşte în jurul unui punct fix O. Vom descrie în jurul punctului O o sferă care se intersectează cu solidul, secţiunea solidului cu sfera fiind o figură sferică, aşezată pe suprafaţa sferei şi mărginită de un contur (γ). Ştiind cum se deplasează figura sferică pe suprafaţa sferei, vom cunoaşte cum se deplasează solidul în jurul punctului O. În acest fel, reducem studiul mişcării solidului cu un punct fix, la studiul mişcării figurii sferice pe suprafaţa sferei. Vedem că am ajuns la problema complet analogă cu problema la care se reducea studiul mişcării plan-paralelă a unui solid, numai cu deosebirea ca în loc de a cerceta mişcarea unei figuri plane în planul ei, în cazul de faţă, trebuie să cercetăm mişcarea unei figuri sferice pe suprafaţa sferei. Toate deducţiile din § 81 pentru plan se repetă şi aici fără modificări substanţiale.

În primul rînd, în loc să urmărim mişcarea unei figuri oarecare sferice mărginite de conturul (γ), pe suprafaţa unei sfere, putem ca şi în § 81, să urmărim deplasarea a două puncte oare-

care A și B ale acestei figuri, sau să urmărim mișcarea arcului $\overset{\frown}{AB}$ al cercului mare, care unește aceste două puncte (fig. 199). Să presupunem că la început, în poziția I a corpului, acest arc al cercului mare ocupa poziția AB, iar apoi, după deplasarea solidului în poziția a II-a, el a venit în poziția $A'B'$. Unim punctele A și A' apoi punctele B și B' prin arcele de cercuri mari $\overset{\frown}{AA'}$ și $\overset{\frown}{BB'}$, împărțim aceste arce în două părți egale prin punctele L și M și ducem prin punctele L și M arce de cercuri mari, perpendiculare pe $\overset{\frown}{AA'}$ și $\overset{\frown}{BB'}$. Aceste arce se vor intersecta într-un punct oarecare C de pe emisfera situată cu fața spre cititor și, în același timp, în punctul diametral opus C', situat în cealaltă emisferă. Unim punctul C prin arcele cercurilor mari $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{CA'}$, $\overset{\frown}{CB'}$, cu punctele A, B, A', B', vom obține triunghiurile sferice egale între ele CAB și $CA'B'$. Vedem că este suficient a roti triunghiul sferic CAB în jurul vîrfului C cu unghiul ACA', pentru a face ca arcul $\overset{\frown}{AB}$ să se suprapună pe arcul $\overset{\frown}{A'B'}$. De aici rezultă că putem muta solidul din poziția I în poziția a II-a, fixînd în corp, afară de punctul O, și punctul C, și, deci rotind corpul în jurul axei OC. În acest fel, ajungem la teorema lui d'Alembert:

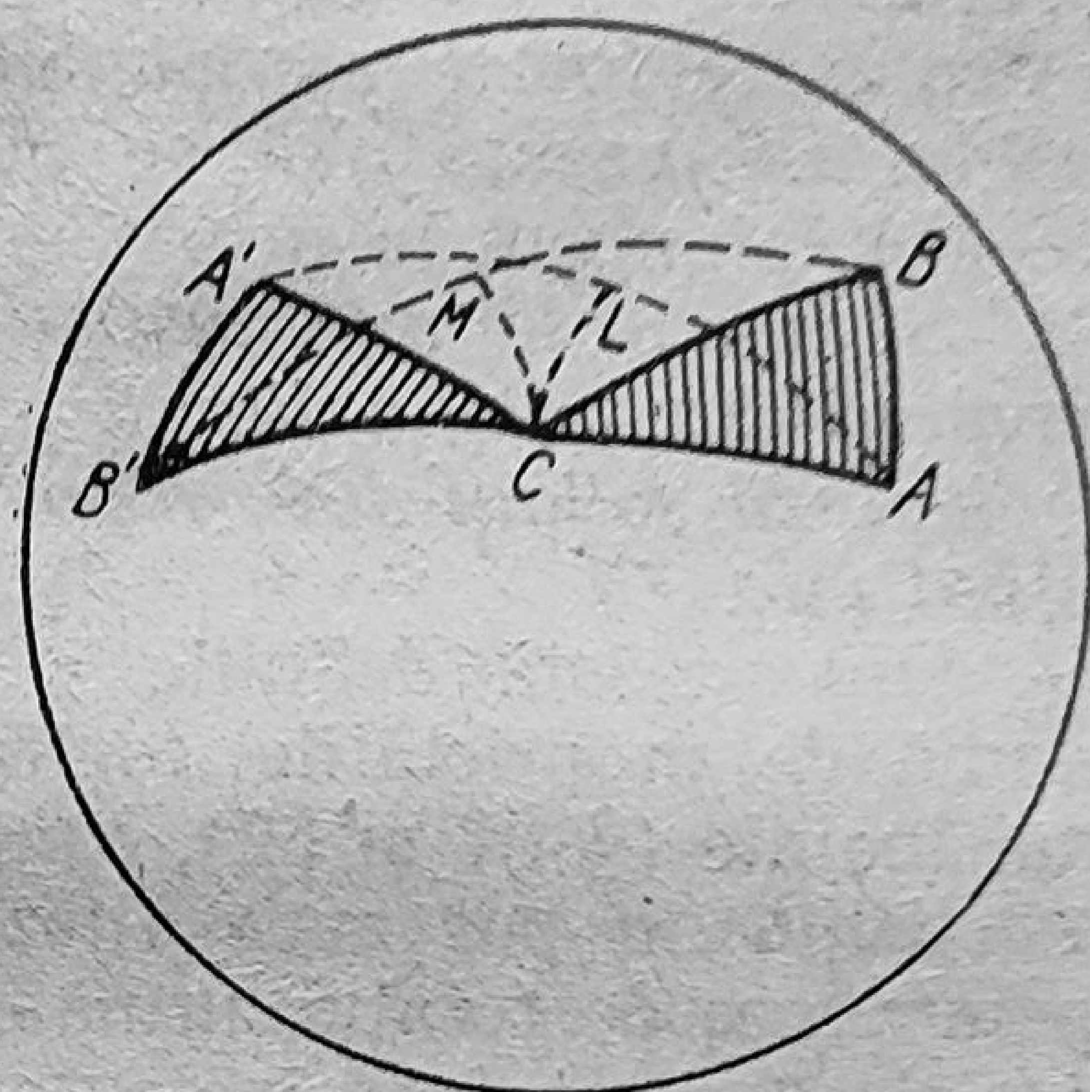


Fig. 199.

Orice solid, care are un punct fix, poate fi deplasat dintr-o poziție în alta, printr-o rotație în jurul unei axe care trece prin punctul fix. Să numim această axă, *axă de rotație echivalentă.*

Observăm că am fi putut face ca triunghiul CAB să coincidă cu triunghiul $CA'B'$ și prin rotația în jurul punctului C în sens opus; vom alege totdeauna cel mai mic unghi ca unghi de rotație, deoarece mai departe vom fi nevoiți să operăm numai cu unghiuri de rotație infinit mici. În ce privește semnul sensului de rotație, considerînd pe axa de rotație una dintre cele două direcții de rotație OC și OC' ca pozitivă, vom considera că rotația este pozitivă, dacă ea se produce pentru observatorul situat de-a lungul sensului pozitiv al axei, în sens opus acelor unui ceasornic și negativă, în caz contrar.

Evident, că o astfel de deplasare a solidului din poziţia *I* în poziţia a *II*-a, printr-o rotaţie în jurul unei axe oarecare, nu reprezintă în general deplasarea reală a corpului, dar, ca şi în cazul problemei plane, vom reproduce cu atît mai exact deplasarea reală, cu cît poziţia a *II*-a a solidului va fi mai apropiată de poziţia *I*. Dacă poziţia a *II*-a a solidului va fi infinit apropiată de poziţia *I*, corpul trecînd de la poziţia *I* în poziţia a *II*-a, într-un timp infinit mic, atunci la limită vom obţine o axă în jurul căreia solidul rotindu-se cu un unghi infinit mic va efectua o deplasare foarte apropiată de deplasarea reală infinit mică a solidului. Această axă se numeşte axa *instantanee de rotaţie*. De aici, ajungem la următoarea definiţie:

Se numeşte axă instantanee de rotaţie a solidului la un moment dat poziţia limită a axei de rotaţie, în jurul căreia se deplasează solidul dintr-o poziţie în alta, într-un interval de timp infinit mic.

Din această definiţie a axei instantanee de rotaţie, ţinînd seamă de proprietăţile centrului instantaneu de rotaţie definit mai înainte (§ 81 şi 82), concludem că punctele axei instantanee de rotaţie nu pot avea viteze. De aceea se mai poate da axei instantanee de rotaţie, următoarea definiţie:

Se numeşte axa instantanee de rotaţie a unui solid, dreapta care trece prin punctul fix al solidului, punctele ei avînd viteză egală cu zero în momentul considerat.

Să examinăm acum o deplasare oarecare finită a solidului cu punct fix. Să împărţim această deplasare într-o serie de deplasări infinit mici şi să construim pentru fiecare din aceste deplasări, cîte o axă instantanee de rotaţie. *Locul geometric al axelor instantanee de rotaţie va reprezenta în spaţiu o suprafaţă oarecare conică, care poartă numele de axoidă fixă.* Această suprafaţă conică are vîrful în punctul fix al solidului şi intersectează sfera fixă indicată mai înainte, după o curbă sferică (Γ).

Să ne închipuim că notăm poziţiile succesive ale axelor instantanee de rotaţie şi în corp. Pentru a ne imagina mai bine cum se petrece aceasta, vom recurge la următoarea imagine sugestivă. Fie *OC* axa instantanee de rotaţie a solidului, determinată pentru prima deplasare infinit mică a solidului. Să străpungem solidul cu o bară dreaptă de grosime neglijabilă ce coincide cu axa *OC*, şi să rotim solidul în jurul acestei bare, cu un unghi infinit mic, astfel încît solidul să ocupe poziţia a *II*-a, considerată infinit apropiată de poziţia iniţială; scoatem apoi din solid această bară şi ca urmare, în corp rămîne un canal infinit

de îngust care trece prin punctul fix O. Mai departe vom roti solidul în jurul unei alte poziții infinit apropiate OC_1, a axei instantanee de rotație; pentru aceasta, vom străpunge corpul cu o bară, în lungul lui OC_1 și vom roti solidul în jurul acestei bare cu un unghi infinit mic, astfel încît corpul să ocupe poziția a *III*-a considerată infinit apropiată de poziția a *II*-a. Evident, că prin această a doua rotație, canalul din solid format de axa OC, se va deplasa în spațiu față de dreapta OC care reprezintă poziția inițială a axei de rotație în spațiu. Scoatem apoi din solid această bară și va rezulta un al doilea canal în corp, infinit de îngust, care trece și el de asemenea prin punctul fix O. Mai departe, rotind solidul în jurul următoarei poziții infinit de apropiată a axei instantanee de rotație, vom străpunge corpul de-a lungul lui OC_2 cu o bară și rotim corpul în jurul acestei bare cu un unghi infinit mic, astfel încît corpul să ocupe a *IV*-a poziție considerată, infinit de apropiată de poziția a *III*-a. Evident, că la această a treia rotație, canalul din corp format de axa OC_1 se va deplasa față de dreapta fixă în spațiu OC_1, care reprezintă a *II*-a poziție a axei de rotație în spațiu, și primul canal în corp se va deplasa față de dreapta fixă în spațiu OC. Scoatem după aceea din corp acea bară infinit de subțire, în urma căreia va rămîne în solid un al treilea canal infinit de îngust care trece prin punctul fix O, și așa mai departe. Dacă dimensiunile solidului sînt astfel încît axele instantanee nu întretaie corpul, atunci putem totdeauna să ne imaginăm dimensiunile solidului într-atîta mărite, încît axele să treacă prin solid. Continuînd aceste raționamente, vedem că locul geometric al canalelor din interiorul solidului, care reprezintă locul geometric al axelor instantanee de rotație, față de solid, reprezintă de asemenea o suprafață conică cu vîrful în punctul fix O al solidului. Prin urmare, *locul geometric al axelor instantanee de rotație, în solid, reprezintă o suprafață conică care se numește axoidă mobilă.*

Să ne imaginăm că sfera fixă, amintită mai înainte, pe care se află curba sferică (Γ), este învăluită de o sferă mobilă fixată rigid de figura sferică mobilă limitată de conturul (γ). Evident, că această sferă mobilă va fi solidar legată și de solid și alunecarea ei pe sfera fixă va determina mișcarea solidului. Această sferă mobilă, care învăluie sfera fixă și alunecă pe ea, este perfect analogă cu planul mobil care alunecă pentru planul fix (§ 81). Locul geometric al axelor instantanee de rotație din solid, adică axoida mobilă, întretaie această sferă mobilă după

o curbă sferică oarecare (Γ'). Aceste curbe sferice (Γ) şi (Γ') sînt perfect analoge cu baza şi ruleta din problema plană.

Nu este greu de dovedit că determinînd curba (Γ), adică urmele axelor instantanee de rotaţie pe suprafaţa sferei fixe, şi unghiurile infinit mici de rotaţie ale solidului rigid, se pot găsi urmele axelor instantanee de rotaţie pe sfera mobilă, adică curba (Γ'). Nu vom da aici aceste raţionamente, deoarece acestea sînt analoge cu raţionamentele făcute în § 81, la fig. 178, cu singura deosebire că pretutindeni, în locul dreptelor, va trebui să considerăm arcele cercurilor mari. Ca şi în § 81, va rezulta din acest raţionament că prin rotaţia solidului în jurul unui punct fix, curba (Γ') se va rostogoli fără alunecare peste curba (Γ). Deoarece aceste curbe sînt urmele axoidei mobile şi ale celei fixe, care au vîrful comun în punctul fix al corpului, rezultă de aici următoarea teoremă:

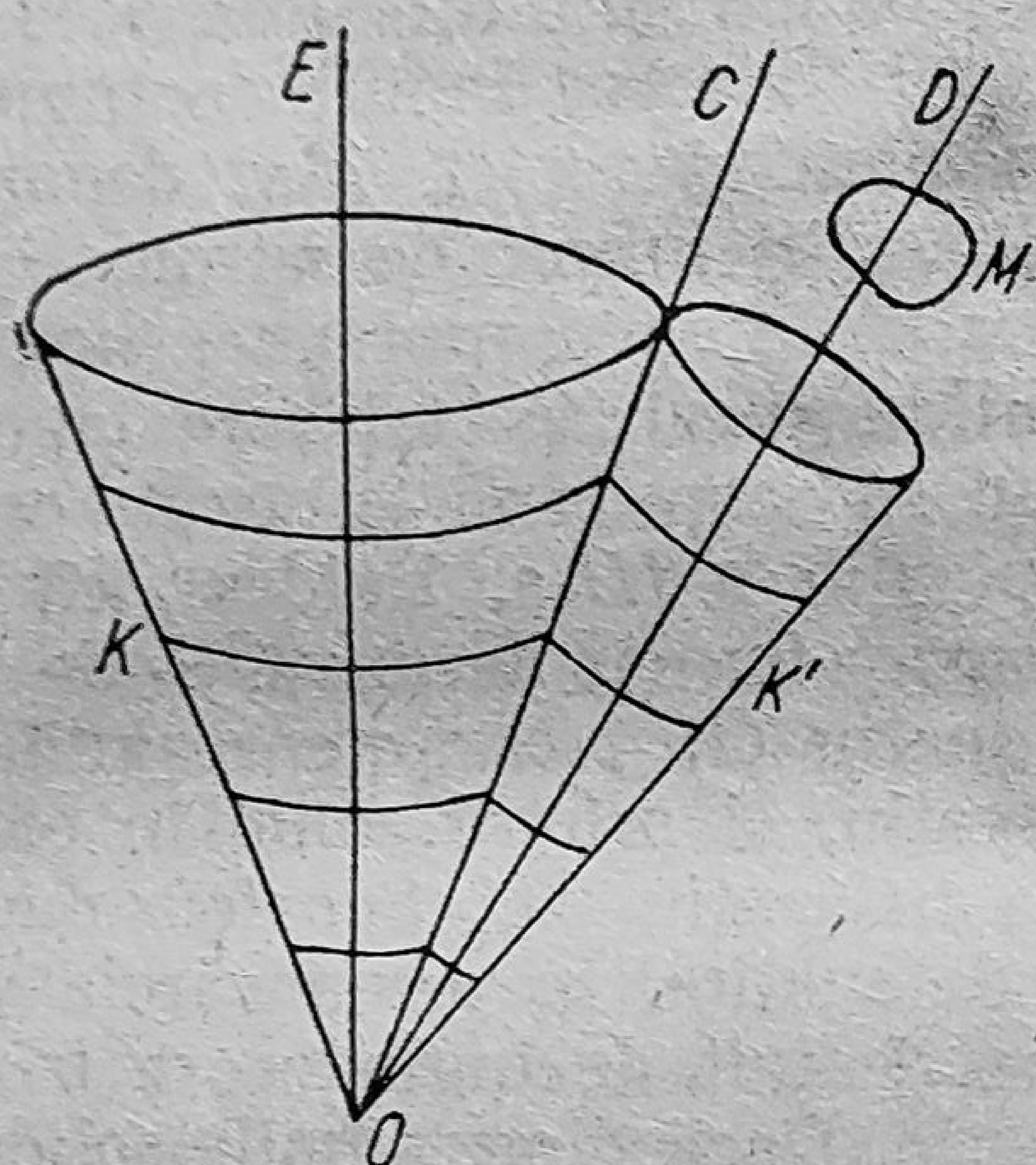


Fig. 200.

Mişcarea solidului cu un punct fix, poate fi reprezentată ca o rostogolire fără alunecare a unei axoide mobile peste una fixă. Generatoarea de-a lungul căreia la un moment dat sînt tangente ambele axoide, este pentru acel moment, axa instantanee de rotaţie a solidului.

Ca şi pentru mişcarea plană, vom sublinia că folosind axoidele, în cazul unei viteze arbitrare de rostogolire a axoidei mobile peste cea fixă, vom reproduce mişcarea solidului, numai g e o m e t r i c; pentru a reproduce mişcarea şi m e c a n i c, trebuie să rostogolim axoida mobilă peste cea fixă, astfel ca în orice moment să fie realizată o viteză de rostogolire, care să producă viteza mişcării reale.

Dacă ambele axoide sînt conuri circulare drepte, în acest caz mişcarea solidului se numeşte m i ş c a r e d e p r e c e s i e. În fig. 200 sînt reprezentate axoidele unei astfel de mişcări. Conul K, este axoida fixă, conul K' este axoida mobilă, M este solidul rigid. În fig. 200 este reprezentat cazul cînd punctul fix O nu se află în interiorul, ci în afara corpului M. Axa instantanee de

rotație se găsește pe generatoarea comună OC. Conul K este locul geometric al axelor instantanee în spațiu, iar conul K' este locul geometric al axelor instantanee de rotație în solid. Pentru a obține sfera fixă și sfera mobilă care o înfășoară, amintite mai sus, este suficient să se descrie în jurul punctului O, o suprafață sferică cu o astfel de rază, încît ea să întretaie solidul M; la intersecția acestei suprafețe sferice cu solidul, vom obține figura sferică mărginită de conturul (γ). Deoarece conurile circulare drepte cu vîrfurile în centrul sferei, intersectează suprafețele sferelor după cercuri, curbele (Γ) și (Γ'), în cazul considerat, sînt cercuri. Nu este greu de reprezentat mișcarea solidului M în acest caz; solidul M se va roti în jurul axei OD a conului K'; iar axa OD se va roti în jurul axei OE a conului K, descriind un con circular drept, al cărui unghi la vîrf este egal cu dublul unghiului DOE. O astfel de mișcare o are pămîntul nostru, dacă se face abstracție de mișcarea lui în jurul soarelui; anume, pămîntul se rotește în jurul axei sale, în 24 ore siderale, iar axa pămîntului descrie conul în aproximativ 26 000 de ani. Acest fenomen a fost descoperit de astronomul grec Hipparc, cu aproape 2 080 de ani în urmă; urmarea acestui fenomen este avansul echinoxurilor sau *precesia;* de aceea, această mișcare a solidului a căpătat denumirea de mișcarea de *precesie.*

§ 87. Studiul analitic al rotației solidului rigid în jurul unui punct fix. Viteză. Studiul analitic al rotației unui solid rigid în jurul unui punct fix nu prezintă nici un fel de dificultăți și se bazează complet pe deducțiile făcute în § 77—79. Fie un solid rigid care are un punct fix O. Să considerăm un sistem fix de axe de coordonate $Ox_1y_1z_1$, cu originea în punctul fix O, și un sistem mobil de axe de coordonate $Oxyz$, cu originea tot în punctul fix O, sistem invariabil legat de solidul mobil. Ca și în § 77—79, în loc să deducem separat vitezele și accelerațiile punctelor solidului rigid mai întîi pentru sistemul de axe fixe și apoi pentru sistemul de axe mobile, vom deduce înainte de toate expresiile vectoriale pentru vitezele și accelerațiile punctelor solidului, din care apoi se pot obține proiecțiile vitezei sau ale accelerației, pentru oricare sistem de axe de coordonate. În acest paragraf, ne vom ocupa cu determinarea vitezelor punctelor unui solid rigid cu un punct fix.

Să examinăm două poziții extrem de apropiate ale solidului rigid cu punct fix, corespunzătoare momentelor t și $t+\Delta t$ și fie D dreapta în jurul căreia trebuie rotit solidul, cu un unghi infinit mic $\Delta\Theta$, pentru a muta acest solid din poziția corespunză-

toare momentului t în poziţia corespunzătoare momentului $t+\Delta t$; atunci raportul $\frac{\Delta\Theta}{\Delta t}$ va reprezenta viteza unghiulară medie a corpului în această rotaţie. Vom face ca intervalul de timp Δt să tindă către zero. Unghiul de rotaţie, va tinde în acest caz şi el către zero, iar dreapta D va tinde către poziţia sa limită, care este axa instantanee de rotaţie în momentul t. Valoarea limită a raportului $\frac{\Delta\Theta}{\Delta t}$ se numeşte viteza unghiulară instantanee sau, mai frecvent, viteza unghiulară ω a solidului rigid cu punct fix, în momentul t, aşa că vom avea:

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\Theta}{\Delta t}\right). \tag{20.1}$$

Este necesar să se aibă în vedere că formula (20.1) diferă în esenţă de formula (18.1). În adevăr, atunci cînd datorită imobilităţii axei de rotaţie există un unghi finit Θ de rotaţie a corpului, care este în funcţie de timpul t, astfel încît în formula (18.1) cantitatea $d\Theta$ este diferenţiala acestei funcţii, în formula (20.1) mărimea $\Delta\Theta$ nu reprezintă creşterea funcţiei Θ, care din cauza variaţiei continui a poziţiei axei de rotaţie nici nu există, ci reprezintă unghiul mic de rotaţie a corpului, în jurul dreptei D de mai sus, într-un interval de timp Δt. Deşi partea dreaptă a formulei (20.1) se reprezintă uneori prin $\frac{d\Theta}{dt}$ trebuie să se reţină totodată că $\frac{d}{dt}$ nu este semnul derivatei, şi $d\Theta$ nu reprezintă diferenţiala unei funcţii, ci un unghi de rotaţie infinit mic la fel cum în termodinamică dQ reprezintă o cantitate infinit mică de căldură, dar nu diferenţiala funcţiei Q, care nu există.

Vom reprezenta viteza unghiulară a solidului cu punct fix, prin vectorul ω, cum s-a arătat în § 77. Fie A un punct oarecare al solidului rigid. Notăm vectorul de poziţie $\overline{OA}$ al punctului A prin $\bar{r}$, vectorii unitari pe axele fixe de coordonate $Ox_1y_1z_1$ prin $(\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1)$, vectorii unitari pe axele mobile de coordonate $Oxyz$ prin $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$; coordonatele punctului A în raport cu axele fixe de coordonate prin (x_1, y_1, z_1) şi coordonatele punctului A în raport cu axele mobile de coordonate, prin (x, y, z). Deoarece modulul r al vectorului $\bar{r}$ este constant, rezultă că întreaga mişcare a punctului A se determină numai prin schimbarea direcţiei vectorului $\bar{r}$. Dacă în momentul considerat, dreapta Δ este axa

instantanee de rotație a solidului, și $\bar{\omega}$ vectorul viteză unghiulară, atunci, evident că viteza $\bar{v}$ a punctului A, se poate calcula în baza raționamentelor din § 77, astfel, și aici se poate aplica formula (18.5) și vom obține pentru viteza $v=\frac{d\bar{r}}{dt}$ a punctului A, expresia:

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}. \tag{20.2}$$

Deosebirea dintre formula (20.2) și formula (18.5) constă numai în faptul că în (18.5) putea varia cu timpul numai modulul vectorului $\bar{\omega}$, direcția vectorului $\bar{\omega}$ rămînînd neschimbată, în timp ce în formula (20.2) vectorul $\bar{\omega}$ poate varia și ca mărime și ca direcție. La fel ca și în § 77, din formula (20.2) rezultă că:

Viteza unui punct al unui solid cu punct fix este egală cu produsul vectorial dintre vectorul viteză unghiulară instantanee de rotație a solidului și vectorul de poziție al acestui punct, dacă originea sistemelor de coordonate se alege în punctul fix.

De aici, ca și în § 77, rezultă că:

Viteza unui punct, al unui solid cu punct fix, este egală cu momentul vectorului viteză unghiulară în raport cu acest punct.

Nu este greu de trecut de la formula vectorială (20.2) la formulele analitice, atît pentru sistemul axelor mobile cît și pentru cel al axelor fixe de coordonate. Pentru aceasta considerăm:

$$\bar{v}=\bar{i}_1 v_{x_1}+\bar{j}_1 v_{y_1}+\bar{k}_1 v_{z_1}=\bar{i}v_x+\bar{j}v_y+\bar{k}v_z,$$

$$\bar{\omega}=\bar{i}_1\omega_{x_1}+\bar{j}_1\omega_{y_1}+\bar{k}_1\omega_{z_1}=\bar{i}\omega_x+\bar{j}\omega_y+\bar{k}\omega_z,$$

$$\bar{r}=\bar{i}_1 x_1+\bar{j}_1 y_1+\bar{k}_1 z_1=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z.$$

Trebuie subliniat aici următoarele. Vectorii unitari $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$, măsurați pe axele fixe de coordonate, vor fi constanți ca modul, direcție și sens, și de aceea, derivatele lor în raport cu timpul vor fi egale cu zero. Nu tot așa va fi situația cu vectorii unitari $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$; modulele acestor vectori sînt constante și egale cu unitatea, dar direcțiile acestor vectori variază, deoarece ei sînt situați de-a lungul axelor mobile de coordonate Ox, Oy, Oz, care se mișcă împreună cu solidul; de aceea, derivatele acestor vectori $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, în raport cu timpul nu vor fi egale cu zero. Mai departe, coordonatele (x_1, y_1, z_1) ale punctului A vor fi funcții de timp, deoarece în timpul mișcării solidului, punctul A se deplasează în raport cu axele fixe de coordonate $Ox_1y_1z_1$; coordonatele însă

(x, y, z) ale punctului A vor fi constante, deoarece axele mobile de coordonate $Oxyz$ se deplasează împreună cu sodiul, punctul A aparţine solidului, şi, de aceea, poziţia punctului A în raport cu axele de coordonate mobile $Oxyz$, nu va varia.

Din formula (20.2) avem:

$$\bar{i}_1 v_{x_1} + \bar{j}_1 v_{y_1} + \bar{k}_1 v_{z_1} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix};$$

Comparînd între ei coeficienţii lui $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$ şi $\bar{k}_1$ în partea dreaptă şi stîngă a acestei relaţii, vom ajunge la formulele lui Euler:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \\ v_{y_1} &= \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \\ v_{z_1} &= \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \end{aligned} \tag{20.3}$$

Vom găsi punctele solidului a căror viteză să fie în momentul dat egală cu zero; coordonatele (x_1, y_1, z_1) ale unuia din aceste puncte trebuie să satisfacă ecuaţiile (20.3), în care părţile din stînga sînt egale cu zero, adică ecuaţiile:

$$0 = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \quad 0 = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \quad 0 = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1.$$

Aceste trei ecuaţii sînt echivalente cu:

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \tag{20.4}$$

Prin urmare, toate punctele care au viteza nulă, se află pe dreapta, reprezentată prin ecuaţiile (20.4), care trece prin punctul fix O. Conform definiţiei date în paragraful precedent, această dreaptă este axa instantanee de rotaţie. Astfel, ecuaţiile (20.4) sînt ecuaţiile axei instantanee de rotaţie în raport cu axele fixe de coordonate. Ecuaţiile (20.4) pot fi reprezentate şi în felul următor:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\omega_{y_1}}{\omega_{x_1}} \qquad \frac{z_1}{x_1} = \frac{\omega_{z_1}}{\omega_{x_1}}.$$

Deoarece vectorul $\bar{\omega}$ variază în timp şi ca modul şi ca sens, atunci părţile din dreapta ultimelor două relaţii, vor fi funcţii oarecare de timp, adică

$$\frac{y_1}{x_1} = f_1(t) \qquad \frac{z_1}{x_1} = \varphi_1(t).$$

Eliminînd timpul t, vom obține o ecuație de forma:

$$F_1\left(\frac{y_1}{x_1}, \frac{z_1}{x_1}\right)=0 \tag{20.5}$$

Din geometria analitică se știe, că o asemenea ecuație este ecuația unei suprafețe conice; astfel, am obținut ecuația unei suprafețe conice care reprezintă locul axelor instantanee de rotație în spațiu, adică ecuația axoidei fixe.

Trecînd de la formula vectorială (20.2) la relațiile analitice pentru sistemul mobil de axe coordonate, conform celor precedente, vom obține:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\omega_y z-\omega_z y, \\ v_y&=\omega_z x-\omega_x z, \\ v_z&=\omega_x y-\omega_y z. \end{aligned}\right\} \tag{20.6}$$

Ecuația axei instantanee de rotație în raport cu axele mobile de coordonate, va avea forma:

$$\frac{x}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z}. \tag{20.7}$$

De aici, vom avea:

$$\frac{y}{z}=\frac{\omega_y}{\omega_x}=f(t), \quad \frac{z}{x}=\frac{\omega_z}{\omega_x}=\varphi(t),$$

și eliminînd timpul t, vom obține ecuația axoidei mobile sub forma:

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0. \tag{20.8}$$

Observăm că pentru axa instantanee de rotație se pot face aceleași raționamente, ca și pentru centrul instantaneu de rotație. Cu toate că vitezele punctelor axei instantanee în momentul cercetat sînt egale cu zero, nu putem conclude de aici că această axă este fixă; se poate doar confirma că deplasarea ei într-un interval de timp infinit mic, este un infinit mic de ordinul întîi, în comparație cu deplasările celorlalte drepte ale solidului care trec prin punctul fix.

§ 88. Studiul analitic al rotației unui solid în jurul unui punct fix. Accelerația. Pentru a găsi vectorul accelerație a, al punctelor unui solid cu un punct fix, este suficient să derivăm în raport cu timpul expresia din formula (20.2). Vom avea:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Deoarece derivata $\frac{d\bar{r}}{dt}$ reprezintă vectorul viteză $\bar{v}$ al punctului A, care se determină din formula (20.2), vom obține:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r});$$

de aici, ținînd seamă de formula (18.12), vom găsi:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\,\bar{\omega}-\omega^2\bar{r}. \tag{20.9}$$

Formula (20.9) diferă de formula (18.13) numai prin faptul că în formula (18.13) vectorul $\bar{\omega}$ poate varia numai ca modul, în timp ce în formula (20.9) vectorul $\bar{\omega}$ poate varia și ca modul și ca direcție.

Pentru a trece de la forma vectorială (20.9) a expresiei accelerației $\bar{a}$ la expresiile proiecțiilor accelerației pe axele sistemului fix de coordonate $Ox_1y_1z_1$, este suficient să efectuăm toate calculele care au fost făcute în § 79 pentru trecerea de la formula (18.13) la formula (18.14); de aceea, vom obține:

$$\left.\begin{aligned}
a_{x_1}&=\frac{d\omega_{y_1}}{dt}z_1-\frac{d\omega_{z_1}}{dt}y_1+\omega_{x_1}(\omega_{x_1}x_1+\omega_{y_1}y_1+\omega_{z_1}z_1)-\omega^2x_1,\\
a_{y_1}&=\frac{d\omega_{z_1}}{dt}x_1-\frac{d\omega_{x_1}}{dt}z_1+\omega_{y_1}(\omega_{x_1}x_1+\omega_{y_1}y_1+\omega_{z_1}z_1)-\omega^2y_1,\\
a_{z_1}&=\frac{d\omega_{x_1}}{dt}y_1-\frac{d\omega_{y_1}}{dt}x_1+\omega_{z_1}(\omega_{x_1}x_1+\omega_{y_1}y_1+\omega_{z_1}z_1)-\omega^2z_1.
\end{aligned}\right\} \tag{20.10}$$

Pentru a trece de la expresia vectorială (20.9) la expresiile proiecțiilor accelerației pe axele sistemului mobil de coordonate $Oxyz$, trebuie să urmărim calculul produsului vectorial $\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}$. În § 83 am întîlnit un sistem mobil de axe de coordonate Axy, la care însă axa Az rămînea paralelă la axa Oz_1 a sistemului fix al axelor de coordonate. Deoarece vectorul $\bar{\omega}$, în cazul examinat în § 83 a fost tot timpul paralel la axa Az și deci și la axa Oz_1, atunci aveam $\bar{\omega}=\bar{k}_1\omega$ și $\bar{\omega}=\bar{k}\omega$, iar vectorul $\bar{k}$ fiind egal cu vectorul $\bar{k}_1$, rămînea constant și ca modul și ca direcție, adică $\frac{d\bar{k}}{dt}=0$ și, în acest fel, am avut:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{k}_1\frac{d\omega}{dt},\quad \frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{k}\frac{d\omega}{dt}.$$

Prin urmare, în § 83 am avut cazul cînd derivata în raport cu timpul a al vectorului $\bar{\omega}$ avea una și aceeași expresie, atît pentru axele Axy, cît și pentru axele Ox_1y_1. Dar, în cazul care se studiază în paragraful de față, toate cele trei axe ale sistemului mobil al axelor de coordonae $Oxyz$, schimbă direcția lor în spațiu; și toți cei trei vectori unitari $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, ai acestor axe mobile, vor fi funcții de timp. De aceea, pornind de la relația:

$$\bar{\omega}=\bar{i}\omega_x+\bar{j}\omega_y+\bar{k}\omega_z,$$

vom obține:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{i}\frac{d\omega_x}{dt}+\bar{i}\frac{d\omega_y}{dt}+\bar{k}\frac{d\omega_z}{dt}+\frac{d\bar{i}}{dt}\omega_x+\frac{d\bar{j}}{dt}\omega_y+\frac{d\bar{k}}{dt}\omega_z.$$

Să calculăm derivatele $\frac{d\bar{i}}{dt}$, $\frac{d\bar{j}}{dt}$ și $\frac{d\bar{k}}{dt}$. Aceste derivate reprezintă vitezele extremităților vectorilor unitari $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, dirijați respectiv pe axele Ox, Oy, Oz, și care participă la mișcarea generală a solidului. Prin urmare, pentru calculul acestor derivate se poate aplica formula (20.2), înlocuind în ea succesiv: $\bar{r}=\bar{i}$, $\bar{r}=\bar{j}$, $\bar{r}=\bar{k}$; vom avea:

$$\frac{d\bar{i}}{dt}=\bar{\omega}\times\bar{i},\quad \frac{d\bar{j}}{dt}=\bar{\omega}\times\bar{j},\quad \frac{d\bar{k}}{dt}=\bar{\omega}\times\bar{k}. \tag{20.11}$$

De aici găsim:

$$\frac{d\bar{i}}{dt}\omega_x+\frac{d\bar{j}}{dt}\omega_y+\frac{d\bar{k}}{dt}\omega_z=(\bar{\omega}\times\bar{i})\omega_x+(\bar{\omega}\times\bar{j})\omega_y+(\bar{\omega}\times\bar{k})\omega_z,$$

dar în baza proprietăților produsului vectorial, partea din dreapta a acestei relații se poate reprezenta sub forma:

$$(\bar{\omega}\times\bar{i})\,\omega_x+(\bar{\omega}\times\bar{j})\,\omega_y+(\bar{\omega}\times\bar{k})\,\omega_z=\bar{\omega}\times(\bar{i}\omega_x+\bar{j}\omega_y+\bar{k}\omega_z).$$

Deoarece $\bar{i}\omega_x+\bar{j}\omega_y+\bar{k}\omega_z=\bar{\omega}$, vom obține:

$$\frac{d\bar{i}}{dt}\omega_x+\frac{d\bar{j}}{dt}\omega_y+\frac{d\bar{k}}{dt}\omega_z=\bar{\omega}\times\bar{\omega}=0.$$

In acest fel, expresia derivatei $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ pentru axele mobile ale solidului, în cazul general, capătă aceeași formă, ca și pentru axele fixe, și anume:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{i}\frac{d\omega_x}{dt}+\bar{j}\frac{d\omega_y}{dt}+\bar{k}\frac{d\omega_z}{dt}. \tag{20.12}$$

In acest fel, coeficienţii vectorilor unitari $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$ în derivata $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ sînt determinaţi, şi pentru proiecţiile acceleraţiei $\bar{a}$ pe axele mobile $Oxyz$ a coordonatelor, conform celor precedente, vom obţine uşor:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ a_y &= \frac{d\omega_z}{dt} x - \frac{d\omega_x}{dt} z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ a_z &= \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned}\right\} \quad (20.13)$$

§ 89. Exemple. 67. Să se găsească unghiul format de axa de rotaţie a unui solid care se află în mişcare de precesie, şi axa instantanee, dacă perioada de precesie este de n ori mai mare decît perioada de rotaţie a solidului în jurul axei sale şi unghiul de precesie, adică unghiul DOE (fig. 201), este egal cu α. Construim conurile circulare drepte K şi K' arătate în § 86, şi fie OC generatoarea comună care reprezintă pentru momentul considerat, axa instantanee de rotaţie. Deoarece, potrivit enunţului problemei, ştim că lungimea cercului (Γ) cu raza egală cu R_2 a conului K trebuie să fie de n ori mai mare decît lungimea cercului (Γ') cu raza egală cu R_1, a conului K', avem $R_2 = nR_1$. Mai departe vom avea:

$$\sin\alpha_2 = \frac{R_2}{OC}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{R_1}{OC},$$

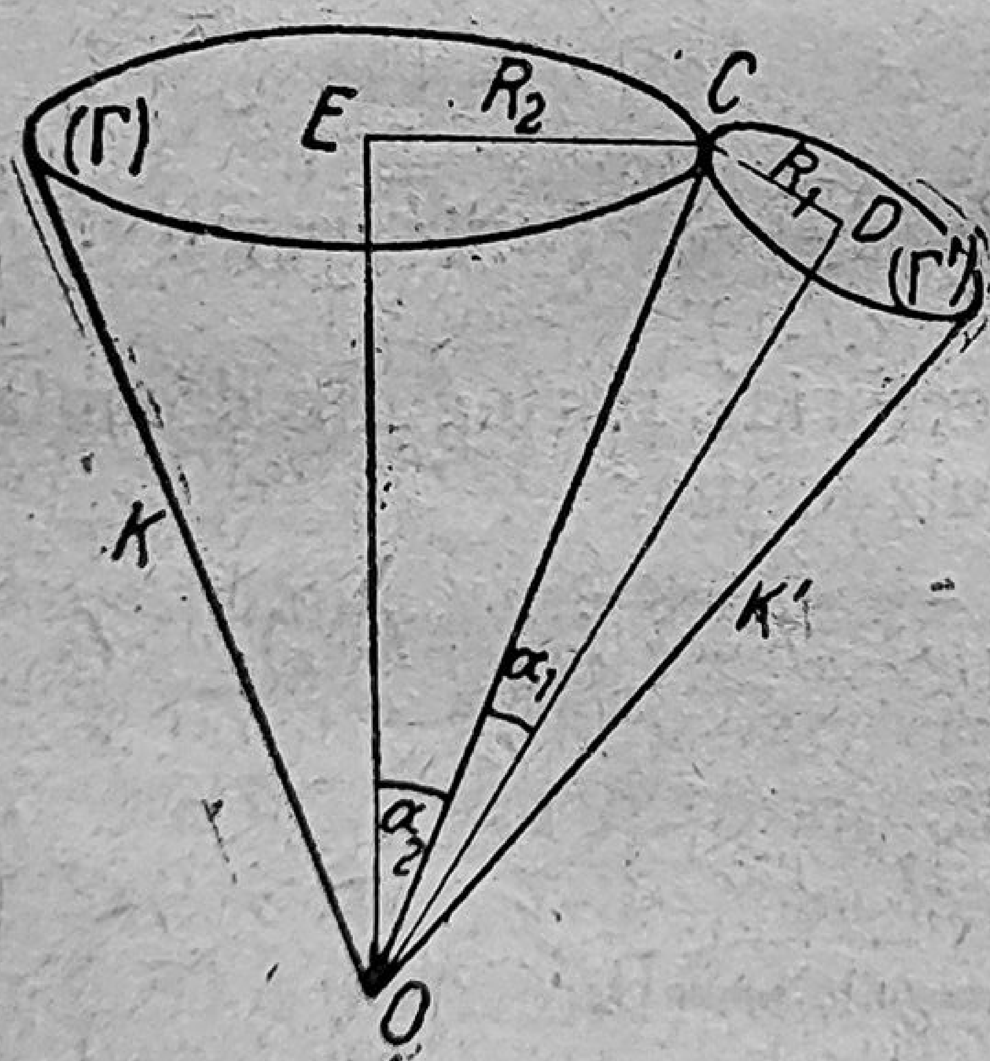


Fig. 201

adică

$$\sin\alpha_2 = n\sin\alpha_1.$$

Deoarece $\angle DOE = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, urmează: $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$; de aici găsim:

$$\sin(\alpha - \alpha_1) = n\sin\alpha_1,$$

sau

$$\sin\alpha\cos\alpha_1 - \cos\alpha\sin\alpha_1 = n\sin\alpha_1.$$

Determinînd din această ecuaţie unghiul α_1, vom avea succesiv:

$$\sin\alpha\cos\alpha_1 = (n + \cos\alpha)\sin\alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sin\alpha}{n + \cos\alpha}.$$

Deoarece pămîntul efectuează rotaţia în jurul axei sale într-o zi solară, iar perioada precesiei sale este aproximativ egală cu 26 000 ani, vom avea:

$$n = 365{,}4 \times 26\,000 = 9\,500\,000$$

Deoarece α este egal cu 23°30', vom obține:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin 23°30'}{9\,500\,000 + \cos 23°30'},$$

sau $\alpha_1 \approx 0'',01$, adică axa instantanee de rotație coincide aproape cu axa OD a pămîntului.

68. Să se găsească expresia pătratului vitezei unui punct al unui solid cu un punct fix O, într-un sistem de coordonate legat invariabil de solid.

Să luăm sistemul axelor de coordonate ortogonale $Oxyz$; după formulele (20.6), vom obține:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_x = \omega_x y - \omega_y x.$$

De aici vom găsi:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2,$$

sau

$$v^2 = \omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (z^2 + x^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) - 2\omega_y \omega_z yz - 2\omega_z \omega_x zx - 2\omega_x \omega_y xy.$$

Presupunînd $\omega_x = p$, $\omega_y = q$, $\omega_z = r$, vom obține:

$$v^2 = p^2 (y^2 + z^2) + q^2 (z^2 + x^2) + r^2 (x^2 + y^2) - 2\,qryz - 2\,rpzx - 2\,pqxy$$

69. Se consideră un sistem de axe de coordonate mobile $Oxyz$, legate invariabil de un solid cu punct fix. Să se găsească relația dintre momentele vitezei unui punct al solidului, în raport cu aceste axe de coordonate și pătratul vitezei acestui punct. Notăm momentele vitezei unui punct al solidului, în raport cu axele Ox, Oy, Oz, respectiv prin O_x, O_y, O_z, avem (§ 13):

$$Q_x = yv_z - zv_y, \quad Q_y = zv_x - xv_z, \quad Q_z = xv_y - yv_x.$$

Ținînd seamă de formulele (20.6), vom obține:

$$Q_x = y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z) = \omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z zx = \omega_x r^2 - x(\overline{\omega} \cdot \overline{r}).$$

De aici, folosind expresia lui v^2 din problema precedentă, vom avea:

$$Q_x = \frac{\partial \left(\frac{v^2}{r}\right)}{\partial \omega_x}, \quad Q_y = \frac{\partial \left(\frac{v^2}{r}\right)}{\partial \omega_y}, \quad Q_z = \frac{\partial \left(\frac{v^2}{r}\right)}{\partial \omega_z}.$$

Cu notațiile p, q, r vom avea:

$$Q_x = \frac{\partial \left(\frac{v^2}{r}\right)}{\partial p}, \quad Q_y = \frac{\partial \left(\frac{v^2}{r}\right)}{\partial q}, \quad Q_z = \frac{\partial \left(\frac{v^2}{r}\right)}{\partial r}.$$

CAPITOLUL XXI

COMPUNEREA VITEZELOR UNGHIULARE. REDUCEREA VITEZELOR UNGHIULARE ȘI DE TRANSLAȚIE LA CEL MAI SIMPLU SISTEM

§ 90. Viteza unghiulară ca vector alunecător. În § 77 s-a demonstrat că viteza unghiulară este un vector alunecător; de aici rezultă că asupra vitezelor unghiulare se pot extinde o serie întreagă de teoreme valabile pentru forțe, deoarece și forța este de asemenea un vector alunecător. În § 66 am văzut că viteza liniară a unei mișcări compuse este egală cu suma geometrică a vitezelor liniare componente ale ei. Evident, că la fel ca pentru forțe (§ 3), formula (16.23) se poate extinde asupra unui număr arbitrar de viteze componente, și vom obține:

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3+\cdots=\sum_n \bar{v}_n. \tag{21.1}$$

Fie dat un sistem de viteze unghiulare situate arbitrar. Deoarece conform § 87 viteza liniară a unui punct, rezultată din fiecare viteză unghiulară instantanee este egală cu momentul vitezei unghiulare, în raport cu acest punct, iar conform formulei (21.1), pentru obținerea vitezei componente trebuie să adunăm geometric toate aceste viteze liniare, adică să adunăm geometric momentele tuturor vitezelor unghiulare, concludem de aici că viteza liniară compusă a punctului este egală cu momentul rezultant al vitezelor unghiulare, în raport cu acest punct. Dacă, afară de vitezele unghiulare, mai există și viteza de translație, atunci, pentru obținerea vitezei liniare compuse a punctului, trebuie să se adune geometric momentele vitezelor unghiulare și vectorii viteză de translație. În acest fel, în baza celor expuse, se poate găsi totdeauna viteza liniară a mișcării compuse a punctului, oricare ar fi vitezele mișcărilor componente. Totuși, în multe cazuri, obținerea vitezei mișcării compuse poate fi calculată mai simplu, și din rezultatul obținut se pot trage concluzii generale despre caracterul vitezei mișcării compuse chiar în cazurile cele mai

generale ale sistemelor de viteze. Aceste rezultate se pot obţine extinzînd la sistemele vitezelor unghiulare, teoria reducerii lor la cele mai simple sisteme, absolut identică cu teoria dezvoltată în statică pentru forţe.

Astfel, vom avea teoreme despre reducerea vitezelor unghiulare concurente, vitezelor unghiulare paralele, vitezelor unghiulare antiparalele, a cuplurilor de viteze unghiulare şi aşa mai departe. Aceste teoreme am putea să nu le dezvoltăm amănunţit, ci să ne bazăm pe rezultatele obţinute pentru sistemele de forţe. Totuşi, pentru a lămuri aceste probleme, ne vom opri la aceste teoreme şi vom da descrierea aparatelor cu care putem verifica rezultatele teoriei.

§ 91. Compunerea vitezelor unghiulare concurente. Dacă axele instantanee de rotaţie au un punct comun O, atunci vitezele unghiulare instantanee de rotaţie în jurul acestor axe se numesc *concurente*, iar punctul O se numeşte *punct de concurenţă.*

Deoarece vitezele unghiulare sînt vectori alunecători, ei pot fi deplasaţi astfel ca originea lor comună să ajungă în punctul O şi apoi să îi adunăm geometric; în acest fel, avem formula:

$$\overline{\omega}=\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2+\overline{\omega}_3+\cdots=\sum\overline{\omega}_n. \qquad (21.2)$$

Acum putem da nu numai o interpretare geometrică formală ci şi o interpretare mecanică proiecţiilor $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ale vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ pe axele de coordonate. Să considerăm aceste proiecţii drept componente ale vectorului $\overline{\omega}$, aşa că vom avea:

$$\overline{\omega}=\overline{\omega}_x+\overline{\omega}_y+\overline{\omega}_z.$$

In acest fel, în loc să calculăm viteza liniară a punctului provenită din viteza unghiulară $\overline{\omega}$, putem calcula viteza liniară a punctului, ce apare datorită sistemului celor trei viteze unghiulare concurente: $\overline{\omega}_x, \overline{\omega}_y, \overline{\omega}_z$; repetînd aceleaşi raţionamente pe care le-am făcut în § 21 la găsirea expresiilor proiecţiilor momentului forţei din teorema lui Varignon, putem obţine din nou pe această cale, formulele cinematice ale lui Euler.

Nu este greu să ne imaginăm un aparat care ar produce mişcarea unui punct, rezultată din două mişcări de rotaţie avînd două viteze unghiulare concurente. Să ne imaginăm bara OB, care se poate roti în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$ (fig. 202). Pe această bară este fixată o altă bară OC în jurul căreia se poate roti un disc cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_2$; pe disc se

află punctul A. Dacă vom roti numai bara OB în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, punctul A va căpăta o viteză liniară provenită numai din rotaţia în jurul acestei bare cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$. Dacă noi vom roti numai discul în jurul axei OC cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$, atunci viteza liniară a punctului A va fi viteză de rotaţie în jurul axei OC cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$. Vom roti apoi concomitent şi bara OB cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ şi discul cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$. Punctul A va căpăta atunci, con-

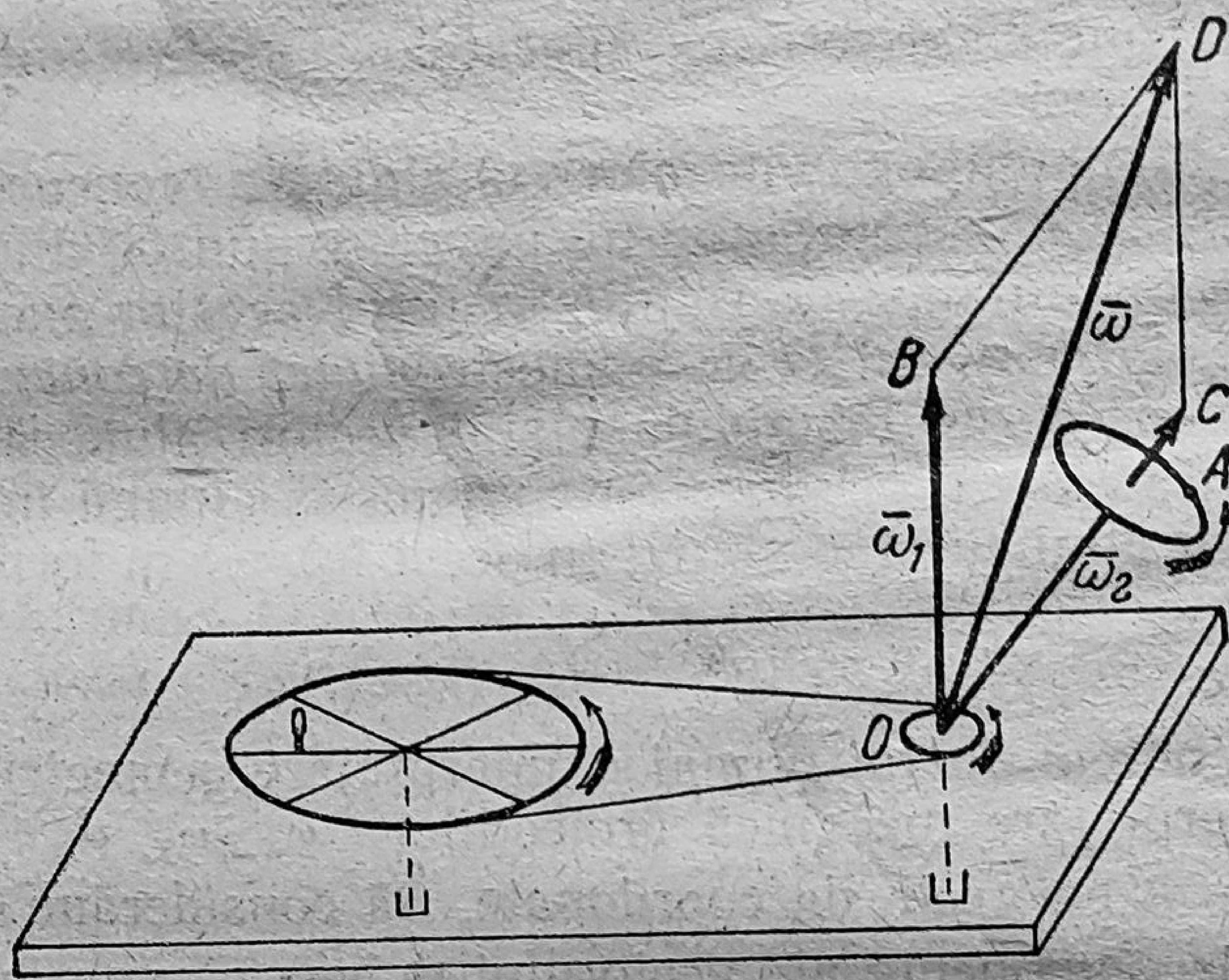


Fig. 202

form celor expuse mai sus, o viteză liniară egală cu cea rezultată din rotirea punctului A în jurul axei OD, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2$. Vom observa că OD este axa instantanee de rotaţie, deoarece, dacă, de exemplu, în momentul iniţial paralelogramul $OCDB$, ar fi aşezat în planul desenului, atunci, în momentul următor, el va ieşi din planul desenului, depărtîndu-se cu latura sa OC de observator. Evident, că locul geometric al axelor instantanee de rotaţie OD (cu condiţia ca raportul $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ să rămînă constant) este un con circular drept, cu axa OB; avem aici cazul unei mişcări de precesie cercetată în § 86.

§ 92. Compunerea vitezelor unghiulare paralele. Cuplu de viteze unghiulare. Pentru a deduce regula compunerii vitezelor unghiulare de rotaţie în jurul unor axe paralele, ne vom folosi de

faptul că viteza unghiulară este un vector alunecător. Fie date două viteze unghiulare paralele $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ cu originile B_1 şi B_2 (fig. 203), şi să se găsească viteza liniară rezultantă v a punctu-

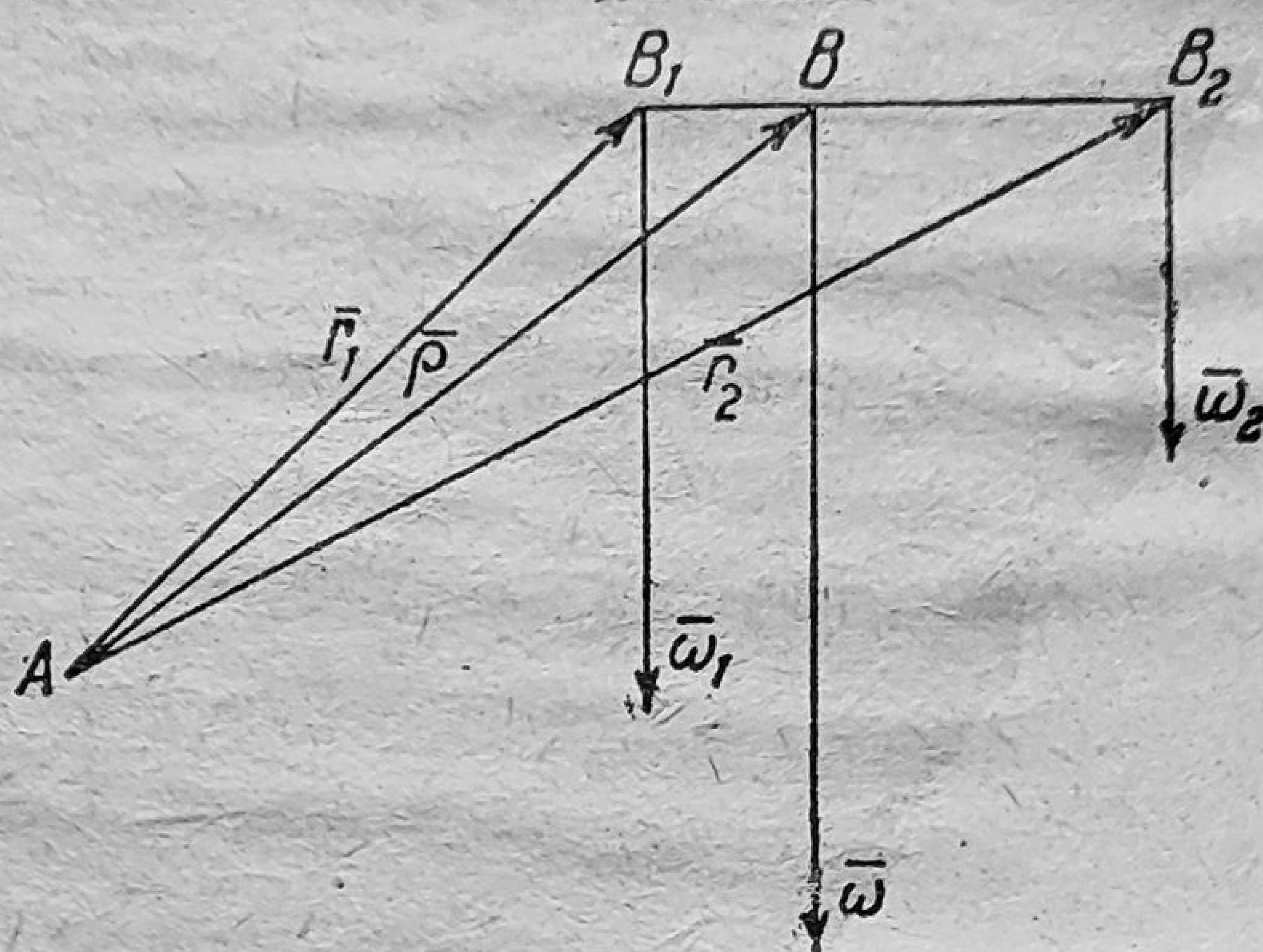


Fig. 203

lui A, datorită mişcărilor de rotaţie cu aceste viteze unghiulare. Presupunem:

$$\bar{r}_1=\overline{AB}_1, \quad \bar{r}_2=\overline{AB}_2.$$

Deoarece viteza liniară a punctului A este egală cu momentul în raport cu punctul A al vitezei unghiulare (§ 77, 87), rezultă:

$$\bar{v}_1=\bar{r}_1\times\bar{\omega}_1, \quad \bar{v}_2=\bar{r}_2\times\bar{\omega}_2,$$

unde $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sînt vitezele componente ale punctului A; prin urmare, viteza $\bar{v}$ a mişcării compuse a punctului A, va fi egală cu:

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2=\bar{r}_1\times\bar{\omega}_1+\bar{r}_2\times\bar{\omega}_2.$$

Deoarece partea din dreapta este suma momentelor vectorilor paraleli $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ în raport cu punctul A, rezultă că i se poate aplica teorema lui Varignon (§ 23) şi vom obţine:

$$\bar{v}=\bar{\rho}\times\bar{\omega},$$

unde $\omega=\omega_1+\omega_2$ şi $\bar{\rho}=\frac{\bar{r}_1\omega_1+\bar{r}_2\omega_2}{\omega}$;

vectorul $\bar{\rho}$ este vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie B, al vitezei rezultante, determinat prin relaţia:

$$\frac{B_1B}{B_2B}=\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Dacă vor fi date nu două, ci un număr oarecare de viteze unghiulare paralele și antiparalele $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, ..., atunci viteza $\overline{v}$ a punctului A va fi egală cu:

$$\overline{v}=\overline{r}_1\times\overline{\omega}_1+\overline{r}_2\times\overline{\omega}_2+\overline{r}_3\times\overline{\omega}_3+\cdots=\sum_n\overline{r}_n\times\overline{\omega}_n.$$

Vom folosi teorema lui Varignon în acest caz general (§ 24); vom obține:

$$\overline{v}=\overline{\rho}\times\overline{\omega},$$

unde

$$\left.\begin{aligned}\overline{\omega}&=\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2+\overline{\omega}_3+\cdots\sum_n\overline{\omega}_n,\\ \overline{\rho}&=\frac{\overline{r}_1\omega_1+\overline{r}_2\omega_2+\overline{r}_3\omega_3+\cdots}{\omega_1+\omega_2+\omega_3+\cdots}=\frac{\sum_n\overline{r}_n\omega_n}{\omega}\end{aligned}\right\}\qquad(21.3)$$

Presupunînd:

$$\overline{\rho}=\overline{i}\xi+\overline{j}\eta+\overline{k}\zeta,\qquad \overline{r}_n=\overline{i}x_n+\overline{j}y_n+\overline{k}z_n,$$

vom avea:

$$\xi=\frac{\sum_n x_n\omega_n}{\omega},\quad \eta=\frac{\sum_n y_n\omega_n}{\omega},\quad \zeta=\frac{\sum_n z_n\omega_n}{\omega}.\qquad(21.4)$$

Evident, că punctul cu coordonatele (ξ, η, ζ) este perfect analog cu centrul forțelor paralele, studiat în § 24.

Nu este greu să ne imaginăm un aparat care ar realiza mișcarea unui punct, condiționată de două viteze unghiulare paralele. Să presupunem că avem o bară B_1D_1, care se poate roti în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$. De ea este fixată bara B_1B_2 iar de aceasta o altă bară B_2D_2 paralelă la bara B_1D_1. Pe bara B_2D_2 se află un disc care se poate roti în jurul barei B_2D_2 cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_2$; pe disc se află punctul A. Să presupunem că inițial rotim numai bara B_1D_1 în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$; punctul A va căpăta atunci viteza de rotație în jurul barei B_1D_1 provenită de la viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$. Să presupunem apoi că rotim numai discul cu viteza unghiulară ω_2; atunci punctul A va căpăta viteza de rotație în jurul barei B_2D_2 provenită de la viteza unghiulară $\overline{\omega}_2$. În sfîrșit, să presupunem că rotim și bara B_1D_1 și discul respectiv cu vitezele unghiulare $\overline{\omega}_1$ și $\overline{\omega}_2$; atunci, după cum s-a dovedit mai sus, punctul A va căpăta o viteză liniară, care ar fi rezultat dacă el

s-ar fi rotit în jurul axei BD cu viteza unghiulară $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2$, şi vom avea:

$$\frac{B_1B}{B_2B}=\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Vom observa că axa BD este axa instantanee de rotaţie. Dacă, de exemplu, în momentul iniţial, toate cele trei axe B_1D_1, BD, B_2D_2 sînt situate în planul desenului, atunci, în momentul următor,

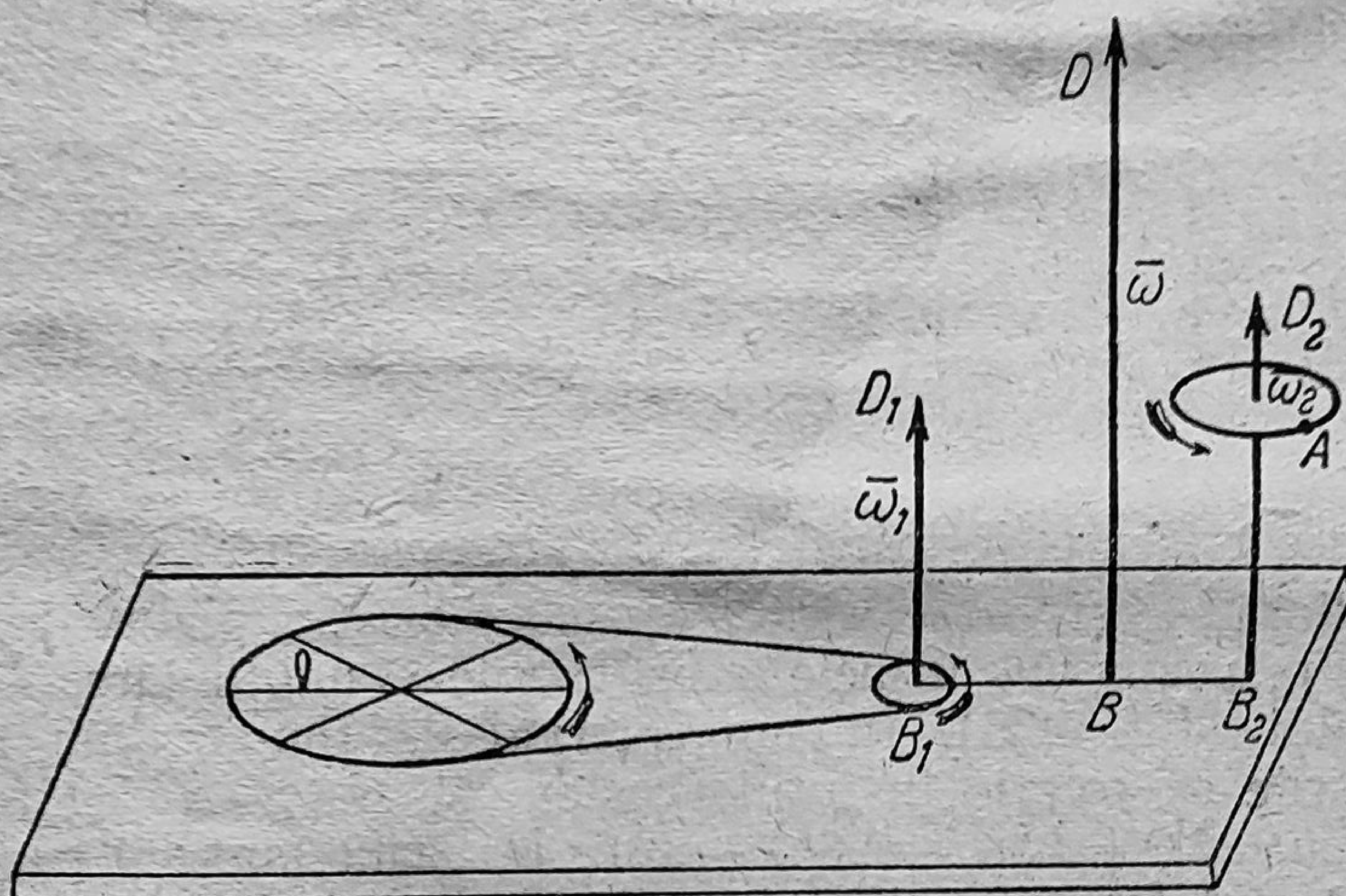


Fig. 204

axa BD va ieşi din planul desenului, îndepărtîndu-se de la observator. Evident, că axa BD (cu condiţia ca raportul $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ să rămînă constant) va descrie un cilindru circular drept, care are dreapta B_1D_1 drept axă geometrică.

Formulele (21.3) şi (21.4) încetează a fi aplicabile, dacă:

$$\overline{\omega}=\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2+\overline{\omega}_3+\ldots=\sum_n \omega_n=0,$$

deoarece în acest caz, teorema lui Varignon nu se mai poate aplica. În acest caz, sîntem nevoiţi să calculăm separat vitezele componente:

$$\overline{v}_1=\overline{r}_1\times\overline{\omega}_1,\quad \overline{v}_2=\overline{r}_2\times\overline{\omega}_2,\quad \overline{v}_3=\overline{r}_3\times\overline{\omega}_3,\ldots,$$

şi să le adunăm vectorial.

Din cele expuse în § 23 rezultă că, dacă $\overline{\omega}=\sum_n \overline{\omega}_n=0$, viteza $\overline{v}$ a mişcării compuse a punctului egală cu momentul rezultant

al vectorilor paraleli $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \ldots$ în raport cu acest punct, trebuie să fie constantă pentru toate punctele din spațiu, adică obținem *mișcarea instantanee de translație* (§ 76). Cazul cel mai simplu, îl reprezintă două viteze unghiulare, egale ca mărime și antiparalele, $\bar{\omega}$ și $-\bar{\omega}$ (fig. 205). Vom introduce următoarea definiție:

Sisemul de două viteze unghiulare, egale ca mărime și antiparalele se numește cuplu de viteze unghiulare. Prin raționamente elementare, ne vom convinge că în acest caz avem de-a



Fig. 205

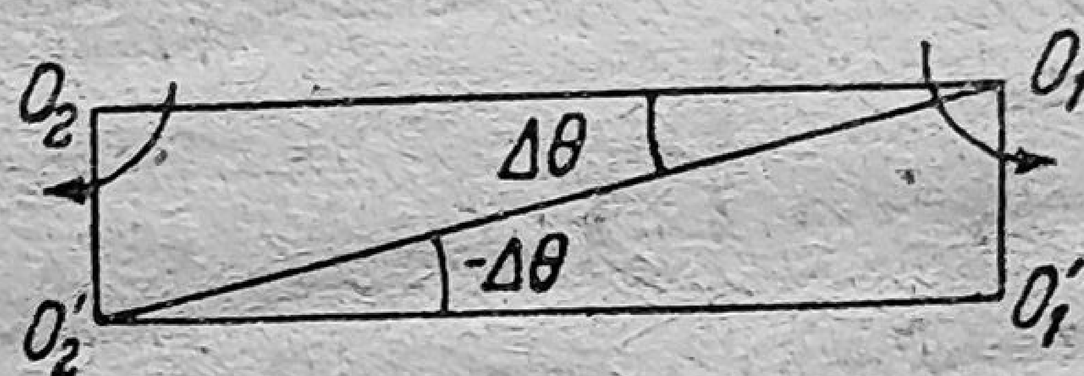


Fig. 206

face cu o mișcare de translație. Să presupunem că vectorii viteză unghiulară $\bar{\omega}$ și $-\bar{\omega}$, sînt perpendiculari pe planul desenului; fie O_1 respectiv O_2 urmele acestor viteze unghiulare pe planul desenului (fig. 206). Într-un interval de timp infinit mic Δt, unghiurile de rotație în jurul acestor axe O_1 O_2 vor fi respectiv egale cu $\Delta\Theta = \omega\Delta t$, $-\Delta\Theta = -\omega\Delta t$. Datorită faptului că unghiurile $\Delta\Theta$ sînt foarte mici deplasările O_1O_1' și O_2O_2' ale punctelor O_1 și O_2 pot fi considerate identice cu arcele $\overset{\frown}{O_1O_1'}$ și $\overset{\frown}{O_2O_2'}$ descrise respectiv din punctele O_2' și O_1 cu razele egale cu O_1O_2 și vom avea $\overset{\frown}{O_1O_1'} = \overset{\frown}{O_2O_2'}$. De aceea, deplasarea dreptei O_1O_2 va fi de translație și va fi egală cu:

$$\Delta s = O_1O_1' = O_2O_2' = O_1O_2 \cdot \Delta\Theta.$$

Pentru a găsi valoarea vitezei de translație a dreptei O_1O_2, vom împărți ambele părți ale ultimei relații cu Δt și vom trece la limită; vom obține:

$$v = \frac{ds}{dt} = O_1O_2 \frac{d\Theta}{dt} = O_1O_2 \cdot \omega. \tag{21.5}$$

Dar $O_1O_2 \cdot \omega$ este modulul momentului cuplului $(\bar{\omega}, -\bar{\omega})$. Astfel vedem că cuplul de viteze unghiulare duce în adevăr la mișcări de translație; modulul vitezei acestei mișcări de translație este egal cu modulul momentului cuplului vitezelor unghiulare, iar sensul vitezei de translație, după cum se vede din fig. 205 și 206,

coincide cu sensul momentului cuplului. De aici ajungem la următoarea teoremă.

Cuplul vitezelor unghiulare produce o viteză de translație a cărui vector este egal cu vectorul momentului acestui cuplu.

Cititorul își poate ușor imagina această mișcare, întorcîndu-se cu același unghi mic dar în sens opus, succesiv pe piciorul drept și pe piciorul stîng.

§ 93. Observații asupra rotațiilor finite. Toate demonstrațiile precedente se refereau la vitezele unghiulare. Deoarece $\omega=\frac{d\Theta}{dt}$ și, prin urmare, $d\Theta=\omega dt$, rezultă că ele pot fi aplicate și unor rotații infinit mici; dar, ar fi greșit să se creadă că aceste deducții se pot aplica și la rotații finite. Exemplele următoare vor ilustra acest lucru.

Să examinăm triedrul drept $Oxyz$ (fig. 207). Rotindu-l în sens pozitiv cu două unghiuri drepte în jurul axei Ox, îl vom muta din poziția I în poziția a II-a; apoi, rotindu-l în sens pozitiv cu două unghiuri drepte în jurul axei Oy îl vom muta din poziția a II-a în poziția a III-a. Dar se vede ușor că triedrul $Oxyz$ poate

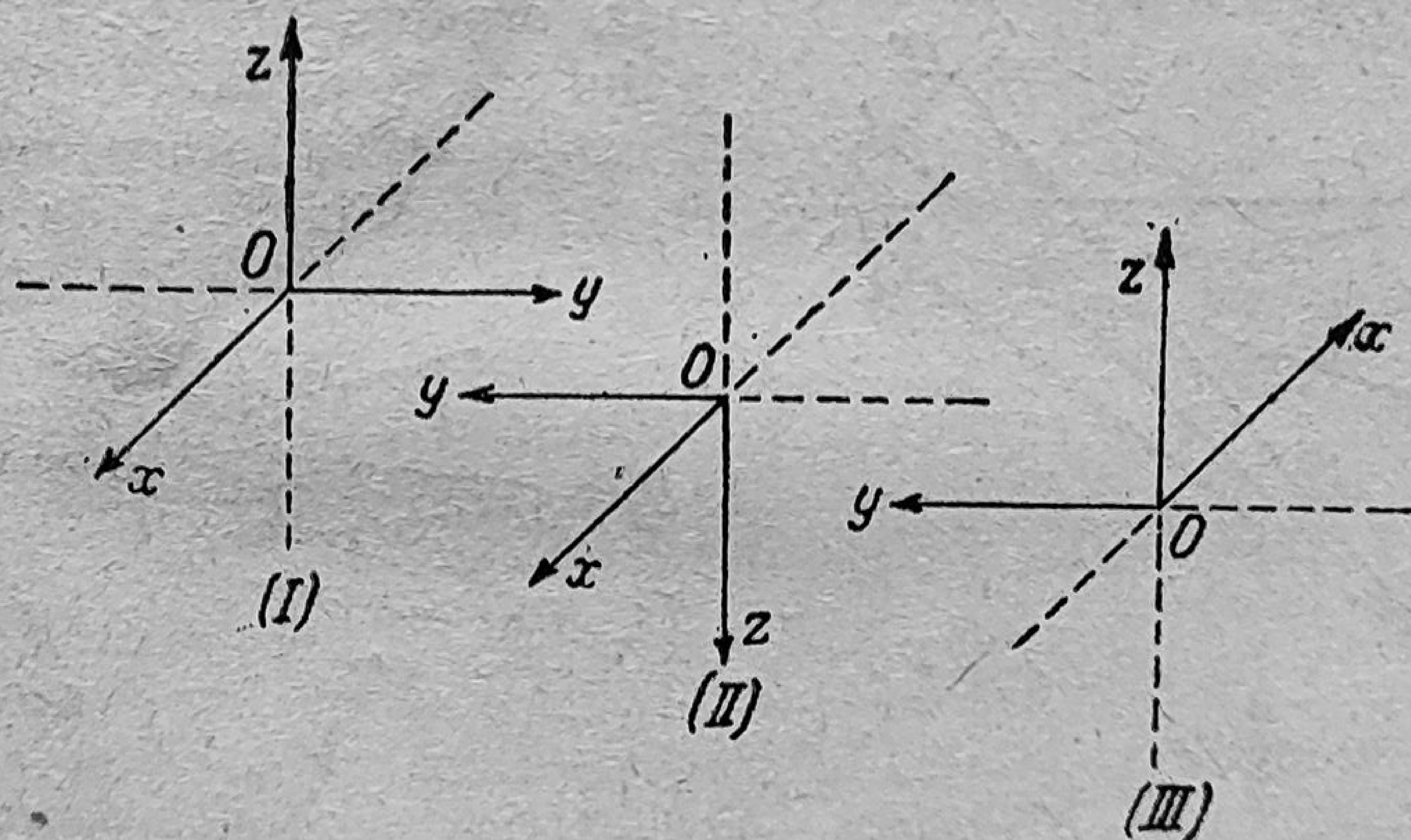


Fig. 207

fi mutat dintr-o dată din poziția I în poziția a III-a prin rotirea în sens opus cu două unghiuri drepte în jurul axei Oz. În acest fel, cele două rotații finite, și anume fiecare cu două unghiuri drepte în sens pozitiv în jurul axei Ox și Oy, sînt echivalente cu o singură rotație finită în sens negativ cu două unghiuri drepte, în jurul axei Oz, adică două rotații finite în jurul unor axe

concurente, puteau să fie înlocuite printr-o singură rotaţie finită, dar *în acest caz nu este valabilă legea paralelogramului.*

Vom presupune apoi, că avem două axe paralele, ale căror urme pe planul desenului vor fi punctele O_1 şi O_2 (fig. 208). Presupunem că în jurul acestor axe se fac rotaţii cu unghiurile finite Θ_1 şi Θ_2, şi anume mai întîi rotaţia în jurul axei O_1 cu unghiul Θ_1, iar apoi în jurul axei O_2 cu unghiul Θ_2. După prima rotaţie, vom muta dreapta O_1O_2 în poziţia O_1O_2', iar după a doua rotaţie vom muta dreapta O_1O_2' în poziţia $O_1'O_2'$; în acest fel, ca rezultat al acestor două rotaţii, segmentul O_1O_2 va ccupa poziţia $O_1'O_2'$. Deoarece mişcarea segmentului O_1O_2 se face în acelaşi plan, putem să mutăm dintr-o dată segmentul O_1O_2 în poziţia $O_1'O_2'$ prin rotirea în jurul unui centru (§ 81). Pentru a găsi punctul C, unim printr-o dreaptă punctele O_1 şi O_1', unim printr-o dreaptă punctele O_2 şi O_2' împărţim segmentele O_1O_1' şi O_2O_2' în două părţi egale şi în mijloacele L şi M ale acestor segmente, ridicăm perpendicularele LC şi MC; punctul de intersecţie C al acestor perpendiculare va fi chiar centrul de rotaţie căutat. Unind prin drepte punctul C cu punctele O_1, O_2, O_2', şi observînd că $CO_2=CO_2'$, concludem că triunghiul CO_1O_2=triunghiul CO_1O_2'. Dar, dreapta OCM împarte unghiul Θ_1 în două părţi egale, iar dreapta $O_2'CL$ împarte unghiul Θ_2 în două părţi egale. Dar din

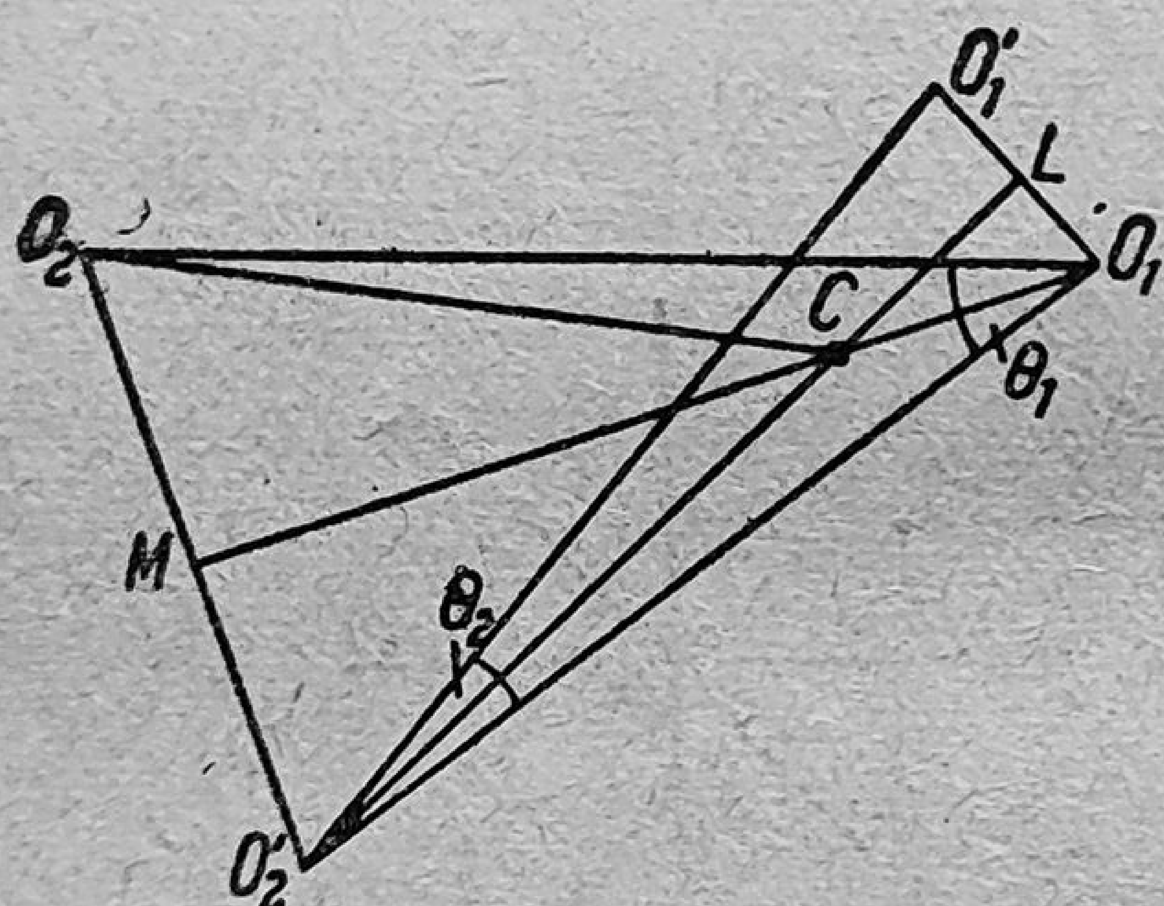


Fig. 208

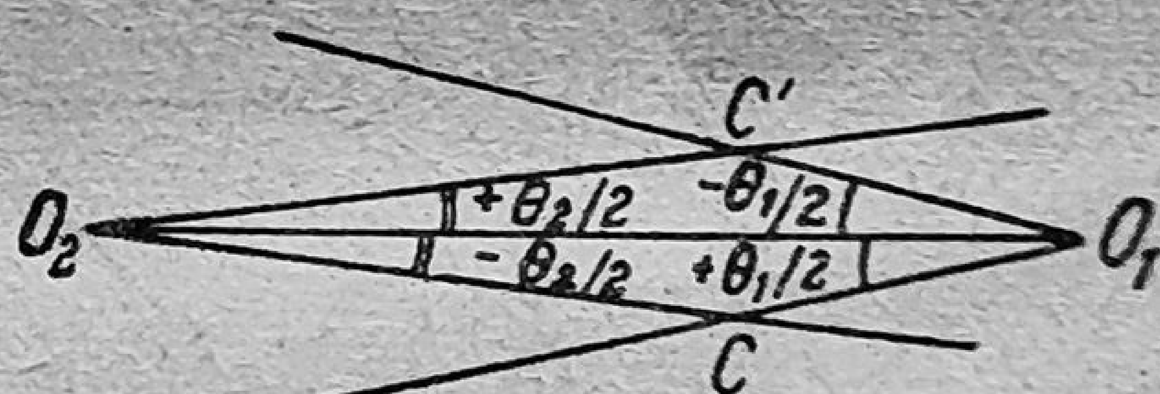


Fig. 209

egalitatea triunghiurilor CO_1O_2 şi CO_1O_2' rezultă că $\sphericalangle CO_2O_1= =\sphericalangle CO_2'O_1=\frac{\Theta_2}{2}$. În acest fel, obţinem următoarea regulă pentru obţinerea punctului C: trebuie dusă de la prima axă de rotaţie O_1 dreapta O_1C sub unghiul $\frac{\Theta_1}{2}$ în sensul rotaţiei cu unghiul O_1, iar de la a doua axă de rotaţie O_2 trebuie dusă dreapta O_2C sub unghiul $\frac{\Theta_2}{2}$ în sens opus rotaţiei cu unghiul Θ_2; punctul de inter-

secţie al dreptelor O_1C şi O_2C determină centrul de rotaţie căutat (fig. 209). Să presupunem apoi, că prima rotaţie este rotaţia în jurul axei O_2, iar cea de-a doua rotaţie este rotaţia în jurul axei O_1; în acest caz, trebuie măsurat unghiul $\frac{\Theta_2}{2}$ în sensul rotaţiei cu unghiul Θ_2 şi unghiul $\frac{\Theta_1}{2}$ în sens opus rotaţiei cu unghiul Θ_2, şi vom obţine un alt punct C', simetric cu punctul C, în raport cu dreapta O_1O_2. Vedem, că spre deosebire de compunerea vitezelor unghiulare şi a rotaţiilor lor infinit mici, unde ordinea rotaţiilor era indiferentă, *la rotaţii finite ordinea efectuării rotaţiilor contează.* Evident, că la micşorarea nelimitată a unghiurilor de rotaţie Θ_1 şi Θ_2, punctele C şi C' se vor apropia unul de altul şi la limită se vor contopi între ele pe dreapta O_1O_2, astfel că la compunerea rotaţiilor infinit mici $d\Theta_1$ şi $d\Theta_2$ şi deci a vitezelor unghiulare $\overline{\omega}_1$ şi $\overline{\omega}_2$, ordinea efectuării rotaţiilor nu va mai avea importanţă.

§ 94. Reducerea vitezei unghiulare şi vitezei de translaţie perpendiculare pe ea, la o singură viteză unghiulară. Presupunem că avem un solid care se roteşte în jurul unei axe oarecare cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ şi care se află în acelaşi timp în mişcare de translaţie cu viteza $\overline{v}$, iar vectorul $\overline{v}$ este perpendicular pe vectorul $\overline{\omega}$. Presupunem că planul desenului va fi perpendicular pe axa de rotaţie Δ, care întretaie planul desenului într-un punct oarecare O (fig. 210). Ducem în planul desenului prin punctul O o dreaptă perpendiculară pe viteza $\overline{v}$ şi vom examina acea parte a acestei drepte, în care viteza liniară produsă de viteza unghiulară $\overline{\omega}$ va fi dirijată în sens opus vitezei $\overline{v}$. Viteza liniară, provenită din viteza unghiulară $\overline{\omega}$ pentru punctul O_1 va fi egală ca modul cu produsul $\omega \cdot OO_1$ şi dirijată perpendicular pe dreapta OO_1; evident, că se poate alege totdeauna punctul O_1 astfel ca să avem $\omega \cdot OO_1 = v$, adică $OO_1 = \frac{v}{\omega}$. Prin urmare, acest punct O_1 în momentul dat nu va avea viteză şi, de aceea, dreapta

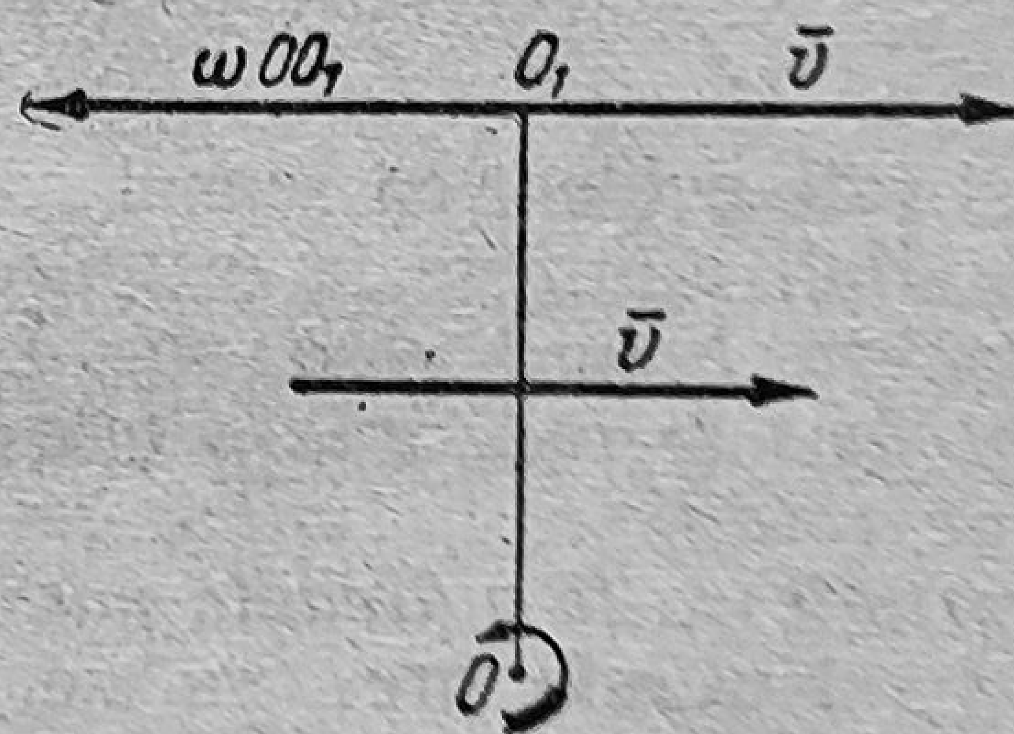


Fig. 210

Δ_1 care trece prin punctul O_1 şi este perpendiculară pe planul desenului, va fi axa instantanee de rotaţie. Să găsim modulul vitezei unghiulare $\bar{\omega}_1$ în jurul axei instantanee de rotaţie Δ. Pentru aceasta vom examina punctul O. Pe de o parte, punctul O se află pe axa de rotaţie Δ şi de aceea nu are viteza liniară datorită vitezei unghiulare $\bar{\omega}$; prin urmare, viteza totală a punctului O, depinde doar de viteza de translaţie şi este egală cu $\bar{v}$. Pe de altă parte, viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi viteza de translaţie $\bar{v}$, după cum am văzut anterior, pot fi înlocuite printr-o singură viteză unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul axei Δ_1; deci, modulul vitezei punctului O poate fi reprezentat şi în forma: $\omega_1 \cdot O_1O$. Egalînd între ale ambele expresii ale modulului vitezei punctului O, vom obţine:

$$v=\omega_1 \cdot O_1O;$$

de aici vom avea:

$$\omega_1=\frac{v}{O_1O}.$$

Dar, din expresia precedentă pentru distanţa OO_1, avem:

$$\omega=\frac{v}{OC_1}.$$

Prin urmare, obţinem:

$$\omega_1=\omega,$$

şi este evident că sensul rotaţiei $\bar{\omega}_1$, coincide cu sensul rotaţiei ω. Astfel, ajungem la următoarea teoremă. *Ansamblul format de o viteză liniară şi o viteză unghiulară perpendiculară pe viteza liniară se reduce la o viteză unghiulară cu acelaşi modul şi sens de rotaţie ca şi viteza unghiulară dată, iar axa instantanee de rotaţie va fi o dreaptă paralelă la axa de rotaţie dată.*

Nu este greu să ne imaginăm un aparat care reproduce această mişcare.

Să ne închipuim un cărucior care merge pe şine cu viteza liniară $\bar{v}$ (fig. 211). Pe acest cărucior este fixată o bară Δ în jurul căreia se poate roti un disc S cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$. Dacă discul nu se roteşte, iar căruciorul înaintează, atunci punctul A situat pe discul S va avea viteza $\bar{v}$. Cînd căruciorul stă dar se roteşte discul S cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, atunci punctul A va lua parte la mişcarea de rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul axei Δ. Dacă însă vor avea loc ambele mişcări, atunci la momen-

tul dat, viteza punctului A va fi aceeași ca în cazul cînd discul S, căruia îi aparține punctul A, s-ar roti cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul axei instantanee Δ_1, paralelă la axa Δ, unde $OO_1 = \frac{v}{\omega}$ și $OO_1 \perp \bar{v}$. Posibilitatea înlocuirii în acest caz a vitezei de translație și a celei unghiulare, printr-o singură viteză unghiulară,

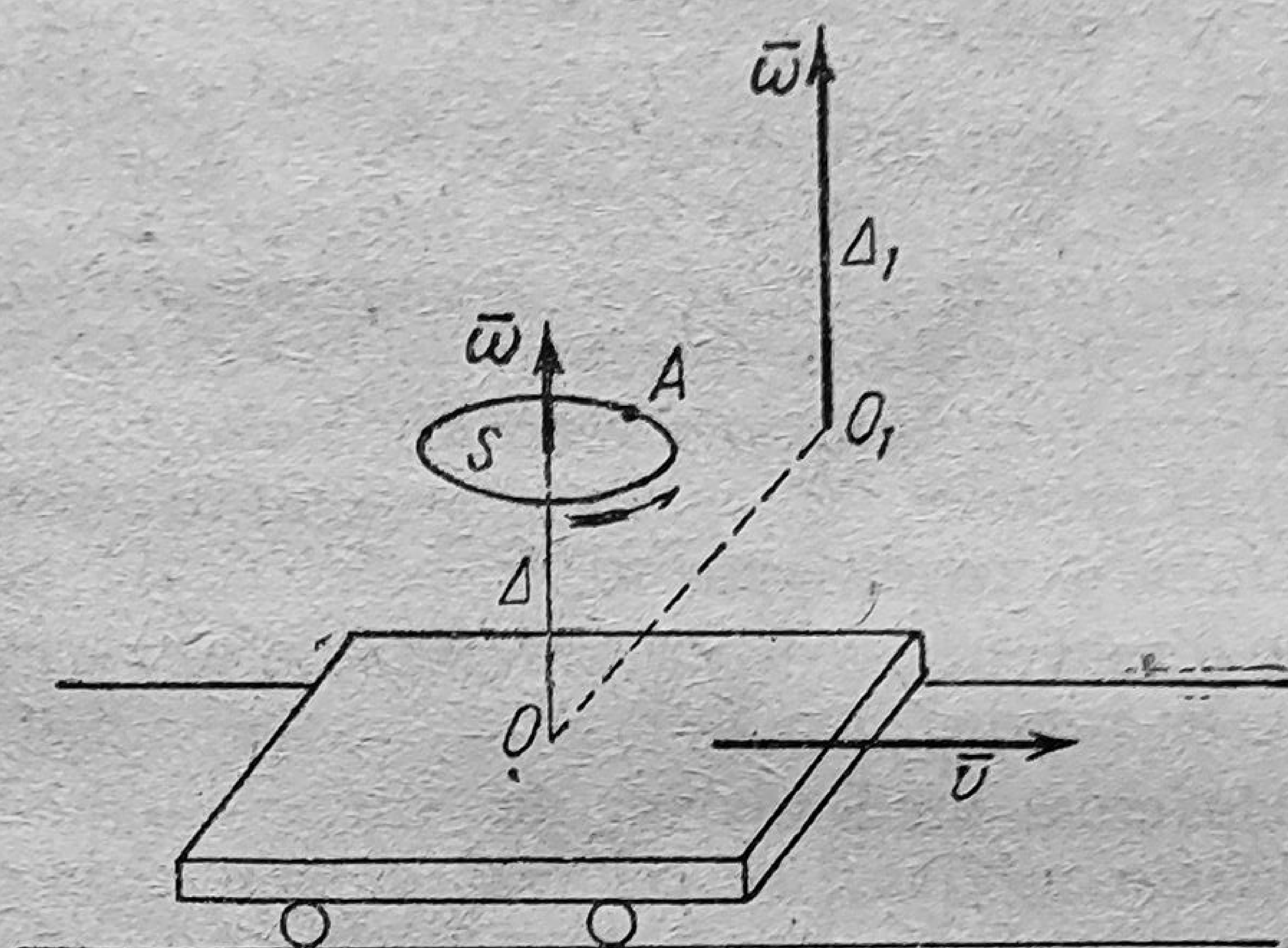


Fig. 211

concordă perfect cu rezultatele expuse în § 81. În adevăr, datorită celor două viteze $\bar{v}$ și $\bar{\omega}$ mișcarea discului S și a oricărui solid legat de el va fi plan paralelă, iar noi am văzut că mișcarea plan paralelă în orice moment poate fi reprezentată ca o rotație în jurul unei axe instantanee de rotație. Nu este greu de prevăzut că locul geometric al axelor instantanee de rotație Δ_1 (cu condiția ca raportul $\frac{v}{\omega}$ să rămînă constant), va fi un plan, paralel cu vectorul viteză $\bar{v}$.

§ 95. Reducerea la cel mai simplu sistem a sistemului format dintr-o viteză unghiulară și o viteză de translație cu direcții arbitrare. Presupunem că avem viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și viteza de translație $\bar{v}$, ale căror direcții sînt arbitrare. Deoarece vectorul viteză de translație $\bar{v}$ este un vector liber, pentru ușurința reprezentării îl vom presupune cu originea în originea vectorul $\bar{\omega}$. Descompunem vectorul $\bar{v}$ al vitezei în doi vectori $\bar{v}'$ și $\bar{v}''$, astfel încît vectorul $\bar{v}'$ să fie perpendicular pe vectorul $\bar{\omega}$ iar vectorul $\bar{v}''$

să fie așezat de-a lungul vectorului $\overline{\omega}$. Conform celor expuse în paragraful precedenet, vitezele $\overline{v}$ și $\overline{\omega}$ se reduc la o singură viteză unghiulară $\overline{\omega}$, care trece prin punctul O_1, astfel încît $OO_1 = \frac{v'}{\omega}$, și $OO_1 \perp \overline{v}'$. Deoarece vectorul $\overline{v}''$, vector viteză de translație, este vector liber, el poate fi mutat în punctul O_1 și în acest fel obținem în punctul O_1 viteza unghiulară $\overline{\omega}$ și viteza de translație $\overline{v}''$ dirijată de-a lungul vitezei unghiulare, adică vectorul viteză al unei mișcări elicoidale. Vom introduce următoarea definiție:

Mișcarea rezultînd dintr-o viteză unghiulară și o viteză de translație paralelă la cea unghiulară se numește rototranslație.

Prin urmare, ajungem la teorema:

Mișcarea rezultînd dintr-o viteză unghiulară și o viteză de translație dirijate arbitrar, se reduce în general la o rototranslație.

Cuvîntul „în general" este utilizat datorită faptului că în cazul cînd $\overline{v} \perp \overline{\omega}$ nu vom avea o rototranslație, ci va avea loc numai o mișcare de rotație.

§ 96. Reducerea unui sistem de viteze unghiulare și de translație, dirijate arbitrar, la cel mai simplu sistem. Raționamentele și rezultatele care vor fi obținute în acest paragraf, sînt perfect analoge cu raționamentele și rezultatele obținute în § 47 și 48, la cercetarea cazului general de reducere a forțelor.

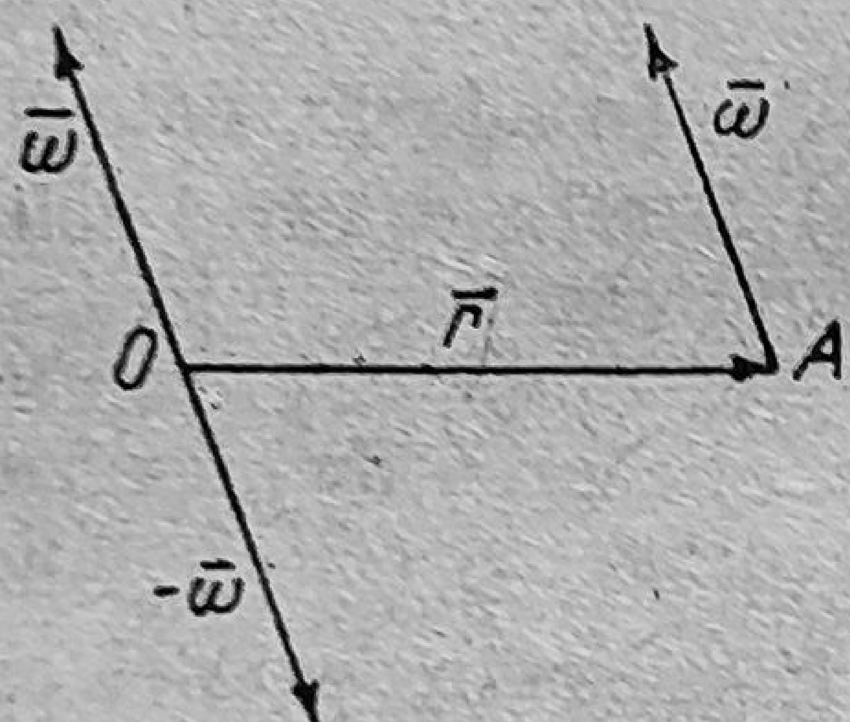


Fig. 212

Vom demonstra în primul rînd următoarea lemă:

Vectorul viteză unghiulară se poate muta totdeauna paralel cu el însuși, într-un punct oarecare din spațiu, adăugînd la el vectorul viteză de translație egal cu momentul vitezei unghiulare în raport cu punctul considerat.

În adevăr, să presupunem că ni se dă vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}$ cu originea într-un punct oarecare A; se cere ca el să fie mutat într-un punct oarecare din spațiu O (fig. 212). Vom construi în punctul O doi vectori $\overline{\omega}$ și $-\overline{\omega}$. Vectorul $-\overline{\omega}$ în punctul O și vectorul $\overline{\omega}$ în punctul A, vor forma un cuplu de viteze unghiulare, iar noi am văzut în § 92 că cuplul de viteze unghiulare dă o viteză de translație al cărei vector este egal cu vectorul moment al acestui cuplu. Să unim punctul O cu punctul A prin vectorul $\overline{r}$;

atunci momentul cuplului considerat $(\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ va fi egal cu produsul vectorial $\bar{r}\times\bar{\omega}$. În acest fel, vedem că drept rezultat obținem vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$, care are originea în punctul O, și vectorul viteză de translație $\bar{v}$, unde $\bar{v}=\bar{r}\times\bar{\omega}$.

Ca și în cazul reducerii unui sistem de forțe arbitrare, reducerea unui sistem arbitrar de viteze unghiulare și de translație dirijate arbitrar, poate fi efectuată și vectorial și analitic. Vom începe cu expunerea procedeului vectorial.

Fie dat sistemul de viteze unghiulare $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \ldots$ care au originea respectiv în punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots$ și sistemul de viteze de translație $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots$

Nu este greu să ne imaginăm mișcarea produsă de sistemul vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \ldots$ În adevăr, să examinăm un punct oarecare A care se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul axei Δ_1, care trece prin punctul A_1. Mai departe axa Δ_1 se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ în jurul axei Δ_2, care trece prin punctul A_2. Apoi axa Δ_2 se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_3$ în jurul axei Δ_3 care trece prin punctul A_3 etc. Noi examinăm aici o poziție oarecare instantanee a tuturor axelor de rotație și valoarea instantanee corespunzătoare a tuturor vitezelor unghiulare. Să luăm un punct arbitrar O în spațiu și să-l numim *punct de reducere*. Mutăm toți vectorii $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \ldots$ în punctul O; atunci, conform § 91, toți vectorii $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \ldots$ concurenți în punctul O, se pot înlocui printr-un singur vector $\bar{\omega}$ egal cu suma vectorială a vectorilor precedenți:

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3+\ldots=\sum_n \bar{\omega}_n. \tag{21.6}$$

Cu ocazia mutării vectorilor $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \ldots$ în punctul O, am obținut conform lemei expuse la începutul acestui paragraf vitezele suplimentare de translație:

$$\bar{v}_1=\bar{r}_1\times\bar{\omega}_1, \quad \bar{v}_2=\bar{r}_2\times\bar{\omega}_2, \quad \bar{v}_3=\bar{r}_3\times\bar{\omega}_3, \ldots, \tag{21.7}$$

unde:

$$\bar{r}_1=\overline{OA}_1, \quad \bar{r}_2=\overline{OA}_2, \quad \bar{r}_3=\overline{OA}_3, \ldots$$

Toate vitezele de translație ca vectorii liberi se pot muta în punctul O și aduna geometric; vom obține viteza de translație rezultantă $\bar{v}$, unde:

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3+\ldots+\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{u}_3+\ldots \tag{21.8}$$

În acest fel, în punctul O vom avea viteza unghiulară $\overline{\omega}$ și viteza de translație $\overline{v}$, dar conform celor expuse în § 95, un asemenea sistem de viteză $\overline{\omega}$ și $\overline{v}$ se poate reduce la o rototranslație.

În acest fel, putem exprima rezultatul obținut în felul următor:

Un sistem arbitrar de viteze unghiulare și de translație dirijate arbitrar, se poate reduce în general la o rototranslație.

Evident, că aici apar de asemenea și cazuri particulare ca și la compunerea unui sistem arbitrar de forțe; anume, în cazuri particulare se pot obține fie o singură viteză unghiulară, fie o singură viteză de translație, fie sistemul vitezelor echivalent cu zero.

Deoarece viteza unghiulară este un vector alunecător, iar cea de translație este un vector liber, găsind rototranslația pentru un punct din spațiu, ea va fi determinată pentru toate punctele suportului vectorului viteză unghiulară. Această dreaptă, ca și în cazul reducerii forțelor, poartă numele de *axă centrală* a sistemului de viteze.

Nu este greu de realizat procedeul analitic de reducere a sistemului vitezelor de translație și unghiulare repetînd raționamentele din § 48. Pentru aceasta luăm un punct oarecare O din spațiu ca punct de reducere și construim în el, un sistem de axe ortogonale $Oxyz$. Folosindu-ne de proiecțiile vitezelor unghiulare pe axele de coordonate considerate $Oxyz$, din formula (21.6) vom avea:

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=(\omega_1)_x+(\omega_2)_x+(\omega_3)_x+\ldots=\sum_n(\omega_n)_x,\\ \omega_y&=(\omega_1)_y+(\omega_2)_y+(\omega_3)_y+\ldots=\sum_n(\omega_n)_y,\\ \omega_z&=(\omega_1)_z+(\omega_2)_z+(\omega_3)_z+\ldots=\sum_n(\omega_n)_z.\end{aligned}\right\}\quad(21.9)$$

Mai departe, proiectînd vectorul $\overline{v}$ din relația (21.8) și ținînd seamă de relația (21.7), vom obține:

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\sum_n[y_n(\omega_n)_z-z_n(\omega_n)_y]+(u_1)_x+(u_2)_x+(u_3)_x+\ldots\\ v_y&=\sum_n[z_n(\omega_n)_x-x_n(\omega_n)_z]+(u_1)_y+(u_2)_y+(u_3)_y+\ldots\\ v_z&=\sum_n[x_n(\omega_n)_y-y_n(\omega_n)_x]+(u_1)_z+(u_2)_z+(u_3)_z+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(21.10)$$

Din raționamentele expuse în § 48, rezultă că, pentru ca în punctul O să apară rototranslația trebuie să avem:

$$\frac{v_x}{\omega_x}=\frac{v_y}{\omega_y}=\frac{v_z}{\omega_z}.$$

În general aceste relații nu vor fi satisfăcute pentru punctul O; de aceea, vom lua ca punct de reducere un alt punct O',

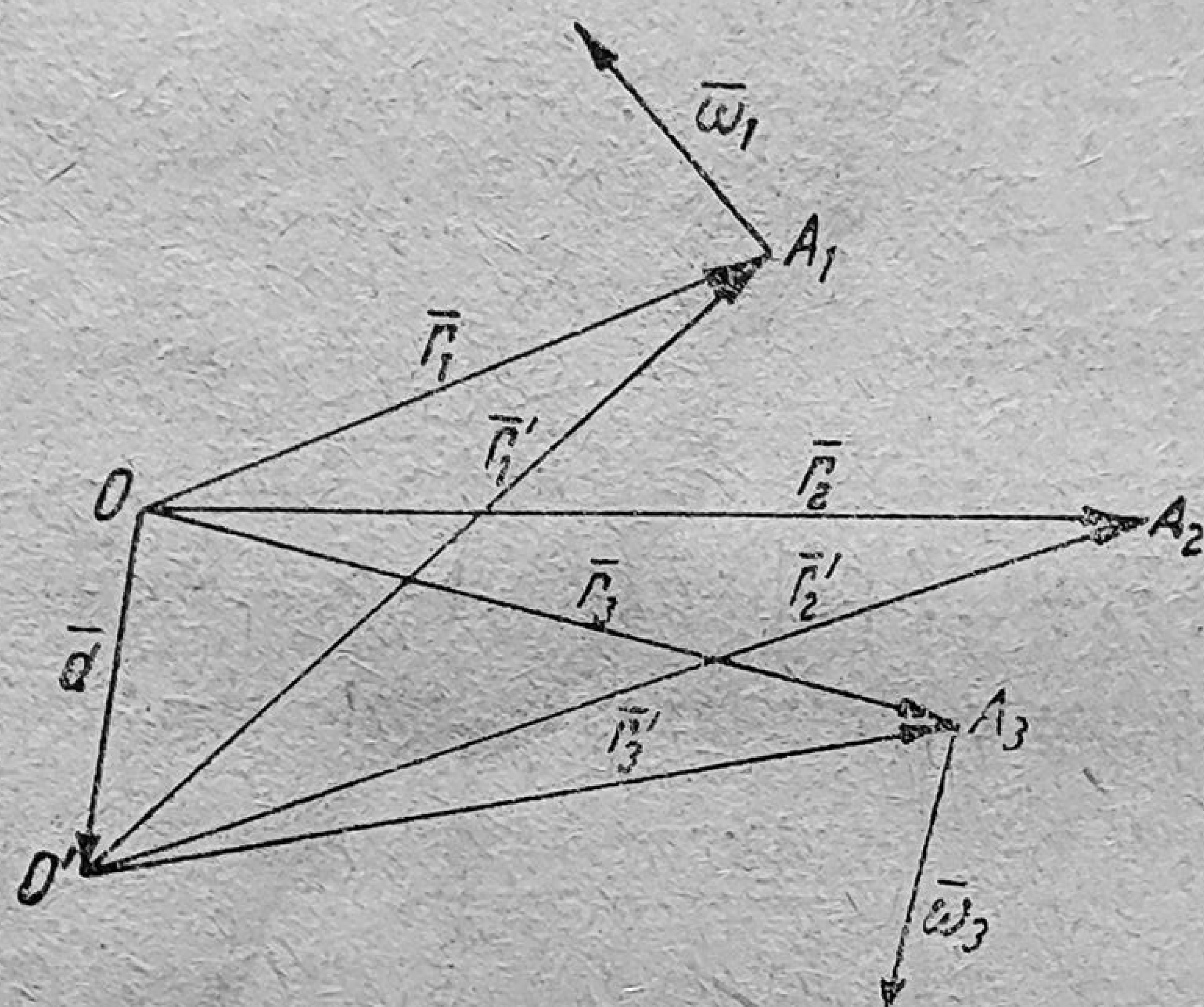


Fig. 213

astfel încît în el să se producă rototranslația; din cauza schimbării punctului de reducere, mărimile ω_x, ω_y, ω_z nu variază, însă mărimile v_x, v_y, v_z trebuie să varieze.

În adevăr, fie (x', y', z') coordonatele punctului O'; în locul formulelor (21.7) vom avea:

$$\bar{v}_1'=\bar{r}_1'\times\bar{\omega}_1,\quad \bar{v}_2'=\bar{r}_2'\times\bar{\omega}_2,\quad \bar{v}_3'=\bar{r}_3'\times\bar{\omega}_3,\ldots \tag{21.11}$$

unde vom avea:

$$\bar{r}_1'=\overline{O'A_1},\quad \bar{r}_2'=\overline{O'A_2},\quad \bar{r}_3'=\overline{O'A_3},\ldots$$

Din fig. 213 vom obține:

$$\bar{r}_1'=\bar{r}_1-\bar{d},\quad \bar{r}_2'=\bar{r}_2-\bar{d},\quad \bar{r}_3'=\bar{r}_3-\bar{d},\ldots$$

unde $\bar{d}=\overline{OO'}$.

De aceea, formulele (21.11) se pot reprezenta sub forma:

$$\bar{v}_1' = (\bar{r}_1 - \bar{d}) \times \bar{\omega}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{\omega}_1 - \bar{d} \times \bar{\omega}_1 = \bar{v}_1 - \bar{d} \times \bar{\omega}_1,$$
$$\bar{v}_2' = (\bar{r}_2 - \bar{d}) \times \bar{\omega}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{\omega}_2 - \bar{d} \times \bar{\omega}_2 = \bar{v}_2 - \bar{d} \times \bar{\omega}_2,$$
$$\bar{v}_3' = (\bar{r}_3 - \bar{d}) \times \bar{\omega}_3 = \bar{r}_3 \times \bar{\omega}_3 - \bar{d} \times \bar{\omega}_3 = \bar{v}_3 - \bar{d} \times \bar{\omega}_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Prin urmare, vom avea:

$$\bar{v}_1' + \bar{v}_2' + \bar{v}_3' + \ldots = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \ldots - \bar{d} \times \bar{\omega}_1 - \bar{d} \times \bar{\omega}_2 - \bar{d} \times \bar{\omega}_3 \ldots =$$
$$= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \ldots - \bar{d} \times (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \ldots) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \bar{v}_3 + \ldots - \bar{d} \times \bar{\omega}.$$

In acest fel, vom găsi:

$$\bar{v}' = \bar{v}_1' + \bar{v}_2' + \bar{v}_3' + \ldots + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \ldots =$$
$$= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \ldots + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \ldots - \bar{d} \times \bar{\omega} = \bar{v} - \bar{d} \times \bar{\omega}.$$

De aici vom obține ecuația axei centrale sub forma:

$$\frac{v_x'}{\omega_x} = \frac{v_y'}{\omega_y} = \frac{v_z'}{\omega_z},$$

sau:

$$\frac{v_x - (y'\omega_z - z'\omega_y)}{\omega_x} = \frac{v_y - (z'\omega_x - x'\omega_z)}{\omega_y} = \frac{v_z - (x'\omega_y - y'\omega_x)}{\omega_z} \qquad (21.12)$$

unde x', y', z' sînt coordonate curente. Ca și în § 48 această ecuație a axei centrale se poate aduce la forma canonică:

Și aici avem doi invarianți:

$$\left.\begin{aligned} &(\bar{\omega} = \text{const}), \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \text{const}; \\ &\bar{\omega} \cdot \bar{v} = \omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z = \text{const}. \end{aligned}\right\} \qquad (21.13)$$

Viteza minimă de translație $\bar{v}_{min}$ se va produce de-a lungul axei centrale (§ 48) și valoarea ei algebrică va fi egală:

$$v_{min} = v \cos(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}}).$$

Vom introduce raportul:

$$p = \frac{v_{min}}{\omega} = \frac{\bar{\omega} \cdot \bar{v}}{\omega^2}; \qquad (21.14)$$

mărimea p se numește *parametrul* rototranslației, evident că p, la fel ca și v_{min}, este o mărime algebrică.

§ 97. Exemple. 70. Se dă un sistem ortogonal de coordonate fix $Oxyz$. Un sistem oarecare de referință I se rotește uniform în jurul axei Ox, efectuînd o rotație completă în 2 s. În raport cu sistemul I, un alt sistem II se rotește uniform în jurul axei, care coincide în momentul dat cu axa y, efectuînd o rotație completă în 4 s. In sfîrșit, un al treilea sistem se rotește uniform în raport cu sistemul II în jurul axei Δ, înclinată în momentul dat față de axa Oz sub unghiul de 45° și față de axele Ox și Oy sub unghiuri egale; în această din urmă mișcare, sistemul material face o rotație completă în $\frac{1}{2}$ s. Să se găsească viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$, a sistemului al treilea în raport cu sistemul fix $Oxyz$ și poziția axei instantanee de rotație.

Vom găsi mai întîi vitezele unghiulare de rotație în jurul axelor Ox, Oy, Δ; aceste viteze unghiulare vor fi respectiv egale cu:

$$\frac{2\pi}{2}=\pi, \qquad \frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi.$$

Proiecțiile vitezei unghiulare 4π pe axa Oz și pe planul Oxy vor fi egale cu $4\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\pi$; de aceea proiecțiile acestei viteze unghiulare pe axele Ox și Oy vor fi egale cu $2\sqrt{2}\pi\frac{1}{\sqrt{2}}=2\pi$. În acest fel, avem:

$$\omega_x=\pi+2\pi=3\pi, \quad \omega_y=\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5}{2}\pi, \quad \omega_z=2\sqrt{2}\pi.$$

De aici obținem:

$$\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}=\sqrt{9\pi^2+\frac{25}{4}\pi^2+8\pi^2}=\frac{\sqrt{93}}{2}\pi\ s^{-1}.$$

Notînd prin α, β, γ unghiurile axei instantanee de rotație cu axele Ox, Oy, Oz de coordonate, vom avea:

$$\cos\alpha=3\pi:\frac{\sqrt{93}}{2}\pi=\frac{6}{\sqrt{93}},$$

$$\cos\beta=\frac{5}{2}\pi:\frac{\sqrt{93}}{2}\pi=\frac{5}{\sqrt{93}},$$

$$\cos\gamma=2\sqrt{2}\pi:\frac{\sqrt{93}}{2}\pi=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{93}}.$$

71. Se dă un sistem de zece axe de rotație, paralele între ele, în jurul cărora vitezele unghiulare sînt egale cu $\bar{\omega}'$, $2\bar{\omega}'$, $3\bar{\omega}'$, ... $10\bar{\omega}'$; toate

aceste axe întretaie una și aceeași dreaptă, iar distanța între punctele de întretăiere este egală cu a. Să se găsească viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ echivalentă cu sistemul dat de viteze unghiulare și poziția axei instantanee de rotație. Pentru rezolvarea acestei probleme folosind formulele (21.4) și (21.5); vom obține:

$$\omega=\omega'+2\omega'+3\omega'+\ldots+10\omega'=\frac{\omega'(1+10)\,10}{2},$$

adică

$$\omega=55\,\omega'.$$

Considerînd dreapta pe care o întretaie toate axele de rotație, drept axa Ox și luînd originea O în punctul de intersecție al dreptei cu suportul vitezei unghiulare ω', după prima din formulele (21.5) vom avea:

$$\xi=\frac{O\cdot\omega'+a\cdot 2\omega'+2a\cdot 3\omega'+3a\cdot 4\omega'+\ldots+9a\cdot 10\omega'}{55\,\omega},$$

sau

$$\xi=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+9\cdot 10}{55}\,a.$$

Efectuînd calculele, vom găsi:

$$\xi=\frac{2+6+12+20+30+42+56+72+90}{55}\,a,$$

adică

$$\xi=6\,a.$$

In acest fel, axa instantanee de rotație va întretăia axa Ox la distanța de $6a$ de la originea coordonatelor și va fi paralelă cu celelalte axe, iar viteza unghiulară instantanee de rotație în jurul ei va fi egală cu $\overline{55\,\omega'}$.

72. Se dau trei viteze unghiulare $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ și viteza liniară $\overline{u}$. Să se reducă acest sistem de viteze la cel mai simplu sistem, dacă cu unitățile de măsură metrul și secunda, proiecțiile vitezelor unghiulare pe axele dreptunghiulare de coordonate $Oxyz$ vor fi: $\overline{\omega}_1$ (4, 6, 7) $\overline{\omega}_2$ (2, 4, 5), $\overline{\omega}_3$ (−5, −6, −7); originile A_1, A_2, A_3 ale vectorilor $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ au coordonatele: A_1 (2, 3, 8), A_2 (1, −2, −3), A_3 (2, 2, 1) și proiecțiile vitezei $\overline{u}$ sînt egale cu $u_x=8$, $u_y=7$, $u_z=6$. Folosind formulele (21.9), obținem:

$$\omega_x=4+2-5=+1,$$
$$\omega_y=6+4-6=+4,$$
$$\omega_z=7+5-7=+5.$$

De aici vom avea:

$$\omega=\sqrt{1^2+4^2+5^2}=\sqrt{42}.$$

Utilizînd formulele (21.10), vom găsi:

$$v_x=3\cdot 7-8\cdot 6+(-2)\cdot 5-(-3)\cdot 4+2\cdot(-7)-1\cdot(-6)+8=-33+8=-25,$$
$$v_y=8\cdot 4-2\cdot 7+(-3)\cdot 2-1\cdot 5+1\cdot(-5)-2\cdot(-7)+7=+16+7=+23,$$
$$v_z=2\cdot 6-3\cdot 4+1\cdot 4-(-2)\cdot 2+2\cdot(-6)-2\cdot(-5)+6=6+6=+12.$$

Putem alcătui acum ecuaţiile axei centrale după formulele (21.12):

$$\frac{-25-(5y'-4z')}{1}=\frac{23-(z'-5x')}{4}=\frac{12-(4x'-y')}{5}.$$

Pentru a aduce aceste ecuaţii ale axei centrale la forma canonică, vom găsi coordonatele punctului de intersecţie al axei centrale cu planul Oxy, adică vom lua $x'=0$.
Vom obţine:

$$\frac{-25-(5y'-4z')}{1}=\frac{23-z'}{4}=\frac{12+y'}{5}$$

de aici vom avea:

$$4y'+5z'=67,$$

$$-20y'+17z'=123.$$

Rezolvînd aceste ecuaţii, vom găsi:

$$y'=\frac{131}{42}, \qquad z'=\frac{229}{21}.$$

Prin urmare, ecuaţiile axei centrale se pot aduce la următoarea formă canonică:

$$\frac{x'}{1}=\frac{y'-\frac{131}{42}}{4}=\frac{z'-\frac{229}{21}}{5},$$

sau:

$$\frac{42x'}{1}=\frac{42y'-131}{4}=\frac{42z'-458}{5}.$$

Pentru al doilea invariant $\omega\cdot v=\omega_x\cdot v_x+\omega_y\cdot v_y+\omega_z\cdot v_z$ avem:

$$\omega\cdot v=1\cdot(-25)+4\cdot 23+5\cdot 12=127.$$

De aici pentru parametrul p al rototranslaţiei după formula (21.14), vom găsi:

$$p=\frac{127}{42}.$$

Deoarece din formula (21.14) rezultă că trebuie să avem $v_{min}=p\,\omega$, vom avea:

$$v_{min}=\frac{127}{42}\sqrt{42}=\frac{127}{\sqrt{42}}.$$

În acest fel, sistemul considerat al vitezelor se reduce la rototranslaţie a cărei viteză liniară este egală cu $\frac{127}{\sqrt{42}}$ m/s, iar viteza unghiulară este egală cu $\sqrt{42}$ s^{-1}, axa centrală a sistemului intersectează planul Oxy în punctul

cu coordonatele $y=\frac{131}{42}$, $z=\frac{229}{21}$ şi formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ, ai căror cosinuşi sînt:

$$\cos\alpha=\frac{\omega_x}{\omega}=\frac{1}{\sqrt{42}},\quad \cos\beta=\frac{\omega_y}{\omega}=\frac{4}{\sqrt{42}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\omega_z}{\omega}=\frac{5}{\sqrt{42}}.$$

CAPITOLUL XXII

CAZUL GENERAL DE MIŞCARE A SOLIDULUI LIBER

§ 98. Studiul geometric al mişcării solidului liber. După cele expuse în capitolele precedente putem trece la studiul cazului general de mişcare a solidului liber. Fie dat un solid liber oarecare. Considerăm în el trei puncte oarecare A, B, C, necoliniare. Unind aceste trei puncte între ele vom obţine triunghiul ABC. Evident că vom cunoaşte poziţia solidului dacă vom cunoaşte poziţia acestui triunghi ABC.

Presupunem că la trecerea solidului din poziţia I în poziţia a II-a, triunghiul ABC se va deplasa în poziţia $A'B'C'$ (fig. 214). Luăm unul din punctele A', B', C', de exemplu C' şi îl unim cu punctul C printr-o dreaptă; vom obţine segmentul de dreaptă CC'. Ducem segmentele de dreaptă $B'B_1$ şi $A'A_1$ astfel încît să avem: $B'B_1 \# C'C$ şi $A'A_1 \# C'C$ şi unim între ele prin drepte punctele A_1, B_1, C; vom obţine triunghiul CA_1B_1, egal cu triunghiul $C'A'B'$ şi situat într-un plan paralel la planul triunghiului $C'A'B'$. Vedem că se poate deplasa triunghiul CAB în poziţia $C'A'B'$, deplasînd mai întîi triunghiul CAB în poziţia CA_1B_1, iar apoi deplasînd triunghiul CA_1B_1 în poziţia $C'A'B'$.

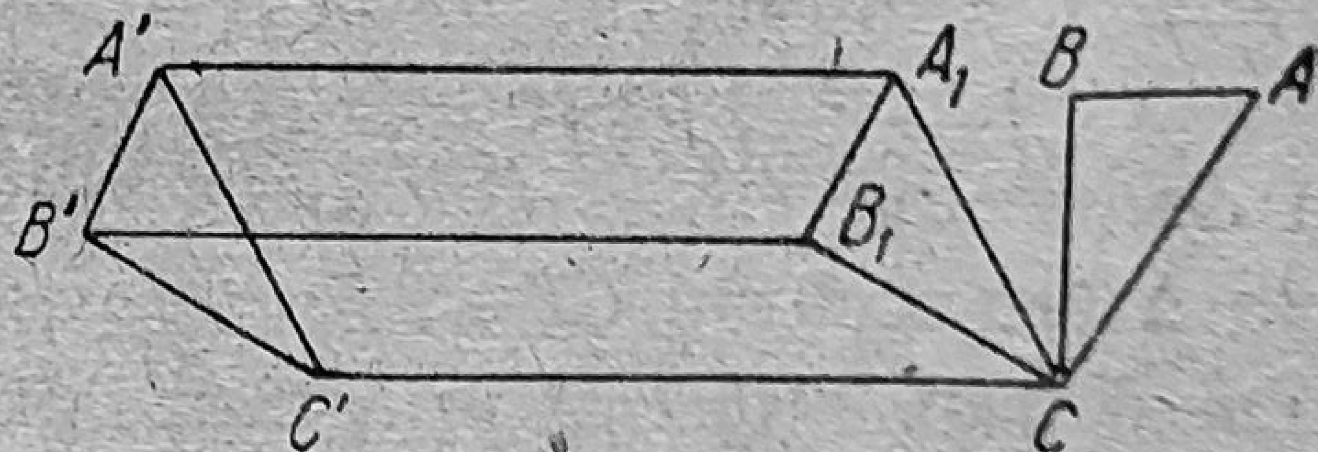


Fig. 214

Prin deplasarea triunghiului CAB în poziţia CA_1B_1 vom avea cazul mişcării solidului care are un punct fix C; după teorema lui d'Alembert (§ 86), această mişcare se poate obţine printr-o rotaţie a solidului în jurul unei axe oarecare Δ care trece prin punctul C. Deplasarea însă a triunghiului CA_1B_1 în poziţia $C'A'B'$ este o translaţie CC' a solidului. Astfel, am demonstrat următoarea teoremă:

Orice mişcare a unui solid se poate obţine printr-o rotaţie şi o translaţie.

Observăm că la fel ca şi mai înainte în cazuri analoge, nu descriem aici prin aceste mişcări de rotaţie şi de translaţie, deplasările reale ale solidului; ne interesează doar poziţia iniţială I a solidului şi poziţia lui finală II, însă trecerea reală din poziţia I în poziţia a II-a a solidului poate fi foarte diferită de mişcările de rotaţie şi translaţie studiate de noi. Este evident, că succesiunea în care se fac aceste două deplasări nu interesează; se poate da solidului întîi deplasarea CC' şi apoi să se rotească solidul în jurul axei care trece prin punctul C', astfel încît triunghiul considerat să coincidă cu triunghiul $C'A'B'$, de asemenea se pot face ambele deplasări concomitent adică să se mute solidul în mişcare de translaţie, şi în acelaşi timp să se rotească solidul în jurul axei care trece prin punctul C. Să demonstrăm acum următoarea teoremă care aparţine lui Châsles:

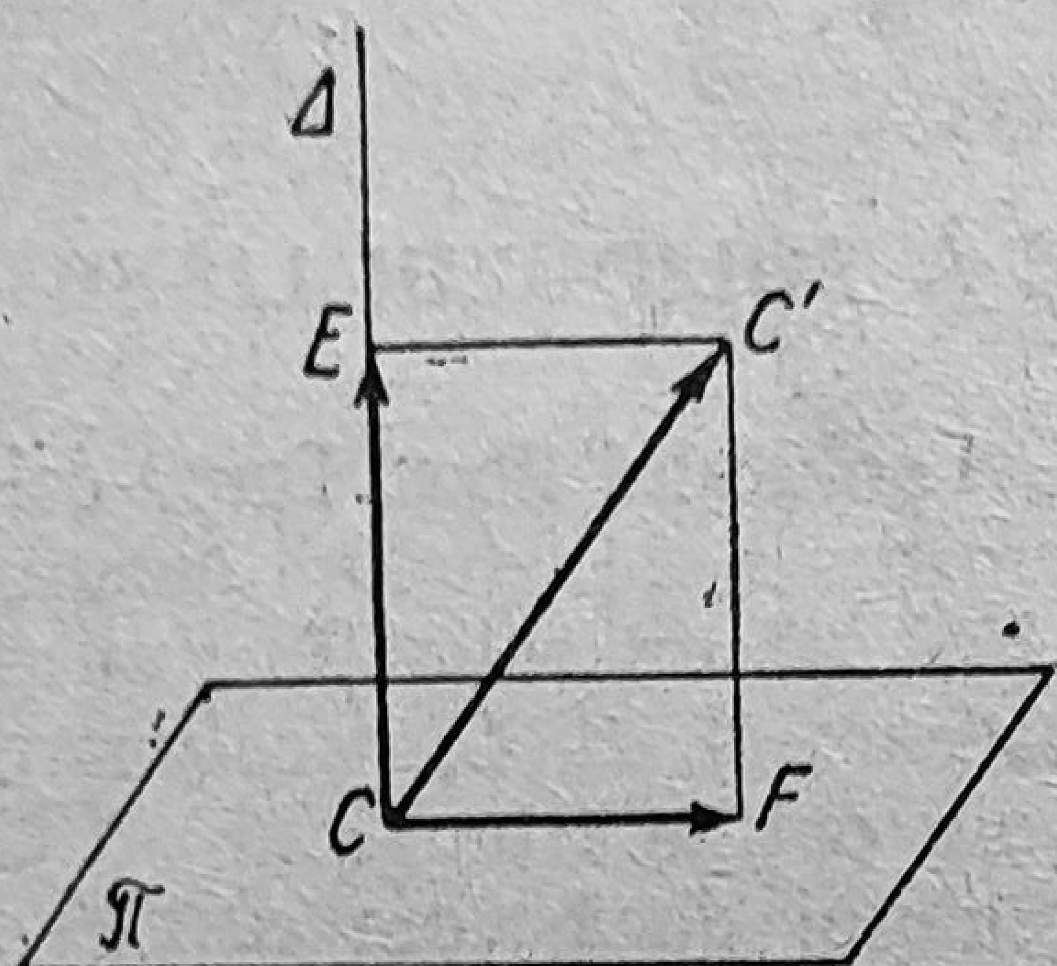


Fig. 215

Orice deplasare a unui solid liber dintr-o poziţie în alta se poate obţine printr-o mişcare elicoidală.

În adevăr, să presupunem că am deplasat solidul din poziţia I în poziţia a II-a printr-o mişcare de translaţie CC' şi printr-o mişcare de rotaţie în jurul unei axe oarecare Δ care trece prin punctul C. Pentru uşurinţa desenului să presupunem că am dus planul desenului prin vectorul $\overline{CC'}$ a mişcării de translaţie şi prin axa Δ a mişcării de rotaţie (fig. 215). Descompunem vectorul $\overline{CC'}$ în doi vectori $\overline{CE}$ şi $\overline{CF}$, astfel încît vectorul $\overline{CE}$ să fie situat pe axa Δ iar vectorul $\overline{CF}$ să fie perpendicular pe axa Δ. Astfel, putem înlocui translaţia $\overline{CC'}$ prin translaţia $\overline{CF}$ şi translaţia $\overline{CE}$. Rotirea solidului în jurul axei Δ şi translaţia $\overline{CF}$, dau corpului o deplasare paralelă cu planul π perpendicular pe axa Δ, dar noi ştim că o deplasare plan paralelă a solidului, se poate totdeauna face printr-o rotaţie a acestui solid în jurul unei axe oarecare perpendiculară pe planul π (§ 81). În acest fel, am redus deplasarea solidului liber la o rotaţie în jurul unei axe oarecare Δ' perpendiculară pe planul π şi la o translaţie $\overline{CE}$, de asemenea perpendiculară pe planul π. Evident, că din ambele aceste mişcări rezultă o mişcare elicoidală şi deci teorema este demonstrată. De aici

rezultă că totdeauna putem să ne imaginăm un astfel de şurub şi o astfel de piuliţă de care fixînd solidul să putem muta solidul dintr-o poziţie în alta prin mişcarea piuliţei pe şurub.

Această mişcare elicoidală nu va descrie desigur mişcarea reală a solidului. Împărţim mişcarea reală a solidului într-o serie de mişcări infinit mici, şi pentru fiecare din ele construim mişcarea elicoidală corespunzătoare. Evident, că ne vom apropia cu atît mai mult de mişcarea reală a solidului prin totalitatea acestor mişcări elicoidale, cu cît poziţiile succesive considerate din mişcarea reală a solidului vor fi mai apropiate una de alta. Dacă aceste poziţii succesive ale solidului vor fi infinit de apropiate între ele, atunci şi mişcările elicoidale infinit mici se vor apropia infinit de mult de mişcarea reală a acestui solid. Observăm că în acest fel reprezentăm numai mişcarea reală a solidului, adică mişcarea lui din punct de vedere geometric; pentru a reproduce şi mecanic mişcarea reală, este necesar ca să fie luate în mod corespunzător vitezele tuturor mişcărilor elicoidale componente infinit mici. Din cele expuse rezultă că:

În orice moment mişcarea solidului liber poate fi reprezentată ca o mişcare elicoidală infinit mică.

Axa centrală a acestei mişcări elicoidale infinit mici, se numeşte *axă elicoidală instantanee.*

§ 99. Studiul analitic al mişcării solidului liber. Nu este greu, pe baza celor expuse în paragrafele precedente, să studiem distribuţia vitezelor şi acceleraţiilor punctelor unui solid liber. Să examinăm solidul liber M. Fie A şi B două puncte oarecare date ale solidului M (fig. 216). Vom lua un sistem de axe de coordonate fixe $O_1x_1y_1z_1$ şi vom construi un alt sistem de axe de coordonate $Axyz$, invariabil legate de solidul M şi cu originea în punctul dat A al solidului. Vom uni între ele prin drepte punctele O_1, A, B, şi vom introduce notaţiile:

$$\bar{\rho}_A=\overline{O_1A},\quad \bar{\rho}=\overline{O_1B},\quad \bar{r}=\overline{AB}.$$

Obţinem relaţia de bază:

$$\bar{\rho}=\bar{\rho}_A+\bar{r},$$

pe care am folosit-o frecvent (16.20). Pentru a avea vectorul viteză $\bar{v}$ al punctului B, trebuie să derivăm în raport cu timpul t, vectorul $\bar{\rho}$; vom obţine:

$$\bar{v}=\frac{d\bar{\rho}}{dt}=\frac{d\bar{\rho}_A}{dt}+\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Dar derivata $\frac{d\bar{\rho}_A}{dt}$ este egală cu vectorul viteză al punctului A, pe care îl vom nota prin $\bar{v}_A$. În ce priveşte derivata $\frac{d\bar{r}}{dt}$, deoarece modulul vectorului r este constant, această derivată reprezintă viteza mişcării de rotaţie a punctului B în raport cu punctul A, adică ea este egală cu $\bar{\omega}\times\bar{r}$, unde $\bar{\omega}$ este vectorul viteză unghiu-

Fig. 216

lară instantanee dirijată pe axa instantanee de rotaţie, care trece prin punctul A. În acest fel, obţinem formula (19.2), care ne este cunoscută din paragrafele precedente:

$$\bar{v}=\bar{v}_A+\bar{\omega}\times\bar{r}; \qquad (22.1)$$

formula (19.2) diferă de formula (22.1) prin faptul că în formula (19.2) vectorul $\bar{\omega}$ este perpendicular pe planul în care se produce mişcarea figurii plane, în timp ce în formula (22.1) vectorul $\bar{\omega}$ poate avea o direcţie arbitrară în spaţiu.

Pentru a găsi acceleraţia $\bar{a}$, să calculăm derivatele vectoriale în raport cu timpul ambilor membri ai relaţiei (22.1); vom avea:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d\bar{v}_A}{dt}+\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt},$$

sau, notînd derivata $\frac{d\bar{v}_A}{dt}$ prin $\bar{a}_A$ şi ţinînd cont de formula (18.12), vom obţine:

$$\bar{a}=\bar{a}_A+\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\bar{\omega}-\omega^2\bar{r}. \qquad (22.2)$$

Nu este greu de trecut la formulele (22.1) şi (22.2) la expresiile proiecţiilor pentru sistemele axelor de coordonate mobile şi fixe. Notăm coordonatele punctelor A şi B în raport cu axele $O_1x_1y_1z_1$ prin (l, m, n) şi (x_1, y_1, z_1); vom avea:

$$\bar{\rho}=\bar{i}_1x_1+\bar{j}_1y_1+\bar{k}_1z_1; \quad \bar{\rho}_A=\bar{i}_1l_1+\bar{j}_1m+\bar{k}_1n,$$

unde $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ sînt vectori unitari ai axelor sistemului fix de coordonate $O_1x_1y_1z_1$. De aici rezultă:

$$\bar{r}=\bar{i}_1(x_1-l)+\bar{j}_1(y_1-m)+\bar{k}_1(z_1-n);$$

apoi, introducînd proiecţiile vectorilor $\bar{v}_A, \bar{a}_A, \bar{v}$ şi $\bar{a}$ pe axele $O_1x_1y_1z_1$ de coordonate, vom obţine:

$$\bar{v}_A=\bar{i}_1(v_A)_{x_1}+\bar{j}_1(v_A)_{y_1}+\bar{k}_1(v_A)_{z_1}, \quad \bar{v}=\bar{i}_1v_{x_1}+\bar{j}_1v_{y_1}+\bar{k}_1v_{z_1},$$

$$\bar{a}_A=\bar{i}_1(a_A)_{x_1}+\bar{j}_1(a_A)_{y_1}+\bar{k}_1(a_A)_{z_1}, \quad \bar{a}=\bar{i}_1a_{x_1}+\bar{j}_1a_{y_1}+\bar{k}_1a_{z_1}.$$

După aceasta putem scrie formula (22.1) sub forma:

$$\bar{i}_1v_{x_1}+\bar{j}_1v_{y_1}+\bar{k}_1v_{z_1}= =\bar{i}_1(v_A)_{x_1}+\bar{j}_1(v_A)_{y_1}+\bar{k}_1(v_A)_{z_1}+\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1-l & y_1-m & z_1-n \end{vmatrix},$$

sau

$$\left.\begin{aligned} v_{x_1}&=(v_A)_{x_1}+\omega_{y_1}(z_1-n)-\omega_{z_1}(y_1-m), \\ v_{y_1}&=(v_A)_{y_1}+\omega_{z_1}(x_1-l)-\omega_{x_1}(z_1-n), \\ v_{z_1}&=(v_A)_{z_1}+\omega_{x_1}(y_1-m)-\omega_{y_1}(x_1-l). \end{aligned}\right\} \quad (22.3)$$

Din formula (22.2) vom avea:

$$\bar{i}_1a_{x_1}+\bar{j}_1a_{y_1}+\bar{k}_1a_{z_1}= =\bar{i}_1(a_A)_{x_1}+\bar{i}_1(a_A)_{y_1}+\bar{k}_1(a_A)_{z_1}+\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \frac{d\omega_{x_1}}{dt} & \frac{d\omega_{y_1}}{dt} & \frac{d\omega_{z_1}}{dt} \\ x_1-l & y_1-m & z_1-n \end{vmatrix}+$$

$$+[\omega_{x_1}(x_1-l)+\omega_{y_1}(y_1-m)+\omega_{z_1}(z_1-n)](\bar{i}_1\omega_{x_1}+\bar{j}_1\omega_{y_1}+\bar{k}_1\omega_{z_1})-$$

$$-\omega^2[\bar{i}_1(x_1-l)+\bar{j}_1(y_1-m)+\bar{k}_1(z_1-n)];$$

de aici vom obţine pentru proiecţiile acceleraţiei pe axele fixe de coordonate, următoarele formule:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{x_1}&=(a_A)_{x_1}+\frac{d\omega_{x_1}}{dt}(z_1-n)-\frac{d\omega_{z_1}}{dt}(y_1-m)+\\
&+[\omega_{x_1}(x_1-l)+\omega_{y_1}(y_1-m)+\omega_{z_1}(z_1-n)]\,\omega_{x_1}-\omega^2(x_1-l),\\
a_{y_1}&=(a_A)_{y_1}+\frac{d\omega_{z_1}}{dt}(x_1-l)-\frac{d\omega_{x_1}}{dt}(z_1-n)+\\
&+[\omega_{x_1}(x_1-l)+\omega_{y_1}(y_1-m)+\omega_{z_1}(z_1-n)]\,\omega_{y_1}-\omega^2(y_1-m),\\
a_{z_1}&=(a_A)_{z_1}+\frac{d\omega_{x_1}}{dt}(y_1-m)-\frac{d\omega_{y_1}}{dt}(x_1-l)+\\
&+[\omega_{x_1}(x_1-l)+\omega_{y_1}(y_1-m)+\omega_{z_1}(z_1-n)]\,\omega_{z_1}-\omega^2(z_1-n).
\end{aligned}
\right\}
\tag{22.4}
$$

Trecînd la axele mobile de coordonate $Axyz$, vom nota prin (x, y, z) coordonatele punctului B şi prin $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vectorii unitari ai axelor mobile de coordonate. Deoarece:

$$\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z,$$

vom obţine din formulele (22.1):

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y+\bar{k}v_z=\bar{i}(v_A)_x+\bar{j}(v_A)_y+\bar{k}(v_A)_z+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

sau

$$
\left.
\begin{aligned}
v_x&=(v_A)_x+\omega_y z-\omega_z y,\\
v_y&=(v_A)_y+\omega_z x-\omega_x z,\\
v_z&=(v_A)_z+\omega_z y-\omega_y x.
\end{aligned}
\right\}
\tag{22.5}
$$

La calculul proiecţiilor acceleraţiei $\bar{a}$ pe axele mobile de coordonate, este necesar să se ţină seamă că:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{i}\frac{d\omega_x}{dt}+\bar{j}\frac{d\omega_y}{dt}+\bar{k}\frac{d\omega_z}{dt},$$

deşi vectorii unitari $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vor fi şi ei funcţii de timp; aceasta s-a

demonstrat în § 88, cu ocazia deducerii formulei (20.12). Ţinînd seamă de acestea, vom obţine:

$$\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z=\bar{i}(a_A)_x+\bar{j}(a_A)_y+\bar{k}(a_A)_z+\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{d\omega_x}{dt} & \frac{d\omega_y}{dt} & \frac{d\omega_z}{dt} \\ x & y & z \end{vmatrix}+$$

$$+(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)(\bar{i}\omega_x+\bar{j}\omega_y+\bar{k}\omega_z)-\omega^2(\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z),$$

sau

$$\left.\begin{aligned} a_x&=(a_A)_x+\frac{d\omega_y}{dt}z-\frac{d\omega_z}{dt}y+(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)\omega_x-\omega^2 x,\\ a_y&=(a_A)_y+\frac{d\omega_z}{dt}x-\frac{d\omega_x}{dt}z+(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)\omega_y-\omega^2 y,\\ a_z&=(a_A)_z+\frac{d\omega_x}{dt}y-\frac{d\omega_y}{dt}x+(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)\omega_z-\omega^2 z. \end{aligned}\right\} \quad (22.6)$$

Observaţie. La deducţia unei serii de formule din acest paragraf şi din paragrafele precedente, găseam proiecţiile unuia şi aceluiaşi vector pe axele a două sisteme de coordonate — fix şi mobil. Nu este greu de dovedit că, cunoscînd proiecţiile unui vector oarecare, de exemplu, pe axele fixe de coordonate $O_1x_1y_1z_1$, se pot găsi proiecţiile acestui vector pe axele mobile de coordonate $Axyz$ în funcţie de cosinuşii unghiurilor dintre axele de coordonate. Vom nota prin α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', cei nouă cosinuşi ai unghiurilor dintre axele de coordonate, conform tabelei cunoscute din geometria analitică:

	O_1x_1	O_1y_1	O_1z_1
Ax	α	β	γ
Ay	α'	β'	γ'
Az	α''	β''	γ''

Proiecţiile vectorilor unitari $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ai axelor Ax, Ay, Az, pe axele fixe $O_1x_1y_1z_1$ sînt:

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}&=\bar{i}_1\alpha+\bar{j}_1\beta+\bar{k}_1\gamma,\\ \bar{j}&=\bar{i}_1\alpha'+\bar{j}_1\beta'+\bar{k}_1\gamma',\\ \bar{k}&=\bar{i}_1\alpha''+\bar{j}_1\beta''+\bar{k}_1\gamma''. \end{aligned}\right\} \quad (22.7)$$

Proiecţiile vectorului $\overline{v}$ pe axele $Axyz$ vor fi:

$$\left.\begin{aligned}v_x&=v\cos(\widehat{\overline{v}, Ax})=v\cos(\widehat{\overline{v}, \overline{i}})=\overline{v}\cdot\overline{i}=v_{x_1}\alpha+v_{y_1}\beta+v_{z_1}\gamma,\\ v_y&=v\cos(\widehat{\overline{v}, Ay})=v\cos(\widehat{\overline{v}, \overline{j}})=\overline{v}\cdot\overline{j}=v_{x_1}\alpha'+v_{y_1}\beta'+v_{z_1}\gamma',\\ v_z&=v\cos(\widehat{\overline{v}, Az})=v\cos(\widehat{\overline{v}, \overline{k}})=\overline{v}\cdot\overline{k}=v_{x_1}\alpha''+v_{y_1}\beta''+v_{z_1}\gamma''.\end{aligned}\right\}\quad(22{,}8)$$

In acelaşi mod proiecţiile vectorului $\overline{a}$ pe axele $Axyz$, vor avea următoarele expresii:

$$\left.\begin{aligned}a_x&=a_{x_1}\alpha+a_{y_1}\beta+a_{z_1}\gamma,\\ a_y&=a_{x_1}\alpha'+a_{y_1}\beta'+a_{z_1}\gamma',\\ a_z&=a_{x_1}\alpha''+a_{y_1}\beta''+a_{z_1}\gamma''.\end{aligned}\right\}\quad(22.9)$$

Vedem că am putea, cunoscînd, de exemplu, proiecţiile a_{x_1}, a_{y_1}, a_{z_1}, din formulele (22.4), să obţinem proiecţiile a_x, a_y şi a_z nu pe calea pe care le-am obţinut pînă acum, ci prin folosirea formulelor (22.9), care ar fi însă o cale mult mai dificilă.

Cu toate acestea, în acest fel trebuie procedat în majoritatea cazurilor la calculul proiecţiilor vitezei şi acceleraţiei punctului A pe axele mobile de coordonate $Axyz$ prin folosirea formulelor (22.5) şi (22.6). In adevăr, aceste proiecţii pe axele fixe de coordonate $O_1x_1y_1z_1$, se vor obţine direct prin diferenţiere, şi anume:

$$(v_A)_{x_1}=\frac{dl}{dt},\quad (v_A)_{y_1}=\frac{dm}{dt},\quad (v_A)_{z_1}=\frac{dn}{dt};$$
$$(a_A)_{x_1}=\frac{d^2l}{dt^2},\quad (a_A)_{y_1}=\frac{d^2m}{dt^2},\quad (a_A)_{z_1}=\frac{d^2n}{dt^2}.$$

De aici vom obţine, folosind formulele (22.8) şi (22.9), proiecţiile $(v_A)_x$, $(v_A)_y$, $(v_A)_z$, $(a_A)_x$, $(a_A)_y$, $(a_A)_z$, pe care le vom introduce în formulele (22.5) şi (22.6).

§ 100. Exemple. 73. Un solid execută două mişcări elicoidale. Axa elicoidală instantanee a primei mişcări coincide, în momentul considerat, cu axa fixă O_1x_1, iar axa elicoidală a celei de-a doua mişcări, coincide în acelaşi moment cu axa fixă O_1y_1. Prima mişcare are viteza unghiulară $\overline{\omega_1}$ şi parametrul p_1, iar a doua mişcare are viteza unghiulară $\overline{\omega_2}$ şi parametrul p_2. Să se găsească rototranslaţia rezultantă.

Notînd vitezele mişcărilor de translaţie în prima şi a doua rototranslaţie prin $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$, vom avea:

$$\overline{v}_1=p_1\overline{\omega}_1,\quad \overline{v}_2=p_2\overline{\omega}_2.$$

Vom scrie ecuațiile axei centrale a sistemului, după formulele (21.10). Deoarece avem:

$$v_{x1}=v_1, \quad v_{y1}=v_2, \quad v_{z1}=0,$$

$$\omega_{x1}=\omega_1, \quad \omega_{y1}=\omega_2, \quad \omega_{z1}=0,$$

urmează că ecuațiile axei centrale, vor avea forma:

$$\frac{v_1+z_1'\,\omega_2}{\omega_1}=\frac{v_2-z_1'\,\omega_1}{\omega_2}=\frac{y_1'\,\omega_1-x_1'\,\omega_2}{3}.$$

De aici găsim:

$$z_1'=\frac{v_2\,\omega_1-v_1\,\omega_2}{\omega_1^2+\omega_2^2}=(p_2-p_1)\frac{\omega_1\,\omega_2}{\omega_1^2+\omega_2^2}.$$

$$y_1'=\frac{\omega_2}{\omega_1}x_1'.$$

Vedem că rototranslația rezultantă are axa mișcării elicoidale instantanee paralelă cu planul $O_1x_1y_1$, distanța între axă și plan fiind egală cu z'_1, axa fiind așezată în planul $y_1'=\frac{\omega_2}{\omega_1}x_1'$. Viteza unghiulară instantanee este egală cu

$$\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}.$$

Cît privește viteza instantanee de translație, valoarea ei se determină prin formula:

$$v^2=(v_1+z_1'\,\omega_2)^2+(v_2-z_1'\,\omega_1)^2,$$

sau

$$v^2=v_1^2+v_2^2+z_1'^2\,(\omega_1^2+\omega_2^2)+2\,z_1'(v_1\,\omega_2-v_2\,\omega_1).$$

De aici vom avea:

$$v^2=v_1^2+v_2^2+(p_2-p_1)^2\frac{\omega_1^2\,\omega_2^2}{\omega_1^2+\omega_2^2}+2\,(p_2-p_1)\frac{\omega_1\,\omega_2}{\omega_1^2+\omega_2^2}(p_1-p_2)\,\omega_1\omega_2,$$

adică

$$v^2=v_1^2+v_2^2-(p_2-p_1)^2\frac{\omega_1^2\,\omega_2^2}{\omega_1^2+\omega_2^2}.$$

74. Să se găsească proiecțiile pe axele de coordonate fixe și pe cele mobile ale vitezelor și accelerațiilor punctelor unui solid aflat în mișcare elicoidală; axa mișcării elicoidale coincide cu axa fixă O_1z_1. Să examinăm sistemul fix de axe de coordonate $O_1x_1y_1z_1$ și sistemul mobil de axe de coordonate $Axyz$, la care punctul A rămîne pe axa O_1z_1. Fie $(O,\ O,\ c)$ coordonatele punctului A. Avem:

$$(v_A)_{x1}=0, \quad (v_A)_{y1}=0, \quad (v_A)_{z1}=v,$$

$$(a_A)_{x1}=0, \quad (a_A)_{y1}=0, \quad (a_A)_{z1}=a,$$

$$\omega_{x1}=\omega_x=0, \quad \omega_{y1}=\omega_y=0, \quad \omega_{z1}=\omega_z=\omega.$$

Notînd coordonatele unui punct oarecare B al solidului în raport cu axele $O_1x_1y_1z_1$ prin (x_1, y_1, z_1), din formulele (22.3) vom avea:

$$v_{x1} = -\omega y_1, \quad v_{y1} = \omega x_1, \quad v_{z1} = v,$$

iar din formulele (22.4), vom obţine:

$$a_{x1} = -\frac{d\omega}{dt} y_1 - \omega^2 x_1, \quad a_{y1} = \frac{d\omega}{dt} x_1 - \omega^2 y_1, \quad a_{z1} = a$$

Prin urmare, pătratul vitezei punctului B va fi:

$$v^2 + \omega^2 (x_1^2 + y_1^2),$$

iar pătratul acceleraţiei punctului B va fi:

$$\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4\right](x_1^2 + y_1^2) + a^2.$$

Aplicînd formulele (22.5) şi (22.6), vom găsi:

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = v$$

şi

$$a_x = -\frac{d\omega}{dt} y - \omega^2 x, \quad a_y = \frac{d\omega}{dt} x - \omega^2 y, \quad a_z = a.$$

Pentru pătratul vitezei şi pătratul acceleraţiei punctului B în axele mobile de coordonate considerate vom avea:

$$v^2 + \omega^2 (x^2 + y^2), \left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4\right](x^2 + y^2) + a^2.$$

Evident, că:

$$v = \frac{dc}{dt}, \quad a = \frac{d^2c}{dt^2}.$$

CAPITOLUL XXIII

VITEZA ȘI ACCELERAȚIA UNUI PUNCT ÎN MIȘCARE RELATIVĂ. AXE MOBILE DE COORDONATE

§ 101. Observații generale. În capitolele precedente am examinat mai multe cazuri în care punctul se mișcă în raport cu sistemul mobil de referință, care se mișcă și el în raport cu un sistem de referință fix. Pentru prima dată ne-am întîlnit cu acest caz la sfîrșitul § 64; apoi ne-am ocupat de el în §§ 66, 70, 90 etc. Am demonstrat și geometric și analitic regula paralelogramului vitezelor, din care rezultă că viteza mișcării compuse este suma vectorială a vitezelor mișcărilor componente. În acest capitol, vom adînci puțin problema obținerii vitezei mișcării compuse și vom studia amănunțit problema obținerii accelerației mișcării compuse; această din urmă problemă prezintă oarecare particularități al căror caracter a fost deja indicat în § 70. Deși numărul mișcărilor componente poate fi oarecare, totuși este suficient să se studieze mișcarea compusă formată din două mișcări componente, ca să avem apoi posibilitatea să rezolvăm problemele cu orice număr de mișcări componente. De aceea, vom studia în acest capitol numai cazul a două mișcări componente, iar în acest caz una din mișcările componente va fi *relativă*, iar cealaltă va fi o mișcare de *transport*. De exemplu, dacă punctul B se mișcă în sistemul S, iar sistemul S este de asemenea în mișcare, atunci mișcarea sistemului S va fi de transport, iar mișcarea punctului B în raport cu sistemul S va fi mișcare relativă.

În capitolele precedente ale cinematicii am studiat vitezele și accelerațiile, atît pentru puncte izolate cît și pentru punctele unui solid, și am găsit proiecțiile acestor viteze și accelerații, atît pe axele fixe de coordonate, cît și pe axele de coordonate mobile, dar aceste axe de coordonate mobile nu au avut mișcări arbitrare. Astfel, în cazul unui sistem de coordonate polare (§ 67, 71) și al triedrului fundamental (§ 72), mișcarea de translație a acestor axe de coordonate mobile și mișcarea lor de rotație se

determină complet prin caracterul traiectoriei punctului și prin mișcarea punctului pe această traiectorie, iar punctul mobil se găsește totdeauna în originea coordonatelor. In cazul studierii mișcării punctelor unui solid, axele de coordonate erau invariabil legate de solidul în mișcare, și de aceea, punctele solidului aveau coordonate constante în raport cu aceste axe. Totuși, trebuie lucrat și cu sisteme de coordonate mobile, în raport cu care punctele se deplasează singure, adică au în raport cu axele acestor sisteme, viteze și accelerații. In acest caz, mișcarea punctului poate fi privită ca o mișcare compusă, care constă din mișcarea de transport pe care ar avea-o punctul dacă l-am considera solidar legat de axele de coordonate mobile, și mișcarea relativă pe care o are punctul în raport cu axele mobile, considerate fixe. In acest fel, problema introducerii axelor de coordonate mobile nu este altceva decît problema mișcării compuse a punctului; din această cauză, capitolul de față poate fi denumit compunerea mișcărilor sau mișcarea relativă.

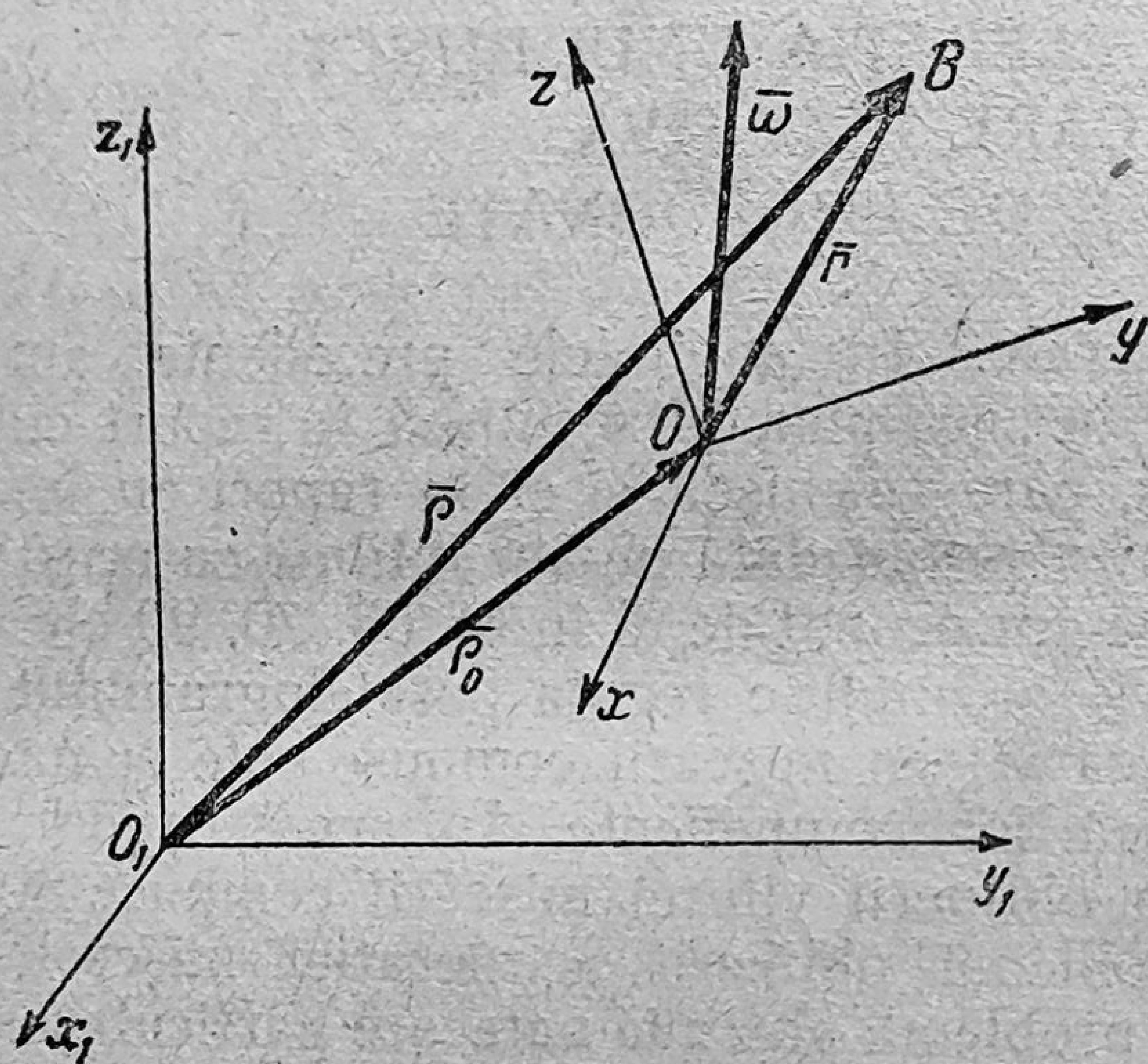


Fig. 217

§ 102. Viteza unui punct în mișcare absolută. Fie dat sistemul $O_1x_1y_1z_1$ de axe de coordonate fixe și sistemul $Oxyz$ de axe de coordonate mobile. Mișcarea axelor $Oxyz$ în orice moment se determină prin viteza $\bar{v}_0$ a originii lor O și prin viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a axelor mobile în jurul axei instantanee Δ, care trece prin punctul O. Să examinăm un punct oarecare B, care are o mișcare arbitrară; ducem vectorii (fig. 217):

$$\overline{O_1B}=\bar{\rho}, \quad \overline{O_1O}=\bar{\rho}_0, \quad \overline{OB}=\bar{r}.$$

Avem:

$$\bar{\rho}=\bar{\rho}_0+\bar{r}.$$

Pentru a găsi viteza punctului B, vom deriva vectorial în raport cu timpul ambele părţi ale acestei relaţii; vom obţine:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt}=\frac{d\bar{\rho}_0}{dt}+\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Dar derivata $\frac{d\bar{\rho}}{dt}$ reprezintă viteza $\bar{v}$ a punctului B în mişcarea compusă, derivata $\frac{d\bar{\rho}_0}{dt}$ reprezintă viteza $\bar{v}_0$ a originii O a coordonatelor $Oxyz$ în raport cu sistemul $O_1x_1y_1z_1$; de aceea vom avea:

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Pentru a descoperi semnificaţia derivatei $\frac{d\bar{r}}{dt}$, vom introduce coordonatele (x, y, z) ale punctului B, în raport cu axele de coordonate mobile $Oxyz$. Deoarece:

$$\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z,$$

unde $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sînt vectorii unitari ai axelor de coordonate mobile, atunci vom avea:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}+\frac{d\bar{i}}{dt}x+\frac{d\bar{j}}{dt}y+\frac{d\bar{k}}{dt}z.$$

Aplicînd formula (20.11), vom obţine:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}+(\bar{\omega}\times\bar{i})x+(\bar{\omega}+\bar{j})y\times(\bar{\omega}\times\bar{k})z,$$

sau:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}+\bar{\omega}\times(\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z),$$

adică

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Introducem notaţiile:

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}=\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}. \qquad (23.1)$$

Vectorul $\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$ se numeşte *derivata locală* a vectorului $\bar{r}$. Vom avea:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{r}. \qquad (23.2)$$

În acest fel, vom obține:

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}+\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}. \tag{23.3}$$

Nu este greu de interpretat această expresie. Primii doi termeni sînt identici cu formula (22.1), adică ei reprezintă viteza punctului B, în ipoteza că punctul B este solidar legat cu axele de coordonate mobile; astfel, acești doi termeni reprezintă viteza de transport $\bar{v}_{tr}$ a punctului B. Ultimul termen al formulei (23.3) reprezintă viteza punctului B în raport cu axele $Oxyz$, care se consideră fixe, adică acest termen reprezintă viteza relativă $\bar{v}_{rel}$ a punctului B. În acest fel, avem:

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_{tr}&=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r},\\ \bar{v}_{rel}&=\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt},\\ \bar{v}&=\bar{v}_{tr}+\bar{v}_{rel}. \end{aligned}\right\} \tag{23.4}$$

Pentru a găsi proiecțiile vitezei $\bar{v}$ pe axele de coordonate mobile $Oxyz$, vom introduce vectorii unitari $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$; din formula (23.3) vom obține următoarea expresie:

$$\bar{i}v_x+\bar{j}v_y+\bar{k}v_z=\bar{i}(v_0)_x+\bar{j}(v_0)_y+\bar{k}(v_0)_z+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}+$$

$$+\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}.$$

Egalînd între ei coeficienții acelorași vectori unitari din partea dreaptă și stîngă a ultimei expresii, vom ajunge la formulele căutate:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=(v_0)_x+\omega_y z-\omega_z y+\frac{dx}{dt},\\ v_y&=(v_0)_y+\omega_z x-\omega_x z+\frac{dy}{dt},\\ v_z&=(v_0)_z+\omega_x y-\omega_y x+\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{23.5}$$

Conform celor indicate în paragraful precedent, aceste formule (23.5) rezolvînd problema proiecțiilor vitezelor mișcării compuse a punctului, rezolvă totodată și problema găsirii proiecțiilor vitezei punctului pe axele de coordonate mobile.

§ 103. Accelerația unui punct în mișcare absolută. Ca să obținem accelerația a a punctului în mișcare absolută, vom deriva vectorial în raport cu timpul ambele părți ale ultimei formule (23.4). Vom obține:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}+\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt}.$$

La calculul derivatelor $\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}$ și $\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt}$ vom întîlni acea particularitate despre care s-a vorbit în § 70; și anume, deoarece viteza mișcării relative influențează asupra variației vitezei de transport a punctului și viteza mișcării de transport influențează asupra variației vitezei relative a punctului, suma derivatelor vectoriale ale vitezelor de transport și relativă, va fi egală nu numai cu suma accelerațiilor datorită mișcării de transport și mișcării relative, ci, la această sumă de două accelerații, în general trebuie să se adauge și o a treia accelerație suplimentară, care se numește *accelerația lui Coriolis* (1792—1843). Pentru a lămuri mai bine această problemă, vom calcula accelerația unui punct, mai întîi pentru următorul caz particular foarte simplu al mișcării sale absolute.

Presupunem că în planul π se află semidreapta Δ care trece printr-un punct fix O al acestui plan π, iar această semidreaptă Δ se rotește în planul π în jurul punctului O cu viteza unghiulară constantă ω. Pe semidreapta Δ se află punctul material B, care are o mișcare accelerată față de semidreapta Δ îndepărtîndu-se de punctul O. Notăm prin r distanța dintre punctul B și punctul O. Dacă punctul B va fi fixat pe semidreapta Δ atunci punctul B va descrie în mișcare uniformă un cerc cu raza egală cu r, și cu centrul în punctul O; aceasta este mișcarea instantanee de transport a punctului B. În orice moment t punctul B în această mișcare de transport, va avea viteza $v_{tr}=r\omega$ și accelerația $a_{tr}=r\omega^2$, dirijată către punctul O (§ 73). Dacă rotația semidreptei Δ încetează și se lasă punctul B să se miște de-a lungul acestei semidrepte, atunci punctul B va avea o mișcare relativă; în orice moment t, în această mișcare relativă, punctul B va avea viteza $v_{rel}=v$ și accelerația $a_{rel}=\frac{dv}{dt}$, dirijată de-a lungul semidreptei Δ dinspre punctul O. Dacă, însă, concomitent semidreapta Δ se va roti, iar punctul B se va mișca de-a lungul semidreptei Δ, atunci punctul B va participa la o mișcare com-

pusă și, în acest caz, afară de accelerațiile $a_{tr}=r\omega^2$ și $a_{rel}=\frac{dv}{dt}$, punctul B va avea și o accelerație Coriolis. În adevăr, să presupunem că în momentul t, punctul B se află în B_1, iar în momentul $t+\Delta t$, punctul B se află în B_2, așa cum se vede în fig. 218. Pentru a găsi creșterea vitezei relative în mișcarea compusă, vom muta vectorii viteză relativă $\bar{v}_{rel}$ și $\bar{v}'_{rel}$ corespunzători momentelor t și $t+\Delta t$ în punctul comun K. Din fig. 219, *a*, se vede că vectorul $\bar{v}'_{rel}$ se obține din vectorul $\bar{v}_{rel}$ prin două creșteri geometrice $v\Delta\Theta$ și Δv. Împărțind aceste creșteri cu Δt și trecînd la limită, vom obține doi vectori: $v\frac{d\Theta}{dt}=v\omega$ și $\frac{dv}{dt}$, vectorul $v\omega$ este dirijat perpendicular pe semidreapta Δ iar vectorul $\frac{dv}{dt}$ este dirijat de-a lungul acestei semidrepte; evident, că mărimea $\frac{dv}{dt}$ este accelerația relativă a_{rel} a punctului B. Pentru a găsi creșterea vitezei de transport în mișcarea compusă, vom muta vectorii viteză de transport v_{tr} și v'_{tr}, corespunzători momentelor t și $t+\Delta t$, în punctul comun K. Din fig. 219, *b*, se vede că vectorul v'_{tr} se obține din vectorul v_{tr}, prin două creșteri geometrice $r\omega\Delta\Theta$ și $\Delta r\omega$. Împărțind aceste creșteri cu Δt și trecînd la limită, vom obține doi vectori: $r\omega\frac{d\Theta}{dt}=r\omega^2$ și $\frac{dr}{dt}\omega=v\omega$, dintre care vec-

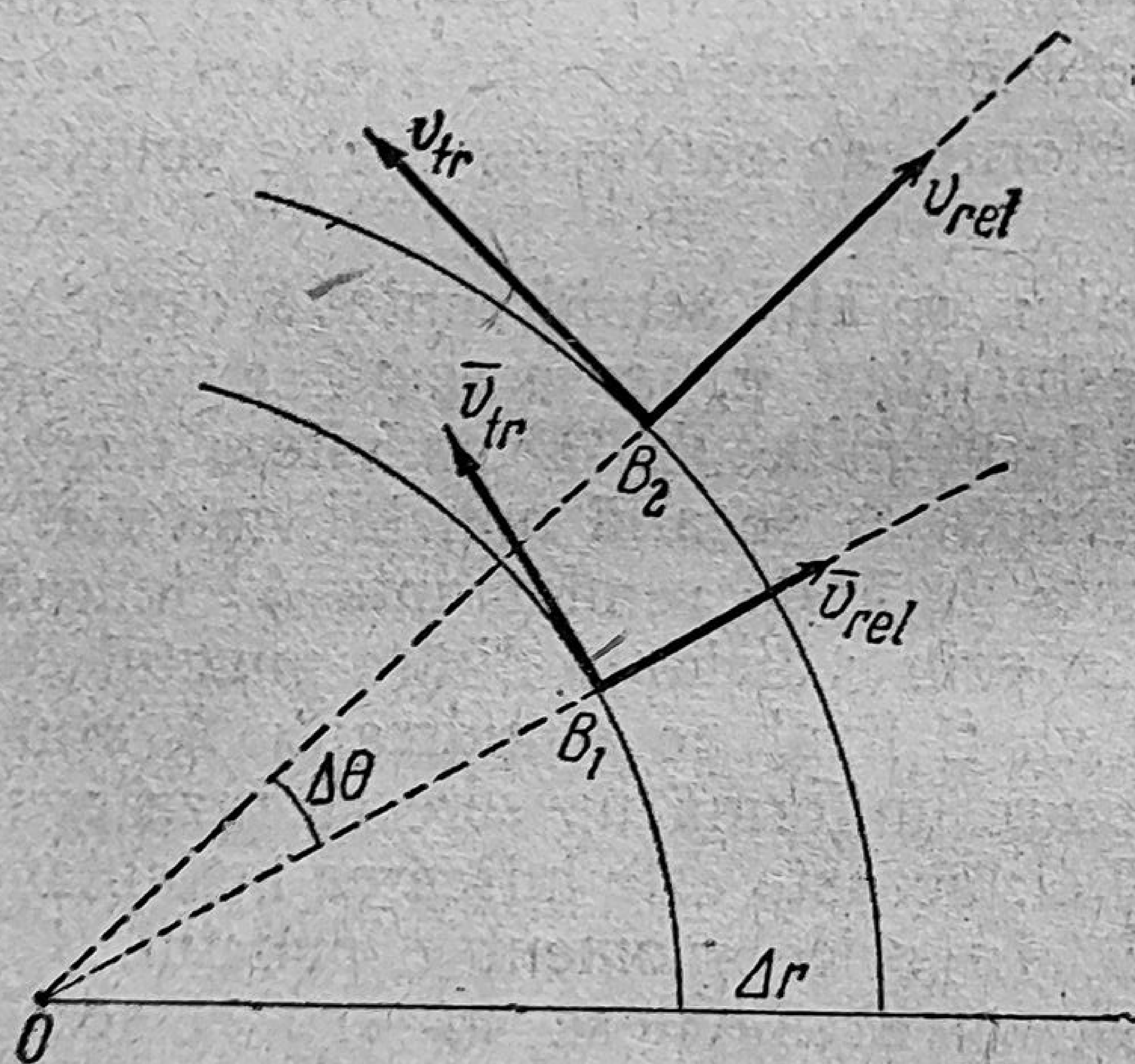


Fig. 218

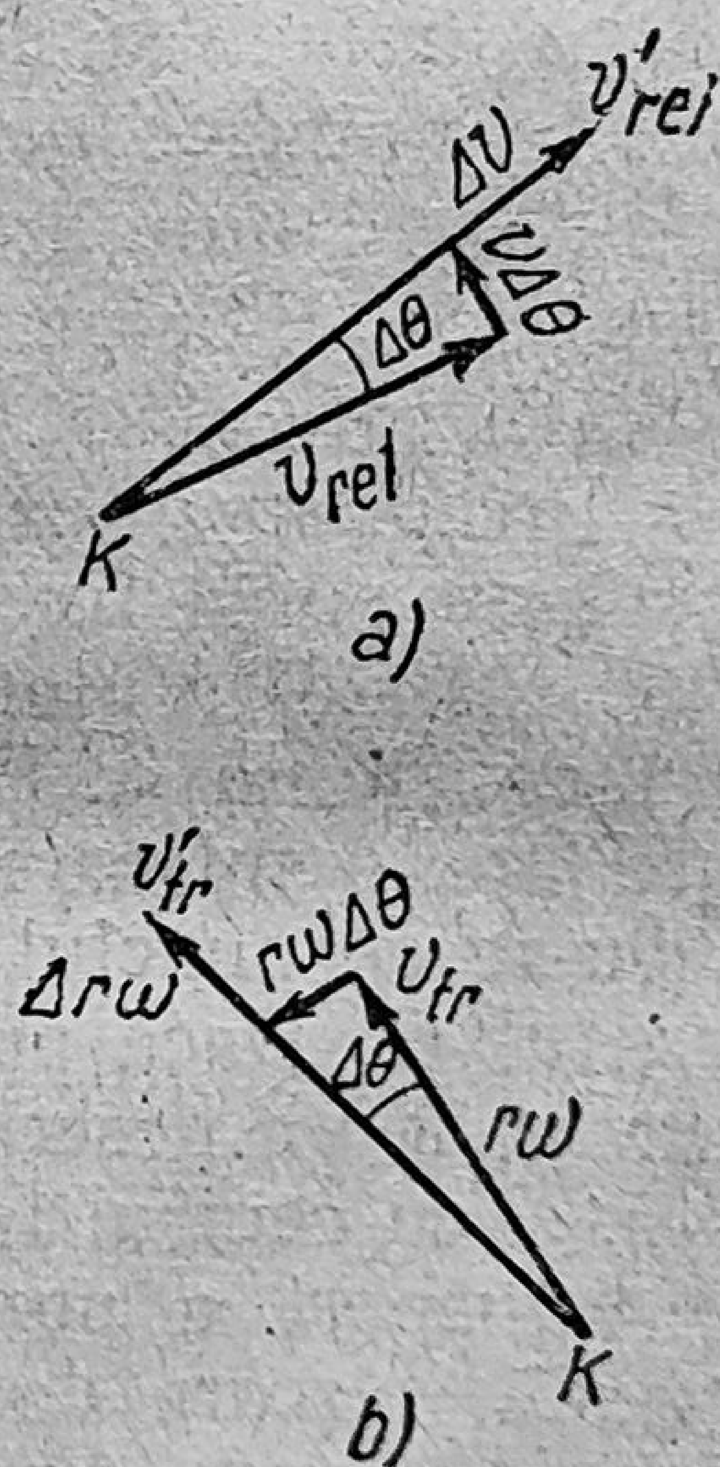


Fig. 219

torul $r\omega^2$ este dirijat de-a lungul semidreptei Δ spre punctul O, iar vectorul $v\omega$ este drijat perpendicular pe semidreapta Δ; este evident, că mărimea $r\omega^2$ este accelerația de transport. În acest fel, în cazul considerat al mișcării absolute punctului B, afară de accelerațiile $a_{tr}=r\omega^2$ și $a_{rel}=\frac{dv}{dt}$ îi mai apar încă două accelerații egale între ele ca mărime, direcție și sens, ωv, una datorită vitezei relative și cealaltă datorită vitezei de transport, suma acestor accelerații dau o accelerație complimentară $2\omega v$; aceasta este accelerația lui Coriolis. Prin urmare, accelerația $\bar{a}$ a punctului considerat este suma geometrică a trei accelerații: de transport, relativă și a lui Coriolis, adică:

$$\bar{a}=\bar{a}_{tr}+\bar{a}_{rel}+\bar{a}_{cor}.$$

Prima accelerație este dirijată de-a lungul lui Δ spre punctul O, a doua accelerație este dirijată de-a lungul lui Δ dinspre punctul O, a treia accelerație este dirijată perpendicular pe Δ în sensul de rotire al acestei semidrepte.

După cazul particular cercetat, să trecem la deducția formulei generale, a accelerației punctului în mișcare absolută. La începutul paragrafului de față am dedus formula:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}+\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt};$$

să calculăm ambele derivate ale părții din dreapta, bazîndu-ne pe primele două formule (23.4) și pe formula (23.2). Repetînd raționamentele de la deducția formulei (23.2), vom obține ușor:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}&=\frac{\tilde{d}\bar{v}_{tr}}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{v}_{tr},\\ \frac{d\bar{v}_{rel}}{dt}&=\frac{\tilde{d}\bar{v}_{rel}}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}. \end{aligned}\right\} \qquad (23.6)$$

Deoarece conform primei formule (23.4) avem $\bar{v}_{tr}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}$, rezultă că:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}=\frac{\tilde{d}\bar{v}_0}{dt}+\frac{\tilde{d}(\bar{\omega}\times\bar{r})}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{v}_0+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}).$$

Dar fie din formula (20.12), fie din formula (23.2), unde se consideră $r=\omega$, rezultă că derivata locală a vectorului viteză

unghiulară $\bar{\omega}$, este egală cu derivata totală; de aceea, aplicînd și formula (18.12), vom obține:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}=\frac{\tilde{d}\bar{v}_0}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{v}_0+\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}+(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\bar{\omega}-\omega^2\bar{r}.$$

Suma $\frac{\tilde{d}\bar{v}_0}{dt}+\omega\times v_0$ nu este altceva decît expresia dezvoltată a derivatei totale $\frac{d\bar{v}_0}{dt}$, care reprezintă accelerația $\bar{a}_0$ a punctului O; derivata locală $\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$ reprezintă viteza relativă $\bar{v}_{rel}$ a punctului B. Prin urmare, relația precedentă, mai poate fi prezentată și astfel:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}=\bar{a}_0+\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\bar{\omega}-\omega^2\bar{r}+\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}.$$

Comparînd această formulă cu formula (22.2) rezultă că primii patru termeni ai ultimei formule reprezintă accelerația punctului B, în ipoteza că punctul B este solidar legat de axele $Oxyz$, adică acești patru termeni reprezintă accelerația de transport $\bar{a}_{tr}$ a punctului B; în acest fel, avem:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}=\bar{a}_{tr}+\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}. \qquad (23.7)$$

Formula (23.7) confirmă indicația dată mai înainte că variația vitezei de transport a punctului, depinde, în general, și de viteza mișcării relative.

Folosind formula a doua (23.6) și observînd că din formula a doua (23.4) avem $\bar{v}_{rel}=\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$, vom obține:

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt}=\frac{\tilde{d}^2\bar{r}}{dt^2}+\bar{\omega}\times\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}=\frac{\tilde{d}^2\bar{r}}{dt^2}+\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}.$$

Deoarece a doua derivată locală reprezintă accelerația relativă $\bar{a}_{rel}$ a punctului B, găsim:

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt}=\bar{a}_{rel}+\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}. \qquad (23.8)$$

Formula (23.8) confirmă că, așa cum s-a indicat mai sus, la variația vitezei relative a punctului, influențează de asemenea, în

general, și viteza de transport, și anume, viteza lui unghiulară. Din formulele (23.7) și (23.8) vom găsi:

$$\frac{d\bar{v}_{tr}}{dt}+\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt}=\bar{a}_{tr}+\bar{a}_{rel}+2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}.$$

In acest fel, ajungem la formula definitivă:

$$\bar{a}=\bar{a}_{tr}+\bar{a}_{rel}+\bar{a}_{cor}, \tag{23.9}$$

unde:

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_{tr}&=\frac{\tilde{d}\bar{v}_0}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{v}_0+\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\,\bar{\omega}-\omega^2\bar{r},\\ \bar{a}_{rel}&=\frac{\tilde{d}^2\bar{r}}{dt^2},\\ a_{cor}&=2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}.\end{aligned}\right\} \tag{23.10}$$

Știm că viteza v a mișcării absolute a punctului este egală cu suma vectorială a vitezei de transport și a celei relativă, adică $\bar{v}=\bar{v}_{tr}+\bar{v}_{rel}$. Vedem că, în general, pentru accelerații nu are loc o lege analogă, deoarece în afară de suma vectorială a celor doi termeni $\bar{a}_{tr}+\bar{a}_{rel}$, partea dreaptă a formulei (23.9) mai are și un al treilea termen $\bar{a}_{cor}=2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}$. Acest termen suplimentar se numește accelerația lui Coriolis. În acest fel, găsim:

Accelerația lui Coriolis este egală cu dublul produsului vectorial dintre viteza unghiulară și viteza relativă a punctului.

De aici, pentru modulul accelerației lui Coriolis, obținem:

$$\bar{a}_{cor}=2\omega v_{rel}\sin(\widehat{\bar{\omega},\bar{v}_{rel}}). \tag{23.11}$$

Pentru a cunoaște mărimea și direcția accelerației lui Coriolis, trebuie mutați în același punct vectorii viteză unghiulară $\bar{\omega}$ și viteză relativă $\bar{v}_{rel}$, trebuie determinat produsul lor vectorial și amplificat cu doi; vectorul obținut va reprezenta accelerația lui Coriolis. Este ușor de văzut că

Accelerația lui Coriolis este totdeauna dirijată în sensul de mișcare al extremității vectorului $\bar{v}_{rel}$, sub acțiunea vitezei unghiulare $\bar{\omega}$.

Evident că accelerația lui Coriolis va fi egală cu zero dacă vom avea: fie viteza unghiulară egală cu zero, fie viteza relativă a punctului egală cu zero, fie vectorul viteză relativă a punctului este paralel cu vectorul viteză unghiulară.

În acest fel, dacă punctul ia parte la două mişcări: la mişcarea de transport şi la cea relativă, atunci viteza lui se compune geometric din două viteze: de transport şi relativă, dar accelerația lui se compune în general din trei accelerații: de transport, relativă şi Coriolis.

Trecînd de la formula vectorială (23.9) la proiecțiile accelerației pe axele de coordonate mobile $Oxyz$, vom obține:

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{d(v_0)_x}{dt} + \omega_y (v_0)_z - \omega_2 (v_0)_y + \frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y + \\
&+ \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x + 2\left(\omega_y \frac{dz}{dt} - \omega_z \frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt}, \\
a_y &= \frac{d(v_0)_y}{dt} + \omega_z (v_0)_x - \omega_x (v_0)_z + \frac{d\omega_z}{dt} x - \frac{d\omega_x}{dt} z + \\
&+ \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y + 2\left(\omega_z \frac{dx}{dt} - \omega_x \frac{dz}{dt}\right) + \frac{d^2y}{dt^2}, \\
a_z &= \frac{d(v_0)_z}{dt} + \omega_x (v_0)_y - \omega_y (v_0)_x + \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x + \\
&+ \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z + 2\left(\omega_x \frac{dy}{dt} - \omega_y \frac{dx}{dt}\right) + \frac{d^2z}{dt^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (23.12)$$

Conform celor arătate la sfîrşitul § 101, formulele (23.12), rezolvînd problema proiecțiilor accelerației mişcării compuse a unui punct, rezolvă totodată şi problema aflării proiecțiilor accelerației punctului pe axele mobile de coordonate.

Formulele (23.12) se pot obține şi pe calea următoare. Avem: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$; descompunînd expresia din partea dreaptă, după formula (23.2), vom obține:

$$\bar{a} = \frac{\tilde{d}\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (23.13)$$

Deoarece:

$$\bar{a} = \bar{i} a_x + \bar{j} a_y + \bar{k} a_z, \quad \bar{v} = \bar{i} v_x + \bar{j} v_y + \bar{k} v_z, \quad \bar{\omega} = \bar{i} \omega_x + \bar{j} \omega_y + \bar{k} \omega_z,$$

vom avea:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x. \end{aligned}\right\} \qquad (23.14)$$

Este suficient să se introducă în formulele (23.14) valorile proiecţiilor vitezei din formulele (23.5), pentru a ajunge la formulele (23.12). În cazul unor probleme simple, această cale este foarte uşoară şi duce uneori mai simplu la rezultat, decît aplicarea formulelor generale (23.12).

§ 104. Folosirea axelor de coordonate, invariabil legate cu pămîntul. Pămîntul descrie în aproximativ 365,25 zile o curbă închisă în jurul soarelui, apropiată de o circumferinţă cu raza egală cu 150 000 000 km; deoarece această mişcare a pămîntului este apropiată de una uniformă, atunci în 1 s pămîntul parcurge circa 30 km. În acest fel, se poate considera că viteza pămîntului în mişcarea sa în jurul soarelui este cu aproximaţie uniformă şi egală cu circa 30 km/s. Dacă se duc tangentele la capetele arcului de cerc pe care îl descrie pămîntul în mişcarea sa în jurul soarelui în 1 s, atunci unghiul dintre aceste tangente va fi egal cu 0",041, adică drumul parcurs de pămînt în jurul soarelui într-o secundă se poate considera aproape rectilinie. Prin urmare, într-un interval mic de timp, mişcarea pămîntului în jurul soarelui se poate considera rectilinie şi uniformă. Dar din fizică, din principiul inerţiei, se ştie că peste orice mişcare se poate suprapune totdeauna o mişcare uniformă rectilinie, fără a perturba mişcarea iniţială. În acest fel, orice mişcare care se produce pe pămînt într-un interval de timp mic, se produce la fel ca şi cînd pămîntul nu s-ar mişca în jurul soarelui. Prin urmare, în orice problemă tehnică, la studiul mecanic al echilibrului şi al mişcării obiectelor materiale, putem neglija mişcarea pămîntului în jurul soarelui. Cu atît mai mult se poate neglija mişcarea soarelui, deoarece cercetările astronomice nu ne dau nici cele mai mici indicaţii asupra curburii traiectoriei soarelui în spaţiu, nici asupra neuniformităţii mişcării soarelui. În acest fel, vom lua în considerare numai rotaţia pămîntului în jurul axei sale şi vom examina expresiile vitezelor şi acceleraţiilor absolute ale punctelor în raport

vom avea:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x. \end{aligned}\right\} \qquad (23.14)$$

Este suficient să se introducă în formulele (23.14) valorile proiecţiilor vitezei din formulele (23.5), pentru a ajunge la formulele (23.12). În cazul unor probleme simple, această cale este foarte uşoară şi duce uneori mai simplu la rezultat, decît aplicarea formulelor generale (23.12).

§ 104. Folosirea axelor de coordonate, invariabil legate cu pămîntul. Pămîntul descrie în aproximativ 365,25 zile o curbă închisă în jurul soarelui, apropiată de o circumferinţă cu raza egală cu 150 000 000 km; deoarece această mişcare a pămîntului este apropiată de una uniformă, atunci în 1 s pămîntul parcurge circa 30 km. În acest fel, se poate considera că viteza pămîntului în mişcarea sa în jurul soarelui este cu aproximaţie uniformă şi egală cu circa 30 km/s. Dacă se duc tangentele la capetele arcului de cerc pe care îl descrie pămîntul în mişcarea sa în jurul soarelui în 1 s, atunci unghiul dintre aceste tangente va fi egal cu 0'',041, adică drumul parcurs de pămînt în jurul soarelui într-o secundă se poate considera aproape rectilinie. Prin urmare, într-un interval mic de timp, mişcarea pămîntului în jurul soarelui se poate considera rectilinie şi uniformă. Dar din fizică, din principiul inerţiei, se ştie că peste orice mişcare se poate suprapune totdeauna o mişcare uniformă rectilinie, fără a perturba mişcarea iniţială. În acest fel, orice mişcare care se produce pe pămînt într-un interval de timp mic, se produce la fel ca şi cînd pămîntul nu s-ar mişca în jurul soarelui. Prin urmare, în orice problemă tehnică, la studiul mecanic al echilibrului şi al mişcării obiectelor materiale, putem neglija mişcarea pămîntului în jurul soarelui. Cu atît mai mult se poate neglija mişcarea soarelui, deoarece cercetările astronomice nu ne dau nici cele mai mici indicaţii asupra curburii traiectoriei soarelui în spaţiu, nici asupra neuniformităţii mişcării soarelui. În acest fel, vom lua în considerare numai rotaţia pămîntului în jurul axei sale şi vom examina expresiile vitezelor şi acceleraţiilor absolute ale punctelor în raport

cu axele de coordonate, legate invariabil cu pămîntul, care se rotește în jurul axei sale.

Neglijînd turtirea pămîntului, îl vom considera ca o sferă, de rază $R = 6\,366\,000$ m. Deoarece pămîntul se rotește în jurul axei sale într-o zi solară, viteza unghiulară ω de rotație a pămîntului este egală cu $\omega = \frac{2\pi}{86\,164} = 0{,}00007292$ rad/s; rotația pămîntului în jurul axei se produce de la apus spre răsărit. Viteza unui punct, aflat în repaus pe suprafața pămîntului, datorită rotației pămîntului în jurul axei sale, își va modifica direcția sa într-o secundă cu 15″,04, în timp ce datorită mișcării pămîntului în jurul soarelui variația direcției vitezei într-o secundă este egală, după cum am văzut, numai cu 0″,041; în acest fel, ne putem aștepta că observînd mișcările corpurilor materiale la suprafața pămîntului, în unele cazuri va fi posibil să se observe influența rotației pămîntului în jurul axei sale, asupra acestor mișcări.

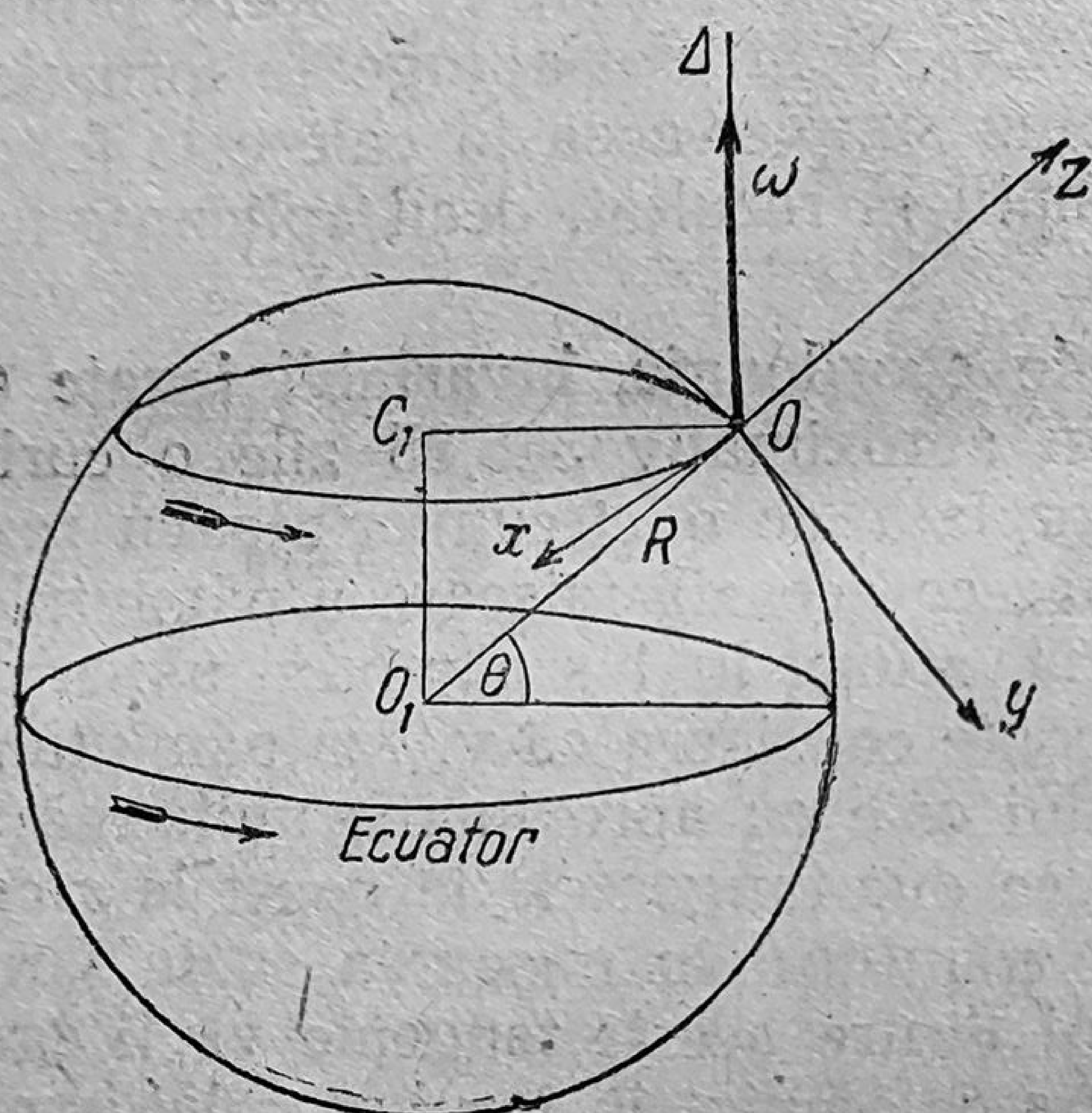


Fig. 220

Să așezăm axele de coordonate $Oxyz$ pe suprafața pămîntului în felul următor: luăm originea O a coordonatelor pe o paralelă a pămîntului corespunzătoare unei latitudini oarecari Θ. Axa Oz o vom dirija pe verticală în sus; axa Oy o vom dirija de-a lungul meridianului spre sud, iar axa Ox o vom dirija spre apus după tangenta la paralelă (fig. 220). Punctul O are viteza — egală ca modul cu $\omega \cdot C_1O$, unde C_1O este raza paralelei — și dirijată de-a lungul axei Ox în sensul absciselor negative.

Din fig. 220 avem:

$$C_1O = R\cos\theta.$$

Prin urmare, vom obține:

$$(v_0)_x = -\omega R\cos\theta,$$
$$(v_0)_y = 0,$$
$$(v_0)_z = 0.$$

Deoarece axele de coordonate $Oxyz$ se rotesc o dată cu pămîntul, rezultă că vom obține axa lor instantanee de rotație ducînd prin punctul O o dreaptă, paralelă la axa de rotație a pămîntului; pe această axă instantanee trebuie să se figureze vectorul $\bar{\omega}$ în sus, ceea ce corespunde cu rotația pămîntului de la dreapta spre stînga. Din fig. 220 vedem că vectorul $\bar{\omega}$ formează cu axa Oz un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}-\Theta$, cu axa Oy unghiul egal cu $\pi-\Theta$ iar cu axa Ox un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$. Prin urmare, vom avea:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \omega\cos\frac{\pi}{2}=0,\\ \omega_y &= \omega\cos(\pi-\theta)=-\omega\cos\theta,\\ \omega_z &= \omega\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\omega\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (23.15)$$

Din formulele (23.5) vom obține:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\omega R\cos\theta-\omega z\cos\theta-\omega y\sin\theta+\frac{dx}{dt},\\ v_y &= \omega x\sin\theta+\frac{dy}{dt},\\ v_z &= \omega x\cos\theta+\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (23.16)$$

Pentru a obține proiecțiile accelerației, ne vom folosi de formulele (20.14), cărora, ținînd seamă de formulele (23.15), li se poate da următoarea formă:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt}-\omega v_z\cos\theta-\omega v_y\sin\theta,\\ a_y &= \frac{dv_y}{dt}+\omega v_x\sin\theta,\\ a_z &= \frac{dv_z}{dt}+\omega v_x\cos\theta. \end{aligned}$$

Introducînd în aceste trei relații expresiile (23.16) pentru proiecțiile vitezei și efectuînd reducerea, vom găsi:

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{d^2x}{dt} - 2\omega\left(\cos\theta\,\frac{dz}{dt} + \sin\theta\,\frac{dy}{dt}\right) - \omega^2 x,\\
a_y &= \frac{d^2y}{dt} + 2\omega\sin\theta\,\frac{dx}{dt} - \omega^2 R\sin\theta\cos\theta - \omega^2\sin\theta(y\sin\theta + z\cos\theta),\\
a_z &= \frac{d^2z}{dt} + 2\omega\cos\theta\,\frac{dx}{dt} - \omega^2 R\cos\theta - \omega^2\cos\theta\,(y\sin\theta + z\cos\theta).
\end{aligned}\right\} \quad (23.17)$$

Presupunînd că punctul este solidar legat de axele de coordonate $Oxyz$, trebuie să considerăm constante coordonatele x, y, z, ale punctului; atunci, din formulele (23.17) vom obține proiecțiile ac-

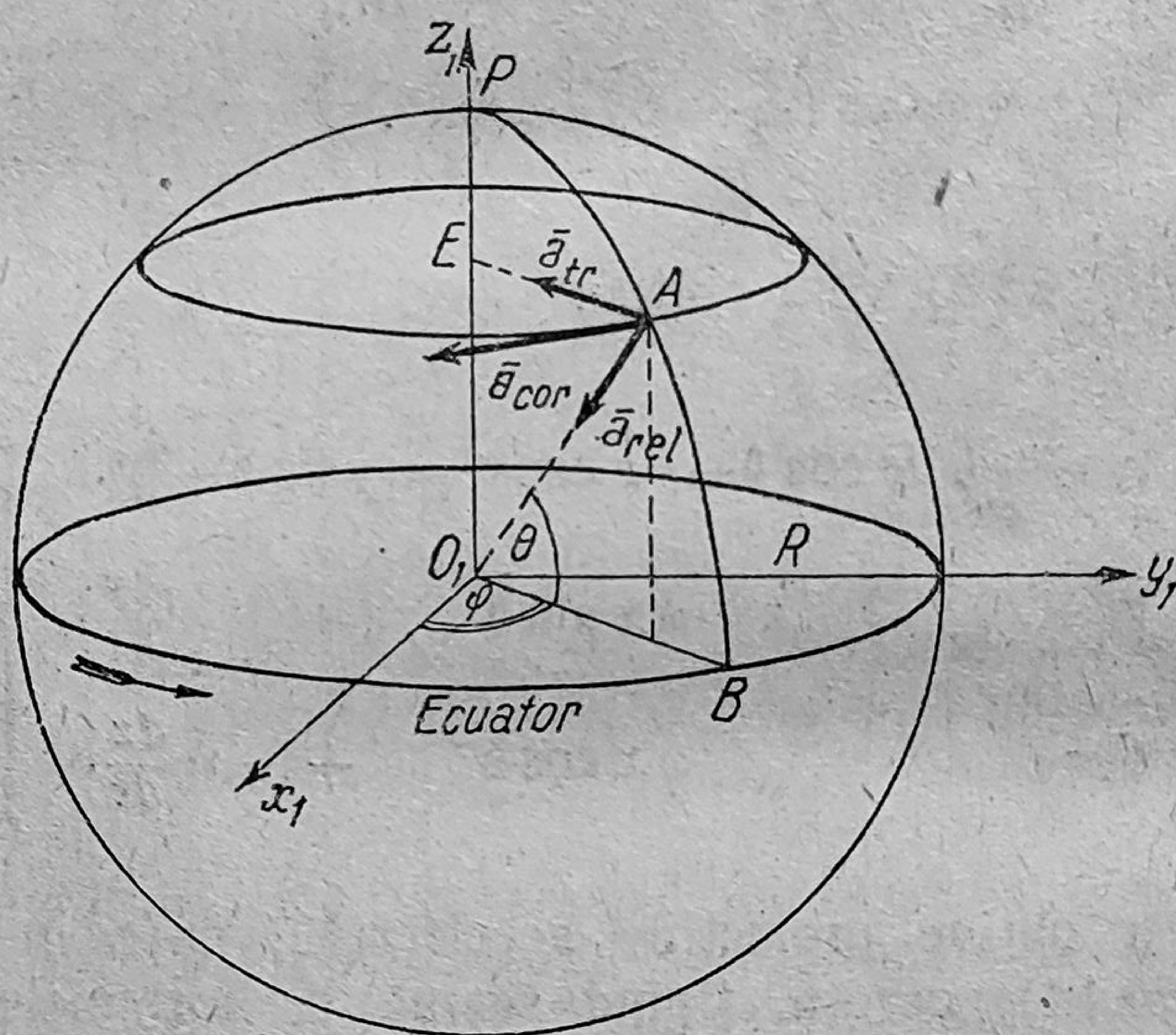


Fig. 221

celerației de transport. Presupunînd că axele de coordonate sînt fixe, trebuie să punem în formulele (23.17) $\omega = 0$; atunci din aceste formule vom obține proiecțiile accelerației relative. Părțile rămase din formula (23.17), ce au coeficientul 2, vor fi proiecțiile accelerației lui Coriolis.

Să mai examinăm și următoarea problemă referitoare la mișcarea unui punct pe suprafața pămîntului. Să presupunem, că

punctul A se mişcă uniform spre pol, de-a lungul meridianului BAP. Vom construi sistemul fix de coordonate $O_1x_1y_1z_1$ aşa cum se arată în fig. 221. Introducem coordonatele polare ale punctului A, care vor fi: R — raza pămîntului, Θ — latitudinea punctului A şi φ — longitudinea punctului A. Deoarece punctul A se mişcă uniform de-a lungul meridianului, $\Theta=\mu t$; deoarece pămîntul se roteşte uniform în jurul axei sale, avem $\varphi=\omega t$, unde ω este viteza unghiulară de rotaţie a pămîntului. Dacă punctul A nu s-ar mişca de-a lungul meridianului, atunci ar avea numai o mişcare de transport, în care punctul A ar descrie un cerc paralel cu ecuatorul cu raza $AE=R\cos\Theta$. Prin urmare, acceleraţia de transport a punctului A este egală cu $\omega^2R\cos\Theta$ şi dirijată după raza cercului paralel cu ecuatorul către centrul lui. Dacă pămîntul nu s-ar roti în jurul axei sale, şi punctul A s-ar mişca de-a lungul meridianului, punctul A ar avea o acceleraţie relativă egală cu μ^2R şi dirijată de-a lungul razei pămîntului spre centrul lui. Dacă punctul A participă la ambele mişcări, el va mai avea şi a treia acceleraţie şi anume acceleraţia lui Coriolis. Din fig. 222 se vede că unghiul format de vectorul viteză relativă al punctului A şi vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$, este egal cu latitudinea punctului A; prin urmare, modulul acceleraţiei lui Coriolis va fi egal cu $2\omega v_{rel}\sin\Theta=2\omega\mu R\sin\Theta$. Această acceleraţie este dirijată în sensul de mişcare al extremităţii vectorului $\bar{v}_{rel}$, sub acţiunea vitezei unghiulare ω adică în cazul fig. 222, perpendicular pe planul desenului, în sensul către cititor. Aceleaşi rezultate se pot obţine calculînd direct derivata a doua în raport cu timpul coordonatelor x_1 y_1, z_1 ale punctului A, faţă de sistemul axelor de coordonate fixe $O_1x_1y_1z$. Avem:

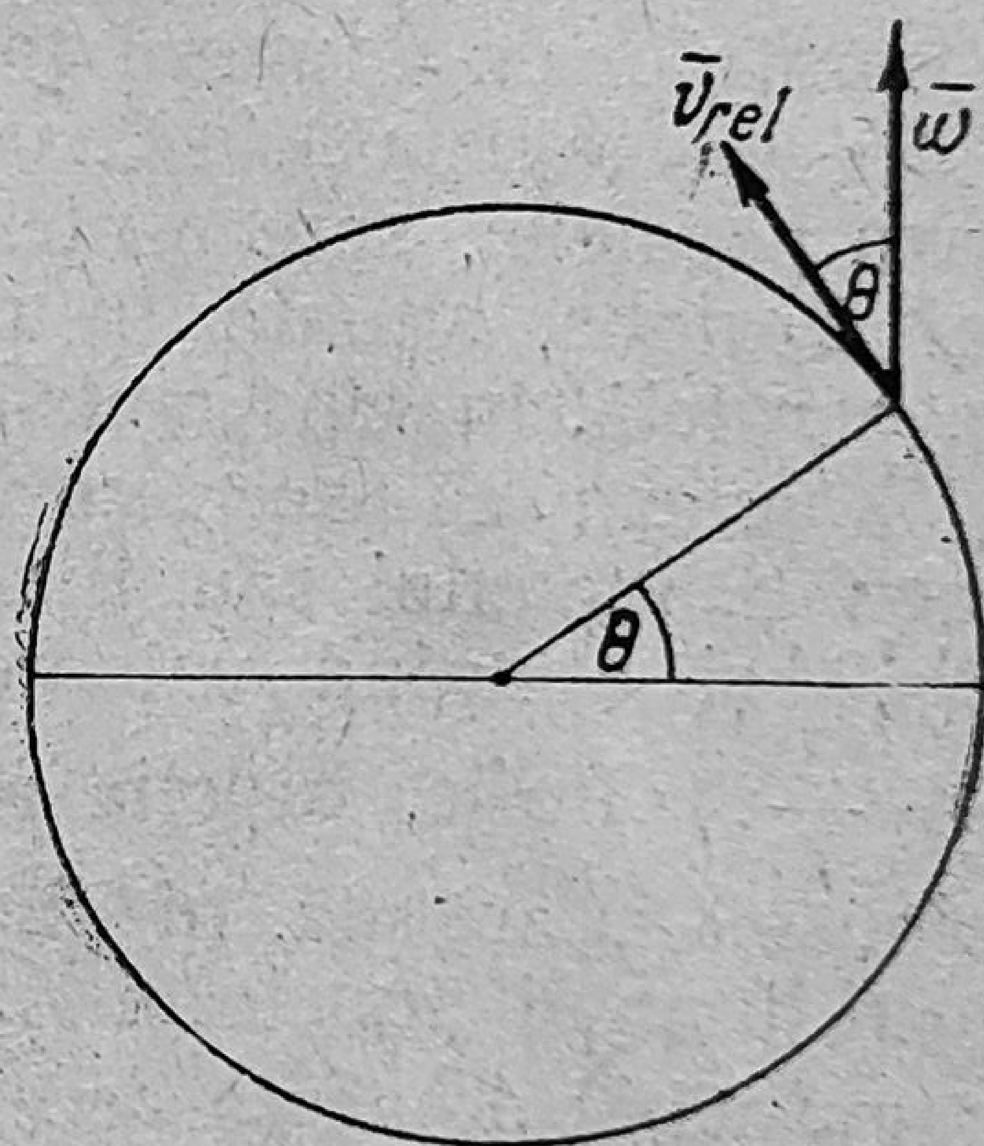


Fig. 222

$$x_1=R\cos\Theta\cos\varphi=R\cos\mu t\cos\omega t,$$

$$y_1=R\cos\Theta\sin\varphi=R\cos\mu t\sin\omega t,$$

$$z_1=R\sin\Theta=R\sin\mu t.$$

De aceea, vom avea:

$$a_{x_1}=\frac{d^2x_1}{dt^2}=-\mu^2 R\cos\Theta\cos\varphi-\omega^2 R\cos\Theta\cos\varphi+2\mu\omega R\sin\Theta\sin\varphi,$$

$$a_{y_1}=\frac{d^2y_1}{dt^2}=-\mu^2 R\cos\Theta\sin\varphi-\omega^2 R\cos\Theta\sin\varphi+2\mu\omega R\sin\Theta\cos\varphi,$$

$$a_{z_1}=\frac{d^2z_1}{dt^2}=-\mu^2 R\sin\Theta.$$

Vedem că accelerația $\bar{a}$ este suma vectorială a celor trei accelerații, care formează cu axele de coordonate $O_1x_1y_1z_1$ unghiuri, ai căror cosinuși sînt egali cu:

accelerația	O_1x_1	O_1y_1	O_1z_1
μ^2R	$-\cos\Theta\cos\varphi$	$-\cos\Theta\sin\varphi$	$-\sin\Theta$
$\omega^2R\cos\Theta$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$2\mu\omega R\sin\Theta$	$+\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	0

Prima accelerație este accelerația relativă dirijată spre centrul pămîntului de-a lungul razei sale; a doua accelerație este accelerația de transport, situată în planul paralelei și dirijată după raza paralelei, spre centrul ei; a treia accelerație este accelerația lui Coriolis, situată în planul paralelei, de-a lungul tangentei la paralelă, în sens opus sensului de rotație al pămîntului.

Vedem că accelerația lui Coriolis depinde de latitudinea locului, modulul său fiind egal cu zero la ecuator, unde avem $\Theta=0$ și atingînd valoarea maximă $2\mu\omega R$ la pol, unde avem $\Theta=\frac{\pi}{2}$. Grafic, funcția acestei accelerații se reprezintă printr-o sinusoidă, arătată în fig. 223, pe care $PABP''$ este lungimea meridianului punctului A. În emisfera sudică, latitudinea Θ este negativă și de aceea accelerația $\bar{a}_{cor}$ este dirijată în sens contrar. Să presupunem, de exemplu, că într-un rîu apa curge în emisfera nordică, de la sud spre nord; în acest caz, după cum știm, particulele de apă trebuie să capete accelerația $\bar{a}_{cor}$, dirijată de la dreapta spre stînga (fig. 223). Această accelerație imprimată particulelor de apă de către malul rîului, împinge spre stînga particulele de apă care se apropie de el. De aceea, malul drept al rîului trebuie să fie ros de apă. Prin urmare, malul drept al rîului trebuie să fie abrupt. Dacă rîul curge de la nord spre sud tot în emisfera nordică, viteza unghiulară μ va fi negativă și accelerația lui Coriolis trebuie să fie de sens opus, așa cum se

vede din fig. 224. In acest caz se va roade din nou malul drept al rîului, care în consecinţă va fi abrupt. In emisfera sudică fenomenul se petrece invers. Această proprietate a rîurilor, clarificată de academicianul rus Karl Maximovici Ber (1792—1876),

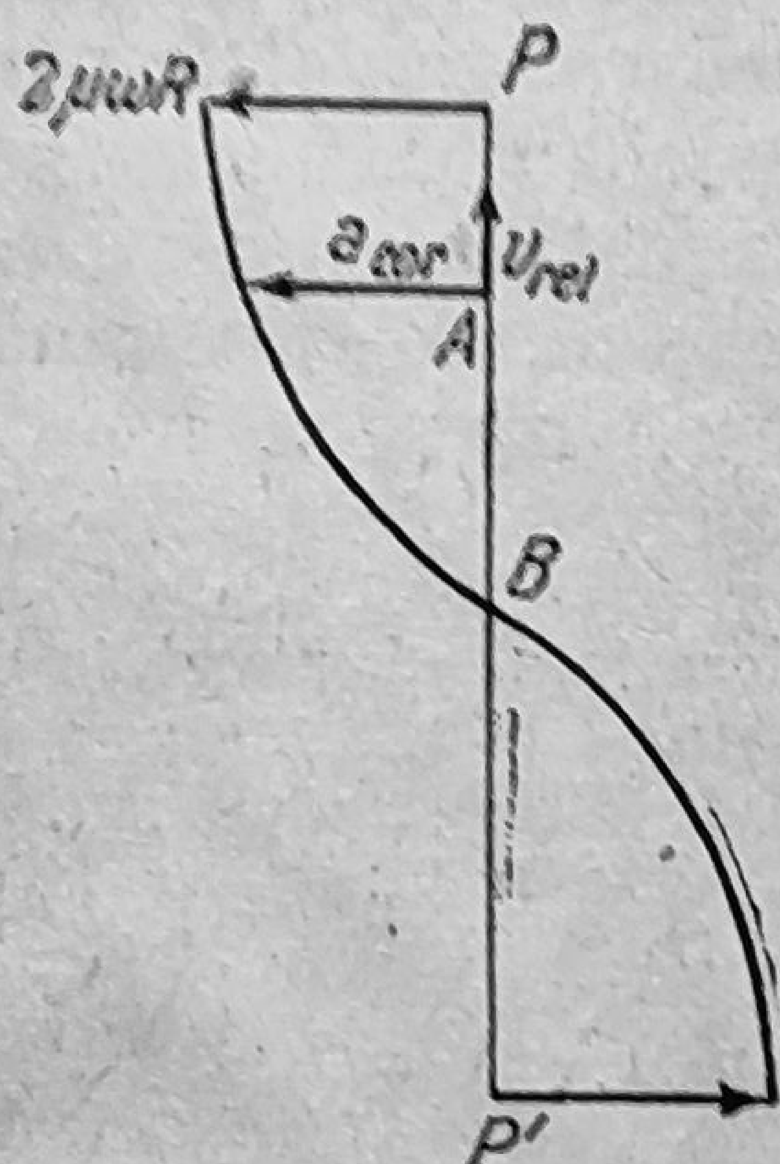


Fig. 223

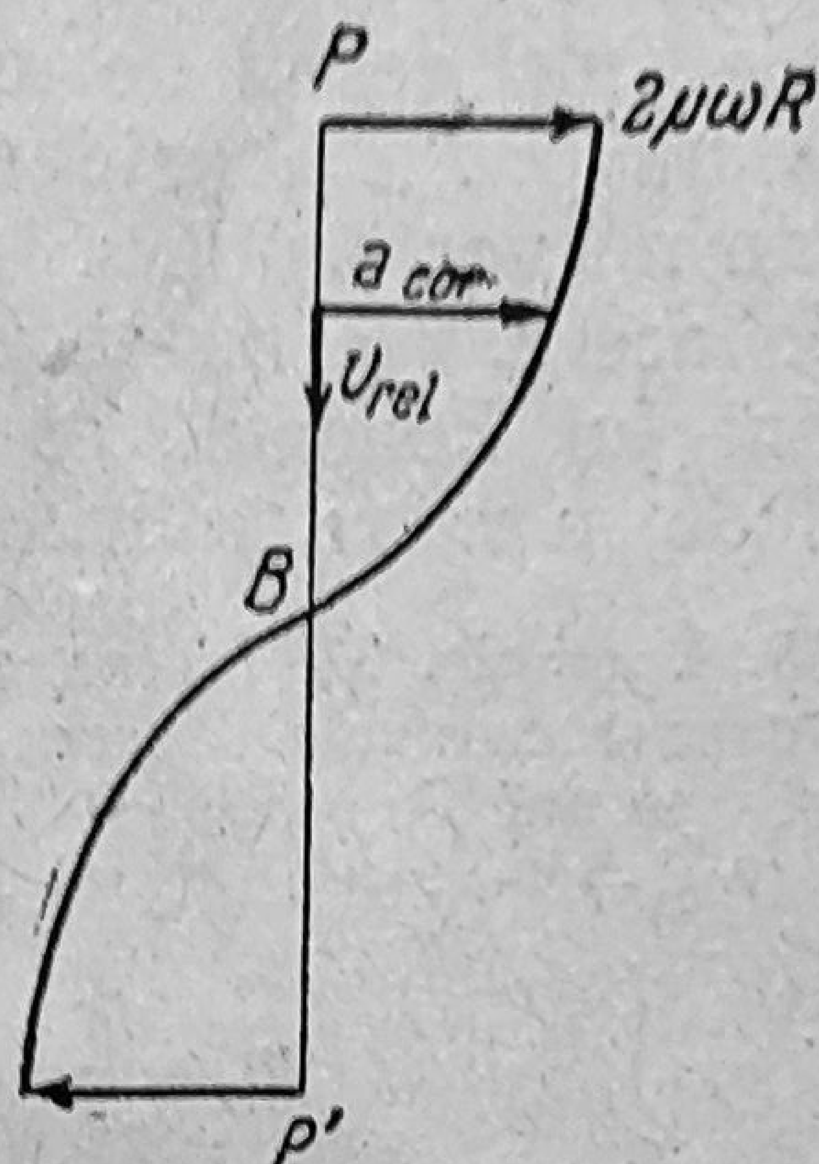


Fig. 224

poartă numele de legea lui Ber. Prin prezenţa accelenaţiei lui Coriolis, se explică de asemenea şi deviaţia de la direcţia nord-sud a vînturilor alizee şi a musonilor.

Să examinăm formulele (23.16). Dacă punctul A se află la o distanţă mică de originea O a sistemului axelor de coordonate mobile reprezentate în fig. 220, atunci coordonatele sale (x, y, z) sînt cantităţi mici; de aceea, dacă nu se cere o precizie prea mare, se pot neglija produsele coordonatelor punctului A cu viteza unghiulară ω de rotaţie a pămîntului. În ce priveşte produsele $\omega R \cos\varphi$, afară de localităţile apropiate de polii pămîntului, pentru care mărimea $\cos\varphi$ este foarte apropiată de zero, nu se poate neglija acest produs din cauza mărimii razei R a pămîntului, şi ajungem la formulele simplificate:

$$v_x = -\omega R \cos\varphi + \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

adică obţinem aceleaşi formule, ca şi cum axele $Oxyz$ nu s-ar roti, ci ar avea doar o viteză de translaţie constantă egală ca modul cu $\omega R \cos\varphi$ şi dirijată în sensul de rotaţie al pămîntului. Dacă în plus mişcarea studiată se face într-un interval mic de timp, atunci arcul de cerc parcurs de originea O a coordonatelor în acest interval de timp, se poate identifica cu un segment de dreaptă.

vede din fig. 224. In acest caz se va roade din nou malul drept al rîului, care în consecință va fi abrupt. În emisfera sudică fenomenul se petrece invers. Această proprietate a rîurilor, clarificată de academicianul rus Karl Maximovici Ber (1792—1876),

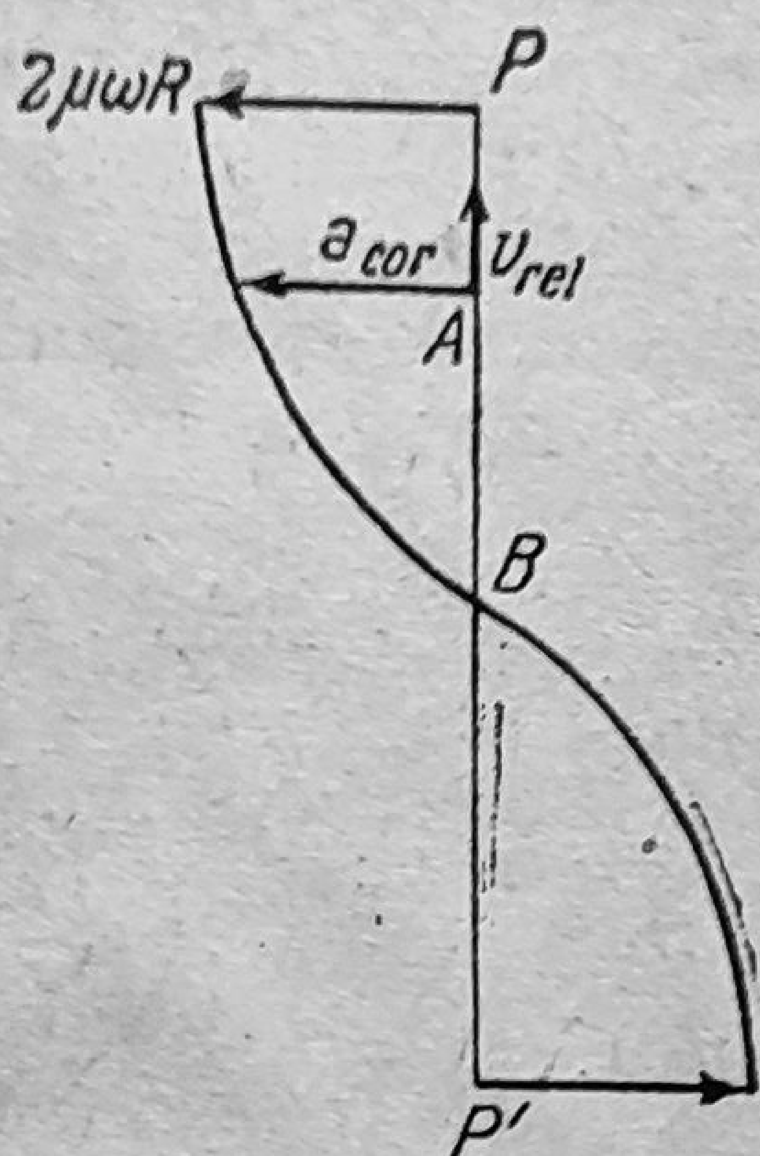


Fig. 223

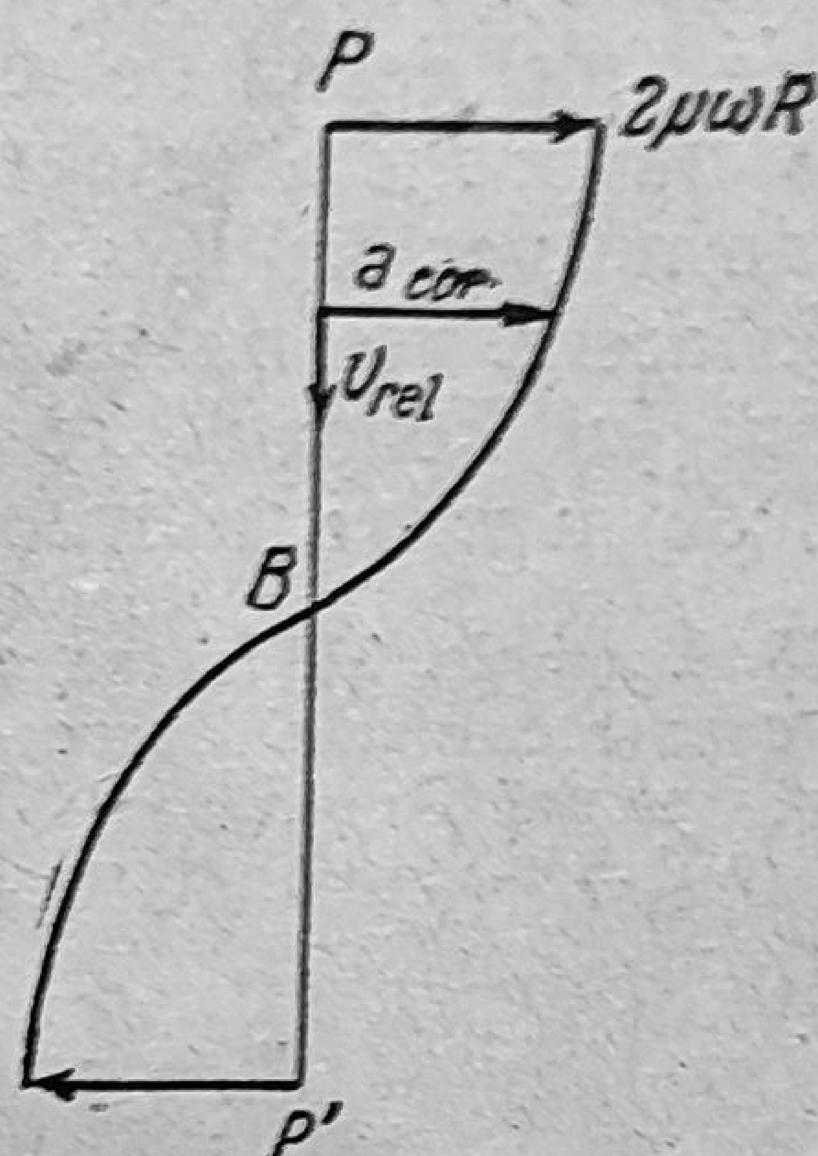


Fig. 224

poartă numele de legea lui Ber. Prin prezența accelerației lui Coriolis, se explică de asemenea și deviația de la direcția nord-sud a vînturilor alizee și a musonilor.

Să examinăm formulele (23.16). Dacă punctul A se află la o distanță mică de originea O a sistemului axelor de coordonate mobile reprezentate în fig. 220, atunci coordonatele sale (x, y, z) sînt cantități mici; de aceea, dacă nu se cere o precizie prea mare, se pot neglija produsele coordonatelor punctului A cu viteza unghiulară ω de rotație a pămîntului. În ce privește produsele $\omega R \cos \varphi$, afară de localitățile apropiate de polii pămîntului, pentru care mărimea $\cos \varphi$ este foarte apropiată de zero, nu se poate neglija acest produs din cauza mărimii razei R a pămîntului, și ajungem la formulele simplificate:

$$v_x = -\omega R \cos \varphi + \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

adică obținem aceleași formule, ca și cum axele $Oxyz$ nu s-ar roti, ci ar avea doar o viteză de translație constantă egală ca modul cu $\omega R \cos \varphi$ și dirijată în sensul de rotație al pămîntului. Dacă în plus mișcarea studiată se face într-un interval mic de timp, atunci arcul de cerc parcurs de originea O a coordonatelor în acest interval de timp, se poate identifica cu un segment de dreaptă.

În acest fel, pe un spaţiu mic la suprafaţa pămîntului, şi într-un interval mic de timp, în prima aproximaţie se pot considera că axele $Oxyz$ reprezentate în fig. 220 se mişcă uniform şi rectiliniu, sau sînt fixe, ceea ce se şi face totdeauna în majoritatea aplicaţiilor practice. Totuşi, dacă mişcările punctului se produc într-un interval de timp destul de mare, sau dacă coordonatele punctului (x, y, z) nu pot fi considerate foarte mici, atunci simplificările precedente nu vor conduce la o descriere reală a mişcării punctului şi, de aceea, ele nu se pot face; aşa sînt, de exemplu, cazul pendulului lui Foucault sau cazul căderii libere a unui punct material de la mare înălţime.

§ 105. Exemple. 75. Să se găsească acceleraţia unui punct în mişcare plană, în raport cu axele de coordonate Oxy, care se rotesc uniform în acest plan cu viteza unghiulară ω în jurul punctului O. Presupunînd în formulele (23.5) că $(v_0)_x=(v_0)_y=0$; $\omega_x=\omega_y=0$; $\omega_z=\omega$, vom avea:

$$v_x=\frac{dx}{dt}-\omega y, \qquad v_y=\frac{dy}{dt}+\omega x.$$

Cu aceste condiţii, formulele (23.14) pot căpăta forma:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}-\omega v_y, \qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}+\omega v_x.$$

În acest fel, vom obţine:

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}-\omega\frac{dy}{dt}-\omega\frac{dy}{dt}-\omega^2 x=\frac{d^2x}{dt^2}-2\omega\frac{dy}{dt}-\omega^2 x,$$

$$a_y=\frac{d^2y}{dt^2}+\omega\frac{dx}{dt}+\omega\frac{dx}{dt}-\omega^2 y=\frac{d^2y}{dt^2}+2\omega\frac{dx}{dt}-\omega^2 y.$$

76. Un punct se mişcă de-a lungul unei circumferinţe cu viteza unghiulară constantă μ, în timp ce cercul se roteşte în jurul centrului său în acelaşi sens, cu viteza unghiulară constantă ω; raza circumferinţei este egală cu R. Să se găsească acceleraţia punctului. Dacă punctul nu s-ar mişca pe circumferinţă, el ar avea numai o mişcare de transport cu acceleraţia ω^2R, dirijată spre centrul circumferinţei. Dacă cercul nu s-ar mişca, iar punctul s-ar mişca de-a lungul circumferinţei, atunci punctul ar avea o acceleraţie relativă, egală cu μ^2R, şi dirijată spre centrul cercului. Dacă se produc în acelaşi timp ambele mişcări, atunci punctul va căpăta şi acceleraţia lui Coriolis. Deoarece viteza relativă a punctului, egală cu μR, este situată în planul de mişcare al punctului, iar vectorul $\bar{\omega}$ este perpendicular pe acest plan, atunci acceleraţia lui Coriolis va fi egală cu: $2\mu\omega R$ şi va fi dirijată după rază spre centrul cercului. Prin urmare, acceleraţia punctului va fi dirijată după rază spre centrul cercului, şi va fi egală cu:

$$\omega^2R+\mu^2R+2\mu\omega R=(\omega+\mu)^2R.$$

Vom ajunge la acelaşi rezultat, folosindu-ne de coordonatele fixe x_1, y_1 ale punctului considerat (fig. 225). Avem:

$$x_1 = OB = R\cos(\omega+\mu)t,$$

$$y_1 = BA = R\sin(\omega+\mu)t.$$

De aici, găsim:

$$a_{x1} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = -(\omega+\mu)^2 R\cos(\omega+\mu)t,$$

$$a_{y1} = \frac{d^2y_1}{dt^2} = -(\omega+\mu)^2 R\sin(\omega+\mu)t.$$

In acest fel, modulul acceleraţiei va fi egal cu:

$$a = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = (\omega+\mu)^2 R,$$

şi, după cum rezultă din valorile proiecţiilor a_{x_1} şi a_{y_1}, acceleraţia este dirijată de-a lungul razei cercului către centrul lui.

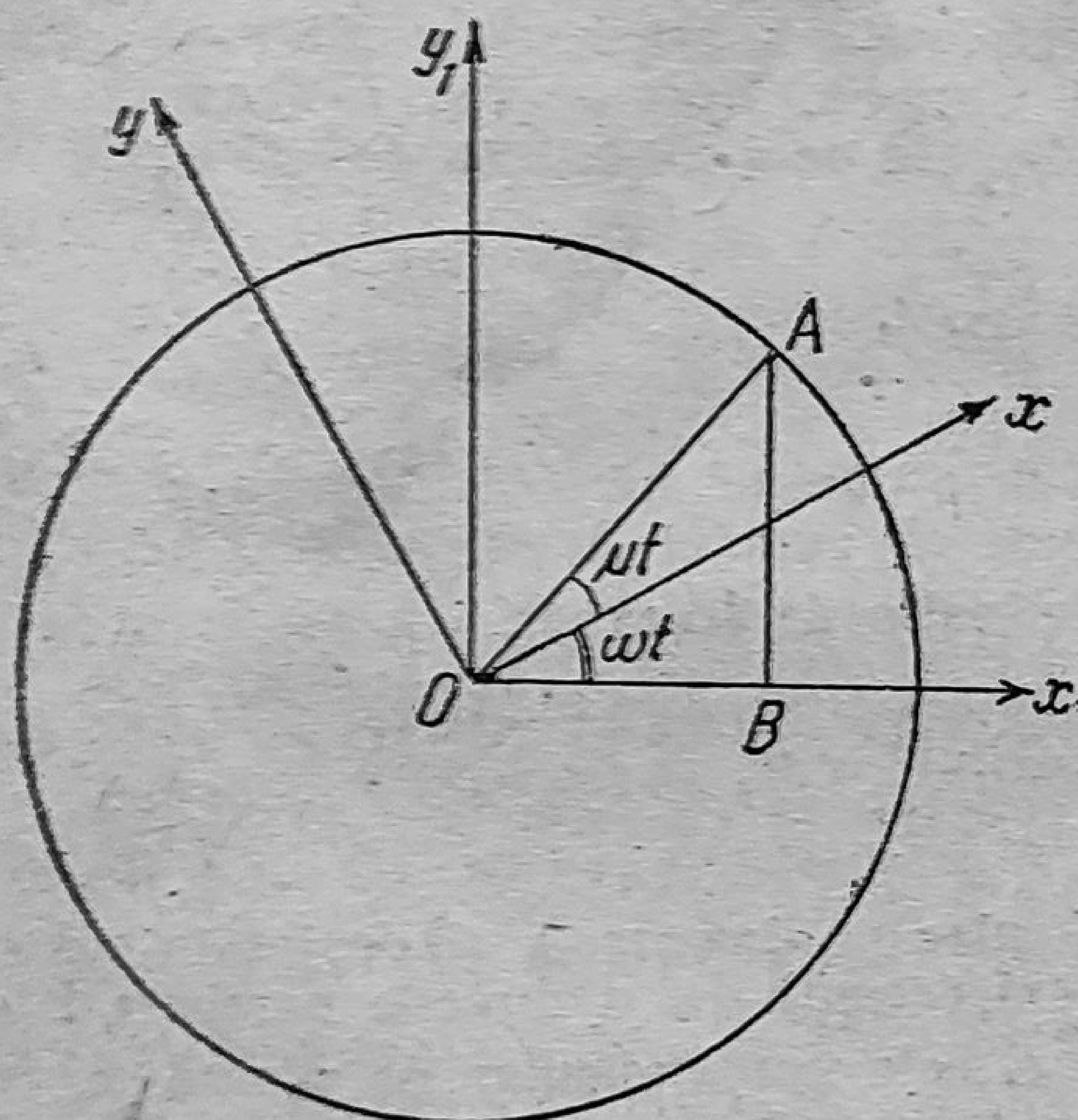


Fig. 225

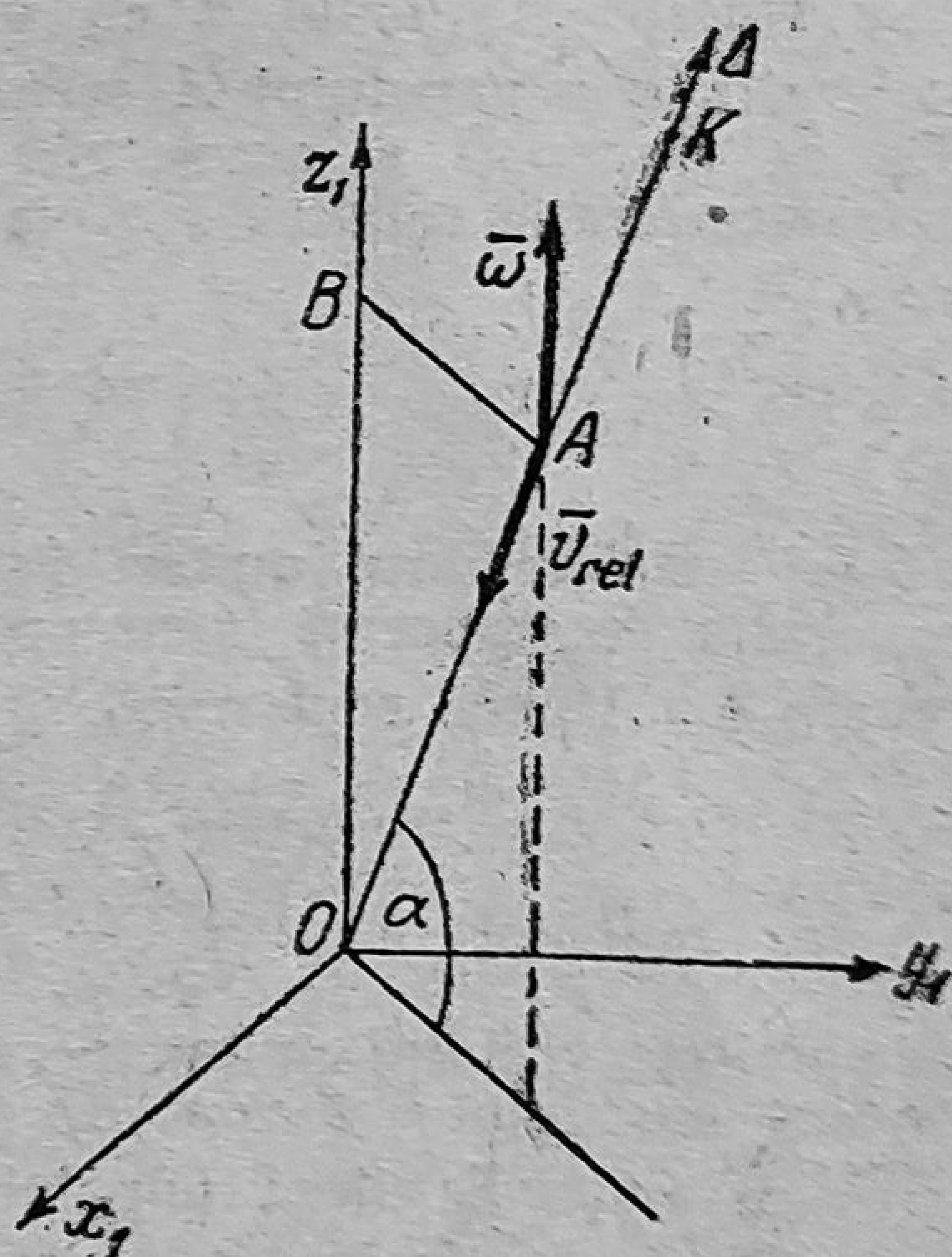


Fig. 226

77. De-a lungul dreptei Δ, înclinată faţă de planul Ox_1y_1 sub unghiul constant α şi care trece prin originea coordonatelor, se deplasează punctul A după legea $\frac{at^2}{2}$ către punctul O. Dreapta Δ se roteşte în jurul axei Ox_1, cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 226). Să se găsească acceleraţia punctului A. Acceleraţia de transport a punctului A va fi egală cu $\omega^2 AB$ şi dirijată de-a lungul lui AB de la punctul A spre punctul B. Dacă în

momentul $t=0$ punctul A se găsea în punctul K, unde avem $OK=s_0$, vom obține:

$$OA=s_0-\frac{at^2}{2}$$

și

$$AB=OA\cos\alpha=s_0\cos\alpha-\frac{a\cos\alpha}{2}t^2.$$

In acest fel, accelerația de transport a punctului A va fi egală cu $\left(s_0\cos\alpha-\frac{a\cos\alpha}{2}t^2\right)\omega^2$. Accelerația relativă a punctului A este egală cu a și dirijată de la A spre O. Viteza relativă a punctului A, este egală cu at și dirijată de la A spre O; de aceea, accelerația lui Coriolis va fi egală:

$$2\,at\,\omega\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\,at\,\omega\cos\alpha$$

și va fi dirijată perpendicular pe planul triunghiului OAB în sensul rotației de transport.

78. Să se găsească accelerația absolută a punctului material A, care se mișcă în mod arbitrar de-a lungul dreptei Δ, ce trece prin punctul fix O, și se rotește în planul π cu viteza unghiulară arbitrară ω. Evident că accelerația $\bar{a}$ a punctului A se va compune din accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația lui Coriolis. Notăm prin r distanța OA; atunci accelerația relativă a_{rel} va fi dirijată de-a lungul lui OA și egală cu:

$$\bar{a}_{rel}=\frac{d^2r}{dt^2}\bar{r}^0,$$

unde $\bar{r}^0$ este vectorul unitar dirijat de-a lungul lui OA. Pentru a obține accelerația de transport, vom presupune că punctul A este solidar legat de dreapta Δ. Atunci, conform § 73 accelerația de transport $\bar{a}_{tr}$ va fi:

$$\bar{a}_{tr}=-\omega^2 r\bar{r}^0+\frac{d\omega}{dt}r\bar{n}^0,$$

unde $\bar{n}^0$ este vectorul unitar, perpendicular pe dreapta Δ și dirijat în sensul creșterii unghiului θ format de această dreaptă cu o direcție oarecare fixă. Deoarece vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ este perpendicular pe planul π, iar vectorul viteză relativă $\bar{v}_{rel}$ este situat de-a lungul dreptei Δ, accelerația lui Coriolis va avea direcția vectorului $\bar{n}^0$, și vom obține:

$$\bar{a}_{cor}=2\,\omega v_{rel}\bar{n}^0=2\,\omega\frac{dr}{dt}\bar{n}^0.$$

Prin urmare, accelerația $\bar{a}$ a punctului A va fi:

$$\bar{a}=\bar{a}_{rel}+\bar{a}_{tr}+\bar{a}_{cor}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\omega^2 r\right)\bar{r}^0+\left(\frac{d\omega}{dt}r+2\omega\frac{dr}{dt}\right)\bar{n}^0.$$

Deoarece $\omega = \frac{d\Theta}{dt}$ obținem:

$$a = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\right]\bar{r}^0 + \left[r\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{n\Theta}{dt}\right]\bar{n}^0,$$

sau

$$a = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\right]\bar{r}^0 + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left[r^2\frac{d\Theta}{dt}\right]\bar{n}^0,$$

adică ajungem la formulele (17.7) pentru proiecțiile accelerației pe axele coordonatelor polare în plan.

79. Să se deducă formulele (23.14) fără aplicarea calculului vectorial. Pentru aceasta, să examinăm sistemul axelor de coordonate mobile $Oxyz$, care au originea O fixă și fie Δ o semidreaptă fixă, ce trece prin punctul O, care formează în momentul considerat t unghiurile α, β, γ, cu axele Ox, Oy, Oz. Punctul O trebuie să fie fix, deoarece din § 70 se știe că pentru găsirea hodografului vitezelor și al accelerațiilor, trebuie mutați toți vectorii viteză ai punctului mobil, paralel cu ei înșiși în unul și același punct fix din spațiu. Dacă $\overline{OA} = \bar{r}$ este vector, în general, cu modulul variabil și cu direcția variabilă, și r_x, r_y, r_z sînt proiecțiile acestui vector în momentul t pe axele $Oxyz$, atunci cosinușii unghiurilor formați de vectorul $\bar{r}$ cu axele de coordonate $Oxyz$ în momentul t, vor fi egali cu $\frac{r_x}{r}$, $\frac{r_y}{r}$, $\frac{r_z}{r}$. De aici rezultă că cosinusul unghiului dintre vectorul $\bar{r}$ și semidreapta Δ va fi egal cu

$$\frac{r_x}{r}\cos\alpha + \frac{r_y}{r}\cos\beta + \frac{r_z}{r}\cos\gamma.$$

Prin urmare, proiecția r_Δ a vectorului variabil $\bar{r}$ pe semidreapta fixă Δ pentru momentul t, va fi egală cu

$$r_\Delta = r_x\cos\alpha + r_y\cos\beta + r_z\cos\gamma.$$

În acest fel, r_Δ este proiecția vectorului $\bar{r}$ pe semidreapta fixă Δ în timp ce de exemplu, mărimea r_x este proiecția aceluiași vector r pe direcția variabilă Ox. De aceea, creșterea $\Delta(r_\Delta)$ și $\Delta(r_x)$ au semnificații diferite; creșterea $\Delta(r_\Delta)$ depinde numai de variația vectorului $\bar{r}$, dar creșterea $\Delta(r_x)$ depinde nu numai de variația vectorului $\bar{r}$, ci mai depinde încă și de rotația axei Ox și va exista și în cazul cînd vectorul $\bar{r}$ nu va varia. De aici rezultă că pentru obținerea proiecției vitezei reale a punctului A, trebuie să pornim de la formula următoare:

$$\frac{d(r_\Delta)}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\cos\alpha + \frac{dr_y}{dt}\cos\beta + \frac{dr_z}{dt}\cos\gamma - r_x\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} - r_y\sin\beta\frac{d\beta}{dt} - r_z\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}.$$

Dacă vectorul $\bar{r}$ este vectorul viteză $\bar{v}$, formula precedentă se transformă în formula:

$$\frac{d(v_\Delta)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\cos\alpha + \frac{dv_y}{dt}\cos\beta + \frac{dv_z}{dt}\cos\gamma - v_x\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} - v_y\sin\beta\frac{d\beta}{dt} - v_z\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}.$$

Deoarece partea stîngă a ultimei formule depinde numai de variaţia vectorului viteză $\bar{v}$, atunci partea stîngă reprezintă proiecţia acceleraţiei punctului A, pe dreapta Δ, adică

$$a_\Delta=\frac{dv_x}{dt}\cos\alpha+\frac{dv_y}{dt}\cos\beta+\frac{dv_z}{dt}\cos\gamma-v_x\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}-v_y\sin\beta\frac{d\beta}{dt}-v_z\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}.$$

Să presupunem că în momentul t, semidreapta Δ coincide cu poziţia instantanee a axei Ox; vom avea:

$$a_\Delta=a_x,\quad \alpha=0,\quad \beta=\frac{\pi}{2},\quad \gamma=\frac{\pi}{2},$$

şi vom obţine:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}-v_y\frac{d\beta}{dt}-v_z\frac{d\gamma}{dt}.$$

Dar este uşor de observat că, prin suprapunerea lui Δ cu Ox, derivata $\frac{d\beta}{dt}$ va fi egală cu viteza unghiulară ω_z, iar derivata $\frac{d\gamma}{dt}$ este egală cu viteza unghiulară ω_y luată cu semnul minus, deoarece creşterii unghiului γ îi corespunde rotaţia în jurul axei Oy în sens negativ sau în sensul acelor unui ceasornic. În acest fel ajungem la prima din formulele (23.14):

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}+\omega_y v_z-\omega_z v_y.$$

Celelalte două formule (23.14) se obţin pe aceeaşi cale, prin suprapunerea în momentul t a semidreptei Δ cu poziţiile instantanee ale celorlalte două axe de coordonate.

ANEXĂ

La studiul accelerației punctului în § 72, am folosit unele noțiuni geometrice, pe care le vom prezenta pe scurt cititorului în anexa de față, trimițînd pentru detalii la cursurile de analiză, și anume la acele paragrafe în care se expun aplicațiile calculului diferențial la geometrie.

Să examinăm un cerc oarecare cu raza ρ și să luăm pe el arcul de cerc s, corespunzător unghiului la centru α (fig. 227). Știm că:

$$s=\rho\alpha,$$

adică

$$\alpha=\frac{s}{\rho}.$$

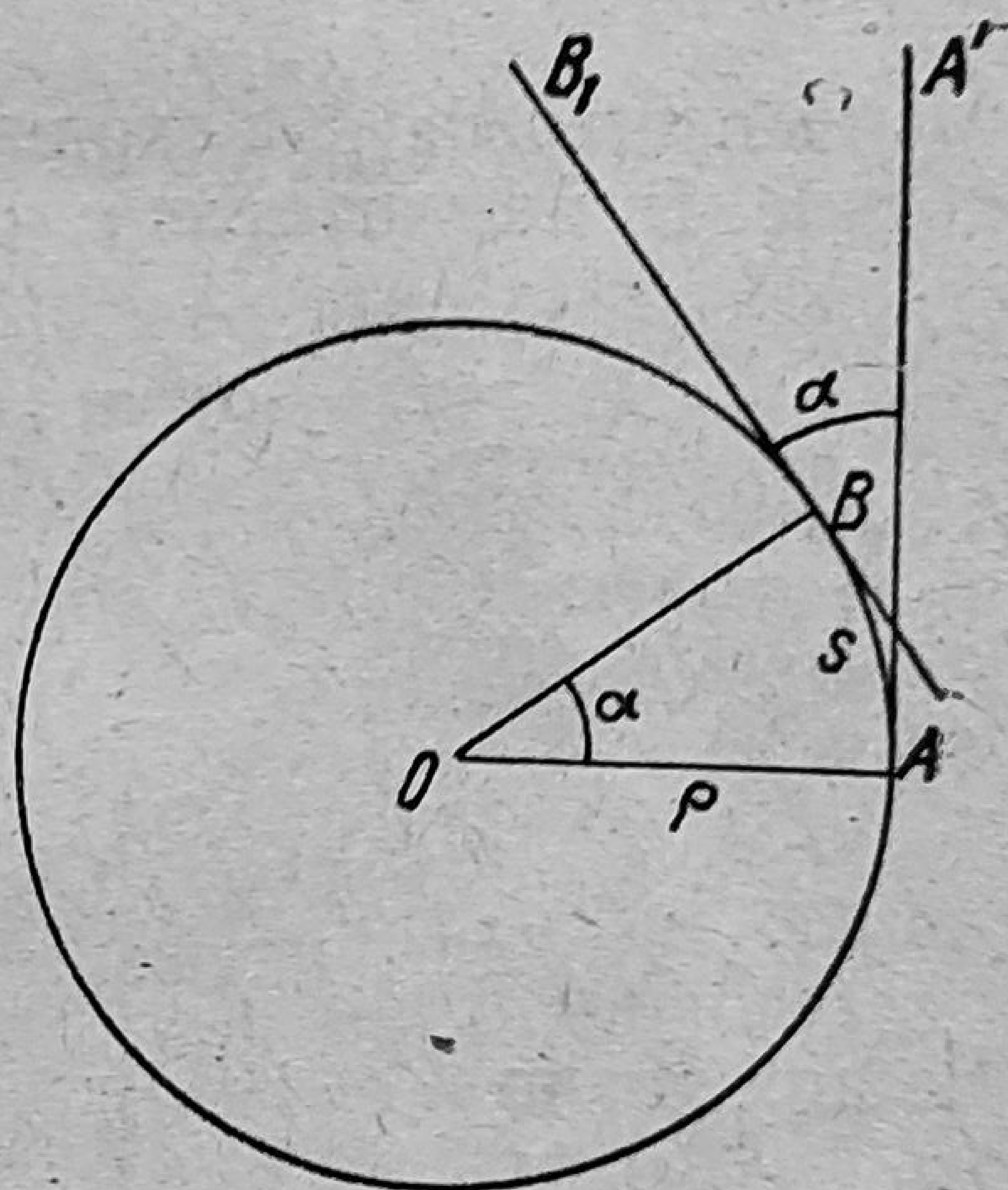


Fig. 227

Din această relație rezultă că pentru aceeași lungime s, unghiul α va fi cu atît mai mic, adică curbura arcului de cerc va fi cu atît mai mică, cu cît raza ρ a cercului va fi mai mare. De aici rezultă că drept măsură a curburii arcului de cerc putem considera cantitatea $\frac{1}{\rho}$. Să examinăm arcul $\widehat{AB}=s$ al circumferinței și să ducem în extremitățile acestui arc A și B tangentele AA_1 și BB_1; unghiul dintre tangentele duse în capetele arcului se numește *unghiul de adiacență*. Vedem că, deoarece $AA_1 \perp OA$ și $BB_1 \perp OB$, unghiul de adiacență este egal cu unghiul la centru OAB. In acest fel, dacă avem arcul de circumferință vom găsi raza acestei circumferințe împărțind lungimea arcului cu valoarea unghiului de adiacență.

Să presupunem că nu avem un cerc, ci o curbă plană oarecare (C). Luăm pe această curbă un arc infinit mic AB; acest

arc se va apropia cu atît mai mult de un arc de circumferință, cu cît lungimea lui Δs va fi mai mică. De aceea pentru un Δs mic putem considera arcul AB aproximativ ca un arc de cerc. Să găsim raza acestui cerc. Pentru aceasta, conform celor precedente, construim tangentele A_1A și B_1B la capetele A și B ale arcului $\widehat{AB}$ (fig. 228). Aceste tangente formează între ele unghiul de adiacență $\Delta\alpha$; din fig. 228 vedem că unghiul $\Delta\alpha$ este creșterea unghiului α format de tangenta la curba (C) cu axa Ox la trecerea din punctul A în punctul B. Vom obține raza cercului căutat, împărțind Δs cu $\Delta\alpha$. Deoarece înlocuirea arcului $\widehat{AB}$ al curbei (C) printr-un arc de cerc va fi cu atît mai precisă, cu cît lungimea arcului Δs va fi mai mică, atunci, la limită, vom obține formula care ne dă raza ρ a cercului, denumit *cerc de curbură;* raza ρ se numește *rază de curbură.* Avem:

$$\rho=\frac{ds}{d\alpha}.$$

Nu este greu de dat expresia razei de curbură ρ, comodă pentru calcule. În adevăr, avem:

$$ds^2=dx^2+dy^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx^2=(1+y'^2)\,dx^2$$

și

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Se știe că

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=y',$$

adică

$$\alpha=\operatorname{arctg} y';$$

de aici găsim

$$d\alpha=\frac{y''\,dx}{1+y'^2}.$$

Prin urmare, raza de curbură ρ va fi egală cu

$$\rho=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx\,(1+y'^2)}{y''\,dx},$$

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Vom observa că, deoarece raza este de fapt o mărime pozitivă, pentru partea dreaptă a ultimei egalități trebuie să se ia valoarea

ei absolută. De asemenea, este evident că în fiecare punct al curbei, raza de curbură va avea în general o valoare proprie.

Ca exemplu vom găsi raza de curbură ρ a parabolei $y^2=2px$. Vom obține succesiv:

$$y=\sqrt{2p}\sqrt{x}, \quad y'=\sqrt{\frac{p}{2}}x^{-\frac{1}{2}}, \quad y''=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2}}x^{-\frac{3}{2}}.$$

De aceea, vom avea, luînd semnul plus în partea dreaptă, următoarea expresie a razei curbei:

$$\rho=\frac{\left(1+\frac{p}{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2}}x^{-\frac{3}{2}}}.$$

sau

$$\rho=\sqrt{\frac{(p+2x)^3}{p}}.$$

În vîrful parabolei unde $x=0$, raza de curbură va fi minimă și egală cu parametrul p al parabolei.

Cunoscînd raza de curbură ρ, putem construi în fiecare punct al curbei cercul respectiv de curbură. Evident că pentru aceasta trebuie să ducem în punctul dat normala la curbă, în sensul concavității ei, și să măsurăm pe această normală de la punctul considerat, un segment egal cu raza de curbură; vom obține astfel *centrul de curbură*. Cunoscînd centrul de curbură și raza de curbură, vom construi direct și cercul de curbură. Cercul de curbură se mai poate determina și altfel. Să considerăm pe curbă, trei puncte foarte apropiate între ele. Se știe că prin trei puncte se poate duce o circumferință și numai una singură. De aceea, vom duce circumferința prin cele trei puncte date și vom apropia aceste trei puncte. La limită vom obține o circumferință, care trece prin cele trei puncte contopite între ele, care evident va coincide chiar cu cercul de curbură determinat mai sus.

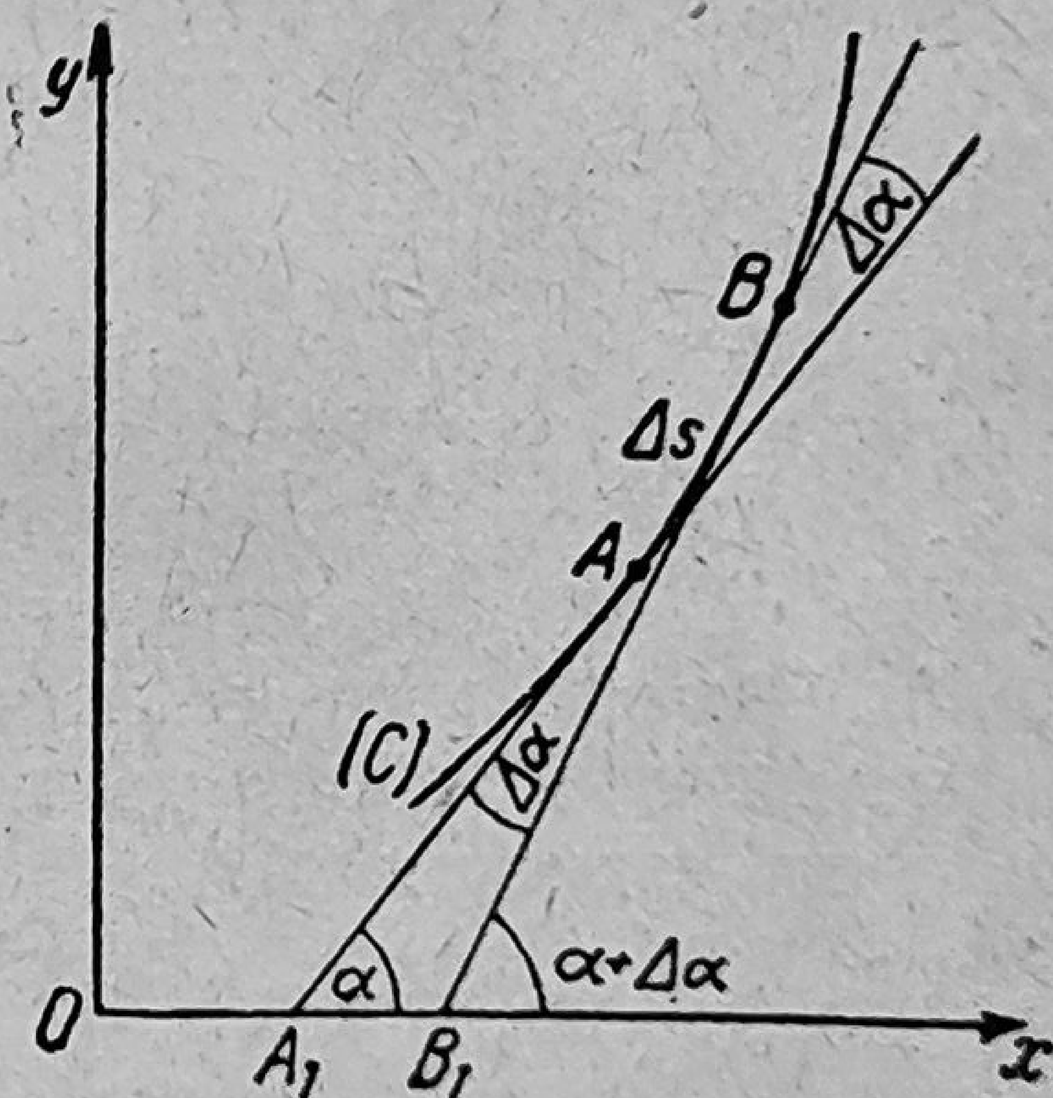


Fig. 228

Să examinăm acum o curbă strîmbă, adică o curbă ale cărei puncte nu sînt situate în același plan. Ca exemplu al unei astfel de curbe, poate servi elicea circulară. Să luăm pe această curbă trei puncte foarte apropiate între ele. Deoarece prin trei puncte se poate duce în general un plan și numai unul singur, atunci prin cele trei puncte considerate vom duce un plan și vom apropia nelimitat aceste trei puncte între ele. La limită vom obține un plan care trece prin cele trei puncte confundate ale curbei; acest plan se numește *plan osculator*. Evident că noi putem considera aproximativ arcul curbei strîmbe (cu dublă curbură) care trece prin trei puncte extrem de apropiate între ele, drept arcul unei curbe plane care se află la limită în planul osculator. În acest fel putem construi în planul osculator un cerc de curbură, și să găsim raza de curbură, ca și pentru curba plană; această rază de curbură se numește *raza primei curburi,* a curbei strîmbe cu dublă curbură.

Deplasîndu-ne de-a lungul curbei strîmbe, planul osculator se va roti; viteza de rotire a planului osculator va determina *torsiunea curbei.* Deoarece tangenta trece prin două puncte confundate, iar planul tangent prin trei puncte confundate, atunci tangenta în fiecare punct al curbei se află în planul osculator construit pentru acest punct. Normala la curbă, dusă în planul osculator se numește *normala principală,* iar normala la curbă, perpendiculară pe planul osculator se numește *binormală*.

Planul osculator se mai poate determina și altfel. Să considerăm pe curbă trei puncte extrem de apropiate între ele A, B, C. Prin tangenta în punctul A se poate duce un plan paralel la tangenta în punctul vecin B. Deoarece tangenta în punctul B este poziția limită a secantei, care trece prin punctele B și C, rezultă că planul osculator poate fi considerat ca poziție limită a planului care trece prin punctul dat A al curbei și este paralel la tangenta în punctul vecin B, cînd punctul B tinde să se suprapună peste punctul A.

INDEX ALFABETIC

ERATA

Pag.	Rîndul	In loc de	Se va citi	Din vina cui
24	7 jos	$+AB \cdot AC=$	$+2\,AB \cdot AC=$	Editură
112	11,10,9 jos (numitorii la neomogeni)	$\overline{}$ V	$\overline{}$ M	"
146	12 sus	temă	lemă	Tipografie
154	25 jos	$\beta > \alpha$	$\beta < \alpha$	Editură
165	12 sus	normala AA	normala AA_n	Tipografie
167	20 sus	R_n	R'_n	"
174	7 jos	$\sqrt{\ldots M_z}$	$\sqrt{\ldots M_z^2}$	"
186	1 jos	$P \cos \alpha$	$P_1 \cos \alpha,$	"
190	8 sus	$\ldots + p\,(l+z)$	$\ldots + p\,(l-z)$	Editură
238	10, 9 jos	γ	7	"
248	12 sus	$=b_2 \cos kt$	$+b_2 \cos kt$	"
248	1 jos	$\bar{r}=\bar{k}_1 t=\bar{r}_0$	$\bar{r}=\bar{k}_1 t+\bar{r}_0$	"
264	16 jos	$=\frac{v_y}{v}\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{dt},$	$=\frac{v_y}{v}=\frac{1}{v}\,\frac{dy}{dt}$	"
273	1 jos	$=\frac{1}{2}\left(x-y\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$	$=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$	"
288	14 jos	$\frac{d\bar{r}^0}{dt}+\bar{n}^0\ldots$	$\frac{d\bar{r}^0}{dl}=\bar{n}^0\ldots$	"
298	12 jos	corectă	corectată	"
302	13 jos	$\ldots 4\,m^2\,n^2+m^2\,(m^2+n^2)$	$\ldots 4\,m^2\,n^2-m^2\,(m^2+n^2)$	"
302	7 jos	$=\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}r^2}$	$=\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}r}$	Tipografie
337	2 jos	$-\omega\,(y_1-y_1)$	$-\omega\,(y_1-y'_1)$	"
357	17 jos	$\ldots \cos^2 \varphi_1$	$\ldots \cos^2 \varphi'_1$	"
358	3 sus	$a \sin =$	$a \sin \alpha =$	"
363	13 jos	$=\frac{\ldots}{l \sin(\beta+\gamma+\psi)}$	$=\frac{\ldots}{l' \sin(\beta+\gamma+\psi)\ldots}$	"
375	2 sus	timpul a al vectorului $\bar{\omega}$	timpul, a vectorului $\bar{\omega}$	Editură
404	3 sus	$\ldots+\frac{d\omega_{x_1}}{dt}(z_1-n)\ldots$	$\ldots+\frac{d\omega_{y_1}}{dt}(z_1-n)\ldots$	"
405	6 sus	$\ldots+\frac{d\omega_y}{dt}x-\ldots$	$\ldots+\frac{d\omega_y}{dt}z-\ldots$	"
411	9 jos	$+(\bar{\omega}+\bar{j})\,y\times(\ldots$	$\ldots+(\bar{\omega}\times\bar{j})\,y+(\ldots$	"
422	5 sus	$-\omega^2 R \cos\theta - \ldots$	$\ldots-\omega^2 R \cos^2\theta-\ldots$	"
426	9 jos	$\omega^2 R$	$\mu^2 R$	"

Editura Tehnică
(R)

2617

20 F

Lei 15,50

(Rămîne la cumpărător)

Editura Tehnică
(R)

2617

20 F

A. I. Necrasov
Curs de mecanică teoretică
vol. I

Numărul din borderoul de casă al unității

Lei 15,50

(Rămîne la unitate)

Editura Tehnică
(R)

2617

20 F

A. I. Necrasov
Curs de mecanică teoretică
vol. I

Numărul din borderoul de casă al unității

Lei 15,50

(Pentru centrul regional CLDC)

